

## ИЗГИБ БЕСКОНЕЧНОЙ ЦИЛИНДРИЧЕСКОЙ ОБОЛОЧКИ

Ю. В. КОНОВАЛОВ

(Москва)

Работа посвящена приближенному решению задачи об изгибе и устойчивости при изгибе бесконечно длинного тонкостенного круглого цилиндра с неизменяемым по длине контуром поперечного сечения. Мы показываем, что, если исходить из приближенных выражений, характеризующих упругое состояние системы, и ограничиться рассмотрением задачи „в малом“ так, как решал эту задачу ряд исследователей, например, Брэжор<sup>[1]</sup>, Хек<sup>[2]</sup> и др., можно получить достаточно строгое математическое решение непосредственно из дифференциального уравнения Эйлера вариационной проблемы, без применения метода Ритца.

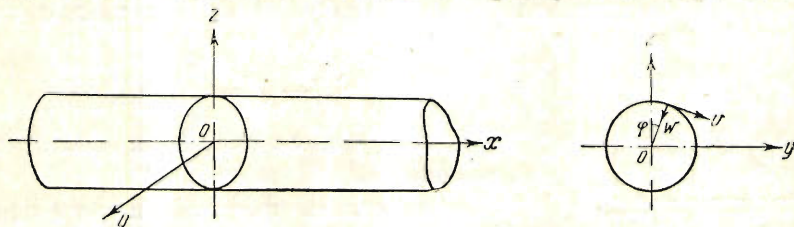
§ 1. Рассмотрим чистый изгиб бесконечно длинной тонкостенной круглой трубы. Попытаемся установить связь между искривлением нейтральной оси вследствие деформации от нагрузки и величиной действующего изгибающего момента. Будем решать поставленную задачу приближенно, записав потенциальную энергию деформированного состояния оболочки в виде:

$$U = \frac{1}{2} \frac{D}{a} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{dw}{d\varphi} \right)^2 d\varphi + \frac{1}{2} B a \int_0^{2\pi} \left( \frac{dw}{d\varphi} - w \right)^2 d\varphi + \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI}, \quad (1)$$

где

$$D = \frac{Eh^3}{12(1-\sigma^2)}, \quad B = \frac{Eh}{1-\sigma^2}$$

соответственно, цилиндрическая жесткость оболочки на изгиб и жесткость при растяжении,  $h$  — толщина стенки,  $a$  — радиус цилиндра по средней



Фиг. 1

поверхности,  $M$  — действующий изгибающий момент,  $v$  и  $w$  — безразмерные, отнесенные к радиусу цилиндра перемещения (фиг. 1) в направлении кас-

тельной и нормали к контуру поперечного сечения цилиндра (причем положительные, когда  $v$  направлено в сторону возрастания угла  $\varphi$ , а  $w$  — по внутренней нормали),  $I$  — момент инерции искаженного сечения относительно новой нейтральной линии.

Таким образом при написании выражения (1) мы учли потенциальную энергию изгиба и растяжения, накопленную за счет искажения поперечного сечения, и потенциальную энергию за счет искривления нейтральной оси цилиндра; последняя подсчитана элементарным способом; поперечным сжатием Пуассона мы пренебрегли. Все остальные допущения и упрощения видны и без дополнительных пояснений из выражения (1).

Согласно принципу возможных перемещений для системы, находящейся в равновесии под действием внешних сил, должно выполняться условие:

$$\delta(U - A_M) = 0$$

( $\delta A_M$  — элементарная работа момента на возможном перемещении), или для нашей задачи:

$$\delta \left\{ \frac{1}{2} \frac{D}{a} \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^2 w}{d\varphi^2} + \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi + \frac{1}{2} B a \int_0^{2\pi} \left( \frac{dv}{d\varphi} - w \right)^2 d\varphi - \frac{1}{2} \frac{M^2}{EI'} \right\} = 0. \quad (2)$$

Произведя операцию варьирования и некоторые упрощения, придем к системе обыкновенных дифференциальных уравнений с граничными условиями для перемещений  $v$ ,  $w$ .

