

ДИНАМИЧЕСКАЯ УСТОЙЧИВОСТЬ КОЛЬЦА ПОД ДЕЙСТВИЕМ НОРМАЛЬНЫХ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СИЛ

Г. Ю. ДЖАНЕЛИДЗЕ и М. А. РАДЦИГ

(Ленинград)

В настоящее время вопрос о динамической устойчивости упругих систем мало исследован. Из небольшого числа посвященных указанной проблеме работ отметим работу проф. Н. М. Беляева^[1], в которой исследуется устойчивость призматических стержней под действием переменных продольных сил, и работу Б. А. Боднера^[2], где разбирается та же задача для различных пластин.

Данная статья посвящена рассмотрению поведения упругого стержня кольцевой формы¹, подвергнутого действию периодической равномерно распределенной нагрузки.

Нам кажется, что при современном состоянии вопроса о динамической устойчивости упругих систем исследование даже этой частной задачи представляет известный интерес.

§ 1. Постановка задачи. Основные уравнения

Рассмотрим упругий тонкий стержень, имеющий форму кольца радиуса a , подвергнутый действию равномерно распределенной нормальной нагрузки, меняющейся со временем по синусоидальному закону

$$\sigma = \sigma_0 \cos \omega t,$$

где σ — нагрузка, приходящаяся на единицу длины кольца, ω — частота.

При составлении уравнений движения кольца воспользуемся методом кинестатики, взяв за исходную систему обычные статические уравнения теории тонких стержней, данные Кирхгофом. Это замечание позволяет написать полную систему уравнений движения в виде^[3] (члены, содержащие производные по времени, представляют силы инерции и соответствующие им моменты^[4], причем эти члены уже линеаризированы):

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial s} + (1 + a \delta q) V_x - a \delta r V_y - a \varphi \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} &= 0, \\ \frac{\partial V_y}{\partial s} + a \delta r V_x - a \delta p V_x - a \varphi \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} &= 0, \end{aligned} \quad (1)$$

¹ Далее мы предполагаем, что и при движении кольца нагрузка остается нормальной к оси кольца и направленной в плоскости xx .

$$\begin{aligned} \frac{\partial V_x}{\partial \vartheta} + a \delta p V_y - (1 + a \delta q) V_x - a \rho \frac{\partial^2 w}{\partial t^2} &= 0; \\ \frac{\partial L_x}{\partial \vartheta} + (1 + a \delta q) L_x - a \delta r L_y - a V_y + \rho K_0^2 \frac{\partial^2 v}{\partial t^2 \partial \vartheta} &= 0, \\ \frac{\partial L_y}{\partial \vartheta} + a \delta r L_x - a \delta p L_x + a V_x - \rho K_1^2 \frac{\partial^2 u}{\partial t^2 \partial \vartheta} &= 0, \\ \frac{\partial L_z}{\partial \vartheta} + a \delta p L_y - (1 + a \delta q) L_x - \rho K_2^2 \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= 0; \\ \delta p &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \alpha}{\partial \vartheta} + \gamma \right), & \delta q &= \frac{1}{a} \frac{\partial \beta}{\partial \vartheta}, & \delta r &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial \gamma}{\partial \vartheta} - \alpha \right); \\ \alpha &= -\frac{1}{a} \frac{\partial v}{\partial \vartheta}, & \beta &= \frac{1}{a} \left(\frac{\partial u}{\partial \vartheta} + w \right), & \gamma &= \frac{\partial w}{\partial \vartheta} - u; \\ L_x &= A \delta p, & L_y &= B \delta q, & L_z &= C \delta r. \end{aligned} \quad (2)$$

В уравнениях (1)—(4) принята обычная система обозначений.

Ось z_0 — касательная к оси стержня до деформации, оси x_0 и y_0 направлены по главным осям инерции поперечного сечения стержня; ось z — касательная к оси стержня после деформации; ось x расположена перпендикулярно к оси z в плоскости, проходящей через ось z и касательную к линии, в которую после деформации переходит одна из главных осей поперечного сечения стержня;

$\delta p, \delta q$ — изменения кривизн p и q при деформации, δr — изменение кручения при деформации стержня;

α, β, γ — проекции вектора поворота на оси x_0, y_0, z_0 ;

u, v, w — составляющие вектора перемещения по осям x_0, y_0, z_0 ;

$V_x, V_y, V_z, L_x, L_y, L_z$ — составляющие по осям x, y, z главного вектора и главного момента системы сил, действующих на выделенный элемент стержня;

K_0, K_1, K_2 — радиусы инерции поперечного сечения кольца относительно осей x_0, y_0, z_0 ;

s — длина дуги стержня; A, B — жесткости; $\vartheta = s/a$ — центральный угол; C — жесткость при кручении; a — радиус кольца; ρ — линейная плотность материала.