Ограничимся рассмотрением случая, когда деформация поперечного сечения оболочки не сопровождается удлинением средней линии сечения. Функции  $w(\varphi)$  и  $v(\varphi)$  связаны тогда соотношением

$$w(\varphi) = \frac{dv(\varphi)}{d\varphi}$$

с точностью до малых второго порядка, считая  $v$ ,  $w$  и их производные малыми.

Введя обозначения:

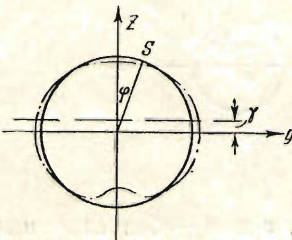
$$Q = \frac{M^2 a}{EI_0 D}, \quad L = \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi, \quad \omega = \frac{I_0}{I'}$$

где  $I_0$  — момент инерции недеформированного сечения цилиндра, перепишем условие (2) так:

$$\delta L - Q \delta \omega = 0. \quad (2')$$

Займемся вычислением величины  $I'$ , входящей в выражение  $\omega$ .

Под действием нагрузки контур поперечного сечения оболочки будет некоторым образом деформирован в контур, симметричный относительно оси  $z$  (фиг. 2). Координаты точки  $s$ , лежащей на деформированном контуре, будут:



Фиг. 2

$$y = \left(1 - \frac{dv}{d\varphi}\right) \sin \varphi + v \cos \varphi, \quad z = \left(1 - \frac{dv}{d\varphi}\right) \cos \varphi - v \sin \varphi \quad (3)$$

( $y, z$  — безразмерные координаты:  $y = Y/a, z = Z/a$ ).

Положение нейтральной линии после деформации определится следующим образом. Так как деформация, по предположению, не сопровождается удлинением контура сечения, то элемент дуги контура и площадь поперечного сечения оболочки (сжатием Пуассона пренебрегаем) останутся при деформации неизменными, поэтому перемещение  $\gamma$  нейтральной оси определится из уравнения:

$$\begin{aligned} \gamma &= \frac{1}{2\pi ah} \int_0^{2\pi} z a^2 h d\varphi = \frac{a}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \left(1 - \frac{dv}{d\varphi}\right) \cos \varphi - v \sin \varphi \right] d\varphi = \\ &= -\frac{a}{2\pi} \left\{ \int_0^{2\pi} \frac{dv}{d\varphi} \cos \varphi d\varphi + \int_0^{2\pi} v \sin \varphi d\varphi \right\} = -\frac{a}{2\pi} \left\{ v \cos \varphi \Big|_0^{2\pi} + 2 \int_0^{2\pi} v s \right\}. \end{aligned}$$

Контур после деформации должен остаться замкнутым; откуда

$$v(0) = v(2\pi),$$

и имеем:

$$\gamma = -\frac{a}{\pi} \int_0^{2\pi} v \sin \varphi d\varphi, \quad \text{или} \quad \gamma = -\frac{a}{\pi} \varepsilon, \quad (4)$$

где

$$\varepsilon = \int_0^{2\pi} v \sin \varphi d\varphi.$$

Формулы (4) являются справедливыми для всех контуров, остающихся после деформации замкнутыми.

Подсчитаем теперь момент инерции искаженного сечения цилиндра. Приняв во внимание, что  $v(0) = v(2\pi)$ , найдем:

$$\begin{aligned} I &= ha^3 \int_0^{2\pi} z^2 d\varphi - \frac{2}{\pi^2} I_0 \varepsilon^2 = \\ &= I_0 \left\{ 1 - \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} v \sin 2\varphi d\varphi - \frac{2}{\pi^2} \varepsilon^2 + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} v^2 \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ v^2 - \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 \right] \cos^2 \varphi d\varphi \right\}, \end{aligned}$$

или, обозначив краткости ради

$$\Delta I = \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} v \sin 2\varphi d\varphi, \quad \Delta^2 I = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} v^2 \sin^2 \varphi d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ v^2 - \left(\frac{dv}{d\varphi}\right)^2 \right] \cos^2 \varphi d\varphi,$$

будем иметь:

$$I = I_0 \left( 1 - \Delta I + \Delta^2 I - \frac{2}{\pi^2} \varepsilon^2 \right) = I_0 (1 - \overline{\Delta I}) \quad (5)$$

и выражение для  $\omega$

$$\omega = \frac{I_0}{I} = \frac{1}{1 - \Delta I}. \quad (6)$$

Вычисляя выражения  $\delta L$  и  $\delta\omega$ , найдем:

$$\begin{aligned} \delta L = 2 \left\{ \left( \frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) \delta \left( \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right) - \left( \frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2\varphi}{d\varphi^2} \right) \delta \left( \frac{dv}{d\varphi} \right) + \left( \frac{d^5v}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) \delta v \right\} \Big|_0^{2\pi} - \\ - 2 \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^6v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right) \delta v \, d\varphi, \\ \delta\omega = \frac{\delta \Delta I}{(1 - \Delta I)^2} = \frac{1}{(1 - \Delta I)^2} \left\{ - \frac{2}{\pi} \frac{dv}{d\varphi} \cos^2 \varphi \delta v \Big|_0^{2\pi} + \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ \frac{3}{2} \sin 2\varphi + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{2}{\pi} \varepsilon \sin \varphi - (2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) v - \frac{dv}{d\varphi} \sin 2\varphi + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \cos^2 \varphi \right] \delta v \, d\varphi \right\}. \end{aligned}$$

Таким образом условие (2') приводит нас к дифференциальному уравнению относительно перемещения  $v(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} \frac{d^6v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4v}{d\varphi^4} + (1 + 24\beta \cos^2 \varphi) \frac{d^2v}{d\varphi^2} - 24\beta \sin 2\varphi \frac{dv}{d\varphi} - 24\beta (2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) v = \\ = -\beta \left( 36 \sin 2\varphi + \frac{48}{\pi} \varepsilon \sin \varphi \right) \end{aligned} \quad (7)$$

с граничными условиями на контуре:

$$\begin{aligned} \left( \frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right) \delta \left( \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right) - \left( \frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right) \delta \left( \frac{dv}{d\varphi} \right) + \\ + \left[ \frac{d^5v}{d\varphi^5} + 2 \frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} (1 - 24\beta \cos^2 \varphi) \right] \delta v \Big|_0^{2\pi} = 0, \end{aligned} \quad (7a)$$

где

$$\beta = \frac{1}{24\pi} \frac{Q}{(1 - \Delta I)^2}.$$

Нетрудно заметить, что дифференциальное уравнение (7), к интегрированию которого сводится задача об изгибе бесконечно длинного тонкостенного круглого цилиндра, легко вывести из теории изгиба тонких криволинейных стержней. Мы приводим этот вывод с целью глубже уяснить себе физическую сторону вопроса и те предпосылки, на которых основывается уравнение (7).

Как известно из теории изгиба (без удлинения упругой оси) тонкого (толщина стенки предполагается малой величиной по отношению к радиусу) круглого кольца, нагруженного распределенными силами  $Z(\varphi)$ ,  $X(\varphi)$  в направлениях касательной и нормали, компонента смещения  $v$  удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$\frac{D}{a^2} \left( \frac{d^6v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} \right) = a \left( \frac{dX}{d\varphi} - Z \right), \quad (8)$$

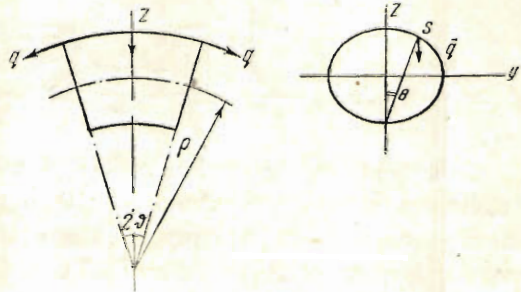
выведенному в предположении малых деформаций кольца. При чистом изгибе бесконечно длинного цилиндра любые нормальные сечения находятся в одинаковых условиях и претерпевают одну и ту же деформацию. Отсюда достаточно будет рассмотреть цилиндр, длиной равный единице, вырезанный из данного цилиндра, т. е. тонкое кольцо, к которому применимо уравнение (8). В последнем неизвестными являются компоненты изгибающей силы  $X(\varphi)$  и  $Z(\varphi)$ , — займемся их определением.