После пренебрежения малыми величинами второго порядка малости (линеаризация) и исключения $V_x, V_y, V_z, L_x, L_y, L_z, \delta p, \delta q, \delta r$ приходим к системе линейных дифференциальных уравнений, определяющей перемещения u, v, w и угол закручивания γ :

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{\sigma_0 a^3}{B} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) \cos \omega t &= \\ = \frac{\rho a^4}{B} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(u - \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) + \frac{\rho a^2 K_1^2}{B} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right); & (5) \\ \frac{\partial^4 v}{\partial \vartheta^4} - a \left(1 + \frac{C}{A} \right) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2} + \left(\frac{a^3 \sigma_0}{A} \cos \omega t - \frac{C}{A} \right) \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} &= \\ - \frac{a^4 \sigma_0}{A} \gamma \cos \omega t + \frac{\rho a^4}{A} \frac{\partial^2 v}{\partial t^2} - \frac{\rho a^2 K_0^2}{A} \frac{\partial^4 v}{\partial t^2 \partial \vartheta^2} &= 0; \\ \frac{\partial^2 v}{\partial \vartheta^2} + \frac{a}{1 + A/C} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2} - \frac{a}{1 + C/A} \gamma - \frac{\rho a^2 K_2^2}{A + C} \frac{\partial^2 \gamma}{\partial t^2} &= 0. \end{aligned} \quad (6)$$

Из вида системы (5) и (6) следует, что движение кольца можно рассматривать как результат наложения двух независимых движений: одного, совершаемого в плоскости кольца, и другого, соответствующего выходу из этой плоскости.

§ 2. Решение основных уравнений

Начнем с рассмотрения первого рода движения.

Имея в виду упрощение дальнейших вычислений, пренебрежем, как это обычно делается при исследовании колебаний колец и стержней, членами, соответствующими так называемой инерции вращения. Тогда уравнение (5) примет вид:

$$\frac{\partial^6 u}{\partial \vartheta^6} + 2 \frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} + \frac{\sigma_0 a^3}{B} \left(\frac{\partial^4 u}{\partial \vartheta^4} + \frac{\partial^2 u}{\partial \vartheta^2} \right) \cos \omega t = \frac{\rho a^4}{B} \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}. \quad (7)$$

Будем искать частное решение уравнения (7) в форме:

$$u(\vartheta, t) = \Theta(\vartheta) T(t). \quad (8)$$

Как показывает подстановка, решение вида (8) удовлетворяет уравнению (7), если функции $\Theta(\vartheta)$ и $T(t)$ являются решениями уравнений:

$$\Theta^{(VI)} + \left(2 + \frac{a^3 \sigma_0}{B} \cos \omega t \right) \Theta^{(IV)} + \left(1 + \alpha + \frac{a^3 \sigma_0}{B} \cos \omega t + \beta \cos \omega t \right) \Theta^{(II)} - (\alpha + \beta \cos \omega t) \Theta = 0, \quad (9)$$

$$T''(t) - \frac{B}{\rho a^4} (\alpha + \beta \cos \omega t) T(t) = 0. \quad (10)$$

Постоянные разделения α и β должны быть определены так, чтобы функция $\Theta(\vartheta)$ действительно не зависела от t .

Займемся их определением. Так как рассматривается замкнутое кольцо, то перемещение u должно быть периодической функцией с периодом 2π относительно угла ϑ . Это позволяет представить $\Theta(\vartheta)$ в виде ряда Фурье:

$$\Theta(\vartheta) = \sum_{n=0}^{\infty} A_n \sin(n\vartheta + \varphi_n), \quad (11)$$

где n — числа натурального ряда.

Подставляя (11) в уравнение (9), приходим к соотношению:

$$n^6 - \left(2 + \frac{a^3 \sigma_0}{B} \cos \omega t \right) n^4 + \left(1 + \alpha + \frac{a^3 \sigma_0}{B} \cos \omega t + \beta \cos \omega t \right) n^2 + \alpha + \beta \cos \omega t = 0. \quad (12)$$

В этом выражении коэффициент при $\cos \omega t$ нужно приравнять нулю, так как только при этом $\Theta(\vartheta)$ не зависит от t .

Тогда уравнение (8) разбивается на два, из которых и определяются постоянные разделения α и β :

$$\alpha = -\frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}, \quad (13)$$

$$\beta = -\frac{\sigma_0 a^3}{B} \frac{n^2(1-n^2)}{1+n^2} = \alpha \frac{\sigma_0 a^3}{B(1-n^2)}. \quad (14)$$

Подставляя (13) и (14) в уравнение (10), имеем:

$$\frac{d^2 T(t)}{dt^2} + \frac{B}{\rho a^4} \frac{n^2(1-n^2)^2}{1+n^2} \left[1 + \frac{\sigma_0 a^3}{B(1-n^2)} \cos \omega t \right] T(t) = 0,$$

или

$$T''(t) + p_n^2 (1 - \xi_n \cos \omega t) T(t) = 0, \quad (15)$$

где

$$p_n^2 = \frac{B}{\rho a^4} \frac{n^2(n^2-1)^2}{n^2+1}$$

есть n -ая собственная частота свободных плоских колебаний кольца,

$$\xi_n = \frac{\sigma_0 a^3}{B(n^2-1)} = \frac{\sigma_0}{\sigma_{n \text{ кр}}}$$

($\sigma_{n \text{ кр}}$ — статическая критическая нагрузка n -го порядка).

Прежде чем исследовать дальше свойства движения первого рода, выполним вычисления, аналогичные произведенным и для уравнений (6) (пространственная форма движения).

Пренебрегая инерцией вращения и исключая v из системы (6), приходим к уравнению:

$$\begin{aligned} \frac{\partial^6 \gamma}{\partial \vartheta^6} + \left(2 + \frac{\sigma_0 a^3}{A} \cos \omega t \right) \frac{\partial^4 \gamma}{\partial \vartheta^4} + \left(1 + \frac{\sigma_0 a^3}{A} \cos \omega t \right) \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2} - \\ - \frac{\rho a^4}{A} \frac{\partial^2}{\partial t^2} \left(\frac{A}{C} \gamma - \frac{\partial^2 \gamma}{\partial \vartheta^2} \right) = 0. \end{aligned}$$

Совершенно аналогично предыдущим вычислениям ищем $\gamma(\vartheta, t)$ в виде:

$$\gamma(\vartheta, t) = \Gamma(\vartheta) T_1(t).$$

Для того чтобы $\Gamma(\vartheta)$ не зависело от t , необходимо ввести опять две постоянные разделения α и β , определение которых производится так же, как и в предыдущем случае, при этом мы пользуемся периодичностью функции $\gamma(\vartheta, t)$. Имеем:

$$\alpha = -\frac{n^2(n^2-1)^2 AC}{\rho a^4 (A+n^2 C)} = -\nu_n^2,$$

$$\beta = \frac{\sigma_0}{\rho a} \frac{n^2(n^2-1) C}{A+n^2 C} = \frac{\sigma_0}{\tau_{n \text{ кр}}} \nu_n^2 = \tau_n \nu_n^2,$$

где ν_n есть n -ая собственная частота пространственной формы колебаний кольца, $\tau_{n \text{ кр}}$ — статическая критическая нагрузка n -го порядка.

Тогда уравнение, определяющее $T_1(t)$, принимает вид:

$$T_1''(t) + \nu_n^2 (1 - \tau_n \cos \omega t) T_1(t) = 0. \quad (16)$$

§ 3. Исследование характера движения

Оба вышерассмотренных случая движения кольца привели к формально тождественным дифференциальным уравнениям, определяющим функции $T(t)$ и $T_1(t)$. Коэффициенты каждого из этих уравнений определенным, одинаковым в обоих случаях, образом выражаются через соответствующие статические критические нагрузки и частоты свободных колебаний. Интересно отметить, что к уравнению типа (15) с составленными по тому же закону коэффициентами приводит решенная проф. Н. М. Беляевым задача о динамической устойчивости прямолинейного стержня. Это позволяет предполагать, что и для обширного класса упругих систем исследование динамической устойчивости приводит к уравнениям типа (15).

Уравнение (15) является хорошо изученным в математической физике уравнением Матье (Mathieu), общий интеграл которого, как известно, имеет вид [5]:

$$T(t) = Ae^{\mu t} \varphi(t) + Be^{-\mu t} \varphi(-t),$$

где $\varphi(t)$ — периодическая функция, имеющая период 2π .