Нормальное напряжение при изгибе цилиндра:

$$\sigma_b = \frac{aM}{I} \left( z + \frac{\varepsilon}{\pi} \right),$$

где  $I$ , как было ранее, — момент инерции искаженного сечения цилиндра;  $z + \varepsilon/\pi$  — расстояние точки  $s$  (фиг. 3) до нейтральной линии этого сечения.

Силы, рассчитанные на единицу длины дуги контура, действующие в направлении касательной к искривленной образующей,  $q = h\sigma_b$ , дадут равнодействующую, направленную по радиусу кривизны  $\rho$  деформированной образующей:



Фиг. 3

$$\bar{q} = 2q \sin \delta \approx 2q\delta = q \frac{1}{\rho} = q\kappa,$$

считая деформации малыми и, следовательно, радиус кривизны нейтральной оси цилиндра весьма большим сравнительно с радиусом сечения  $a$ . Проектируя, наконец, вектор силы  $\bar{q}$  на касательную и нормаль к контуру сечения, получим искомые компоненты  $Z(\varphi)$  и  $X(\varphi)$ :

$$\begin{aligned} Z(\varphi) &= \bar{q} \sin \theta = \frac{haM}{I} \kappa \left( z + \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \sin \theta, \\ X(\varphi) &= \bar{q} \cos \theta = \frac{haM}{I} \kappa \left( z + \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \cos \theta. \end{aligned} \tag{9}$$

Преобразуем постоянный множитель в выражениях для  $X$ ,  $Z$ . Так как кривизна нейтральной оси цилиндра

$$\kappa = \frac{M}{EI},$$

то

$$h \frac{aM}{I} \kappa = \frac{haM^2}{EI^2} = \frac{haM^2}{EI_0^2 (1 - \Delta I)^2} = \frac{M^2}{\pi a^2 EI_0 (1 - \Delta I)^2} = \frac{D}{\pi a^3} \frac{Q}{(1 - \Delta I)^2} = 24 \frac{D}{a^3} \beta,$$

и выражения (9) можно переписать в окончательном виде:

$$X = \frac{D}{a^3} 24\beta \left( z + \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \cos \theta, \quad Z = \frac{D}{a^3} 24\beta \left( z + \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \sin \theta. \tag{9'}$$

Подставляя значения (9') компонентов нагрузки  $X, Z$  в дифференциальное уравнение (8), получим после очевидных упрощений:

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} = 24\beta \left\{ \frac{d}{d\varphi} \left[ \left( z + \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \cos \theta \right] - \left( z + \frac{\varepsilon}{\pi} \right) \sin \theta \right\} = 24\beta P(\varphi), \quad (10)$$

причем, так как силами  $X(\varphi), Z(\varphi)$  мы должны загрузить первоначальный контур сечения, то в уравнении (10) нужно заменить  $\theta$  (угол нормали с осью  $z$ ) на  $\varphi$ . Вычисляя функцию  $P(\varphi)$ , стоящую в правой части уравнения (10), найдем:

$$\begin{aligned} P(\varphi) &= \frac{d}{d\varphi} \left\{ \left[ \left( 1 - \frac{dv}{d\varphi} \right) \cos \varphi - v \sin \varphi + \frac{\varepsilon}{\pi} \right] \cos \varphi \right\} - \\ &\quad - \left[ \left( 1 - \frac{dv}{d\varphi} \right) \cos \varphi - v \sin \varphi + \frac{\varepsilon}{\pi} \right] \sin \varphi = \\ &= -\frac{3}{2} \sin 2\varphi - \frac{2}{\pi} \varepsilon \sin \varphi - \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \cos^2 \varphi + \frac{dv}{d\varphi} \sin 2\varphi + v(2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi). \end{aligned}$$

Полученное выражение для  $P(\varphi)$  показывает, что, действительно, после подстановки его в уравнение (10) и перенесения членов с  $v$  из правой части в левую мы придем к ранее выведенному из других соображений дифференциальному уравнению (7).

Решив дифференциальное уравнение (7) при соответствующих граничных условиях, по формулам (4), (6) подсчитаем  $\varepsilon$  и  $\overline{\Delta I}$ , а затем из уравнения  $Q = 24\beta(1 - \overline{\Delta I})^2$  сможем установить связь между изгибающим моментом  $M$  и значением  $\beta$ .

Прежде чем приступить к непосредственному решению задачи в конкретном случае, расшифруем смысл параметра  $\beta$ . Так как

$$\beta = \frac{1}{24\pi} \frac{Q}{(1 - \overline{\Delta I})^2} = \frac{1}{24\pi} \frac{M^2 a}{EI_0 D} \frac{1}{(1 - \overline{\Delta I})^2} = \frac{1}{24\pi} \frac{EI_0 a}{D} \kappa^2,$$

то

$$\beta = \frac{1}{2} (1 - \sigma^2) \left( \frac{a^2}{h} \right)^2 \kappa^2, \quad (11)$$

т. е. параметр  $\beta$  пропорционален квадрату кривизны нейтральной оси цилиндра и, следовательно, при изгибе, сопровождаемом малыми деформациями, — величина малая, того же порядка малости, как и деформация; это впрочем, видно из дифференциального уравнения (7), так как в результате решения компонента смещения  $v$  окажется пропорциональной  $\beta$ .

§ 2. Естественно напрашивается мысль построить решение уравнения (7) в виде разложения по степеням параметра  $k = 12\beta$ :

$$v(\varphi) = v_0(\varphi) + kv_1(\varphi) + k^2 v_2(\varphi) + \dots, \quad (12)$$

так как члены с переменными коэффициентами в дифференциальном уравнении (7) вносят в решение большие трудности и получить решение в замкнутом виде с помощью известных функций вряд ли представляется воз-

возможным. Перепишем дифференциальное уравнение (7), выделяя члены с параметром  $k$ :

$$\frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + kR(v) = f(\varphi),$$

где

$$\begin{aligned} R(v) &= 2 \left[ \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \cos^2 \varphi - \frac{dv}{d\varphi} \sin 2\varphi - v(2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) \right] = \\ &= (1 + \cos 2\varphi) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} - 2 \sin 2\varphi \frac{dv}{d\varphi} - (1 - 3 \cos 2\varphi) v, \\ f(\varphi) &= -36\beta \sin 2\varphi - \frac{48}{\pi} \beta \varepsilon \sin \varphi. \end{aligned} \tag{13}$$

Подставим (12) в уравнение (13) и, собирая члены с одинаковыми степенями  $k$ , приравняем получившиеся множители при степенях  $k$  нулю. В результате придем к бесконечной системе линейных дифференциальных уравнений шестого порядка с постоянными коэффициентами:

$$\begin{aligned} \frac{d^6 v_0}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v_0}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v_0}{d\varphi^2} &= f(\varphi), \\ \frac{d^6 v_i}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v_i}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v_i}{d\varphi^2} &= -R(v_{i-1}) \quad (i = 1, 2, 3, \dots); \end{aligned} \tag{14}$$

причем функции  $v_i$  ( $i = 0, 1, 2, \dots$ ) подчиним условиям на контуре.

Разумеется, разложение (12) может оказаться не всегда возможным, но по крайней мере для достаточно малых значений  $k$  можно ожидать равномерную сходимость ряда (12) в области изменения независимого переменного  $\varphi$  ( $0 \leq \varphi \leq 2\pi$ ) и, следовательно, построить решение дифференциального уравнения указанным образом. Решив систему (13) и формально записав решение в виде (12), нетрудно будет установить правильность найденного решения, проверив сходимость выражения (12).

Интегрируя первое уравнение системы (14):

$$\frac{d^6 v_0}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v_0}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v_0}{d\varphi^2} = -\beta \left( 36 \sin 2\varphi + \frac{48}{\pi} \varepsilon \sin \varphi \right),$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} v_0(\varphi) &= (A_0 + B_0 \varphi) \cos \varphi + (C_0 + D_0 \varphi) \sin \varphi + E_0 \varphi + F_0 + \\ &+ \beta \left( \sin 2\varphi - \frac{6}{\pi} \varepsilon \varphi^2 \sin \varphi \right). \end{aligned} \tag{15}$$

Общий интеграл (15) зависит от шести произвольных постоянных. Прежде всего распорядимся выбором произвольных постоянных таким образом, чтобы функция  $v_0(\varphi)$  удовлетворяла условиям замкнутости упругой линии поперечного сечения:

$$v(0) = v(2\pi), \quad \left. \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=2\pi}, \quad \left. \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{d^3 v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=2\pi}. \tag{a}$$