При произвольных начальных условиях движение нашей системы будет носить устойчивый характер в случае, если μ является чисто мнимым числом (только при этом функция $T(t)$ ограничена). В математической физике существует ряд методов, позволяющих находить постоянную μ и функцию $\varphi(t)$ по заданным значениям коэффициентов p_n и ξ_n уравнения Матье.

Не останавливаясь на имеющемся в литературе изложении этих методов, мы прямо приведем приближенные значения границ первой области неустойчивости, данные Рэлеем (Rayleigh) [6]:

$$\sqrt{1 + \xi_n/2} \geq 2p_n/\omega \geq \sqrt{1 - \xi_n/2}. \tag{17}$$

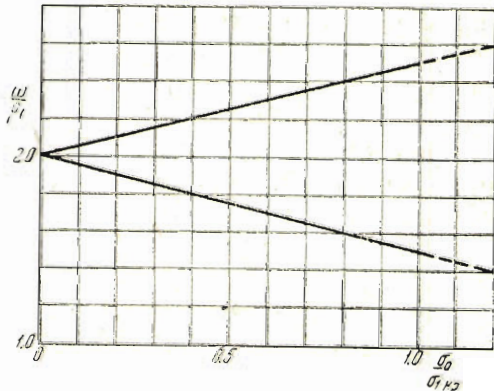
Из формулы (17) следует, что с точностью до ξ_n^2 границы области неустойчивости даются соотношением:

$$2 + \xi_n/2 \geq \omega/p_n \geq 2 - \xi_n/2,$$

т.е. в первом приближении область неустойчивости ограничена прямыми (фиг. 1).

Заметим, что близкие к этим результаты получил проф. Н. М. Беляев, применивший для нахождения разграничивающих области устойчивости и неустойчивости кривых метод Хилла (Hill).

К сожалению, нельзя применить для той же цели таблицы, составленные Айнсом (Ince), ввиду чересчур больших интервалов аргумента в интересующей нас области.



Фиг. 1

В заключение укажем, что все сказанное относится только к случаю, когда значения $\frac{\sigma_0}{\sigma_{1\text{кр}}}$ не превосходят единицы, ибо в противном случае даже при $\omega=0$ (статическая нагрузка) характер явления значительно усложняется и его действительное рассмотрение возможно только на основе нелинеаризованных уравнений задачи.

Поступила в редакцию 29 VI 1940.

ЛИТЕРАТУРА

1. Беляев Н. М. Устойчивость призматических стержней. Статья в сб. „Инженерные сооружения и строительная механика“. 1924. [Стр. 149].
2. Боднер Б. А. Устойчивость пластин под действием продольных периодических сил. „Прикладная математика и механика“. Новая серия. Т. 2. № 1. [Стр. 87].
3. Ляв. Математическая теория упругости. ОНТИ. 1935. [Стр. 404].
4. Тумаркин С. А. Равновесие и колебания закрученных стержней. „Труды ЦАГИ“. 1937. № 341.
5. Уиттекер и Ватсон. Курс современного анализа. ГТТИ. 1933. Ч. 2. [Стр. 239].
6. Стретт. Функции Ламе и Матье. ГНТИУ. 1935. [Стр. 159].

DIE DYNAMISCHE STABILITÄT EINES RINGES UNTER DER WIRKUNG DER NORMALEN PERIODISCHEN BELASTUNG

G. J. DSCHANELIDSE und M. A. RADZIG

(Zusammenfassung)

Der vorliegende Artikel befasst sich mit der Frage der Stabilität eines kreisförmigen Stabes, der sich unter der Wirkung der periodischen normalen gleichmäßig verteilten Belastung

$$\sigma = \sigma_0 \cos \omega t$$

befindet.

Die Untersuchung der Stabilitätsbedingungen der Bewegung, die von dieser Belastung hervorgerufen wurde, wird durch die Analyse einer Gleichung der Mathieschen Form

$$T''(t) + p_n^2 \left(1 - \frac{\sigma_0}{\sigma_{n\text{кр}}} \cos \omega t \right) T(t) = 0$$

angegeben. In dieser Gleichung bezeichnet $\sigma_{n\text{кр}}$ die statische kritische Belastung n -ter Ordnung, p_n — die n -te Eigenfrequenz des Ringes.