Используя для определения части постоянных два первых условия, получим выражение для  $v_0(\varphi)$ :

$$v_0(\varphi) = A_0 \cos \varphi + C_0 \sin \varphi + F_0 - B_0 \varphi (1 - \cos \varphi) + \\ + \frac{12}{\pi} \beta \varepsilon \left( \pi \varphi - \frac{1}{2} \varphi^2 \right) \sin \varphi + \beta \sin 2\varphi; \quad (15')$$

последнее из условий (а) (равенство изгибающих моментов в точках  $\varphi = 0$ ,  $\varphi = 2\pi$ ) выполняется автоматически при удовлетворении первых двух. Легко видеть, что первые три члена выражения  $v_0(\varphi)$  характеризуют лишь параллельный перенос (члены с  $A_0$ ,  $C_0$ ) и поворот относительно центра (постоянная  $F_0$ ) начального, недеформированного сечения, а не его искажение. В этом смысле постоянные  $A_0$ ,  $C_0$ ,  $F_0$  можно считать несущественными; существенным членом, таким образом, оказывается только один — член с постоянной  $B_0$ . Мы видим, что произвольных постоянных недостаточно, чтобы удовлетворить все возможные случаи условий на контуре, и решить таким методом можно весьма ограниченное число задач. Например, мы не можем решить задачу об изгибе цилиндра с двумя шарнирами вдоль образующих. Условия на контуре удовлетворяются в двух случаях: 1) контур сечения цилиндра замкнут и без разрезов; 2) контур сечения имеет один шарнир.

Покажем, к каким результатам приводит изложенный метод для первого случая — замкнутой неразрезанной оболочки, наиболее интересного в практическом смысле и поддающегося наиболее простому решению.

На функцию  $v(\varphi)$  нужно наложить условие непрерывности ее второй производной (иначе на контуре были бы угловые точки, что невозможно):

$$\frac{d^2v}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=0} = \frac{d^2v}{d\varphi^2} \Big|_{\varphi=2\pi}$$

и условия симметрии

$$v(\varphi) = -v(2\pi - \varphi), \quad \frac{dv(\varphi)}{d\varphi} = \frac{dv(2\pi - \varphi)}{d\varphi}. \quad (b)$$

При этом, в силу (4), получим  $\varepsilon = 0$  и, подчиняя функцию  $v_0(\varphi)$  (15') соотношениям (b), найдем:

$$v_0(\varphi) = \beta \sin 2\varphi$$

(условие (7а), понятно, удовлетворяется).

Отсюда ясно, что интеграл дифференциального уравнения (13), удовлетворяющий граничным условиям, может быть разложен на функции вида  $A_i \sin 2i\varphi$ . Поэтому, минуя решение системы (14), можно искать решение уравнения (13) в форме:

$$v(\varphi) = \sum_{i=1}^{\infty} A_i(k) \sin 2i\varphi. \quad (16)$$

Подстановка в дифференциальное уравнение (13) дает:



$$\sum_{i=1}^{\infty} \left\{ [4i^2(4i^2 - 1)^2 + k(4i^2 + 1)] A_i + k \left( 2i^2 + 2i - \frac{3}{2} \right) A_{i+1} \right\} \sin 2i\varphi +$$

$$+ \sum_{i=2}^{\infty} k \left( 2i^2 - 2i - \frac{3}{2} \right) A_{i-1} \sin 2i\varphi = 3k \sin 2\varphi,$$

откуда получается бесконечная система линейных уравнений относительно коэффициентов  $A_i$ :

$$(36 + 5k) A_1 - \frac{5}{2} k A_2 = 3k,$$

$$\left( 2i^2 - 2i - \frac{3}{2} \right) A_{i-1} + [4i^2(4i^2 - 1)^2 + k(4i^2 + 1)] A_i +$$

$$+ k \left( 2i^2 + 2i - \frac{3}{2} \right) A_{i+1} = 0 \quad (i = 2, 3, 4, \dots) \tag{17}$$

Обозначив

$$a_i = k \left( 2i^2 - 2i - \frac{3}{2} \right), \quad b_i = 4i^2(4i^2 - 1)^2 + k(4i^2 + 1),$$

запишем соотношение (17) так:

$$a_i A_{i-1} + b_i A_i + a_{i+1} A_{i+1} = 0. \quad (i = 2, 3, 4) \tag{18}$$

Разделим уравнение (18) на  $b_i A_i$  и положим  $A_{i+1}/A_i = N_i$ , тогда

$$\frac{a_i}{b_i} \frac{1}{N_{i-1}} + 1 + \frac{a_{i+1}}{b_i} N_i = 0;$$

откуда, решая относительно  $N_{i-1}$ , получим рекуррентную формулу:

$$N_{i-1} = - \frac{a_i}{b_i} \frac{1}{1 + \frac{a_{i+1}}{b_i} N_i} \quad (i = 2, 3, 4, \dots) \tag{19}$$

Определяя последовательно  $N_1, N_2, N_3, \dots$ , найдем, что коэффициенты  $N_i$  выражаются через бесконечные непрерывные дроби:

$$N_1 = - \frac{a_2}{b_2} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_2}{1 - \frac{\lambda_3}{1 - \dots}}}} = - \mu_2 \frac{a_2}{b_2},$$

$$N_2 = - \frac{a_3}{b_3} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_3}{1 - \frac{\lambda_4}{1 - \dots}}}} = - \mu_3 \frac{a_3}{b_3},$$

. . . . .

$$N_{i-1} = - \frac{a_i}{b_i} \frac{1}{1 - \frac{\lambda_i}{1 - \frac{\lambda_{i+1}}{1 - \dots}}}} = - \mu_i \frac{a_i}{b_i},$$

в которых

$$\lambda_i = \frac{a_{i+1}^2}{b_i b_{i+1}}.$$

Но нетрудно заметить, что

$$1 > |\lambda_2| > |\lambda_3| > \dots > |\lambda_i| > |\lambda_{i+1}| > \dots$$

при любых значениях  $k > 0$ . Следовательно, если положить:

$$|\lambda_j| = |\lambda_i| \quad (j = i+1, i+2, i+3, \dots),$$

то выражение

$$\Omega = \frac{a_i}{b_i} \frac{1}{1 - \frac{|\lambda_i|}{1 - \frac{|\lambda_i|}{1 - \dots}}} = \frac{a_i}{b_i} \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4|\lambda_i|}}$$

будет представлять собой не что иное, как отношение двух последовательных коэффициентов мажорантного ряда по отношению к ряду (16). Так как

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \Omega = 0,$$

то мажорантный ряд сходится абсолютно. Отсюда и ряд (16) будет также абсолютно сходиться и притом, очевидно, равномерно при любых значениях параметра  $k$  и аргумента  $\varphi$ .

С помощью первого уравнения (17) и выражений (20) определяются коэффициенты  $A_i(k)$  разложения (16). Произведя необходимые вычисления, получим:

$$A_1 = \frac{3k}{b_1} \mu_1, \quad A_i = (-1)^{i+1} A_1 \prod_{j=2}^i \mu_j \frac{a_j}{b_j} \quad (i = 2, 3, 4, \dots). \quad (21)$$

Таким образом частный интеграл дифференциального уравнения (13), решающий задачу о равновесии при изгибе бесконечно длинного тонкостенного цилиндра, записывается теперь окончательно в виде равномерно сходящегося ряда:

$$v(\varphi) = \frac{3k}{b_1} \mu_1 \left\{ \sin 2\varphi + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \prod_{j=2}^i \mu_j \frac{a_j}{b_j} \sin 2i\varphi \right\}. \quad (22)$$

Функции  $A_i(k)$  являются некоторыми трансцендентными функциями параметра  $k$ .

В исследовании нам предстоит воспользоваться тождеством:

$$\sum_{i=1}^{\infty} 4i^2 (4i^2 - 1)^2 A_i^2 = 3k^2 \frac{dA_1}{dk}. \quad (23)$$

Для его доказательства, дифференцируя соотношение (18), связывающее функции  $A_{i-1}$ ,  $A_i$ ,  $A_{i+1}$ , найдем:

$$\begin{aligned} & a_i \frac{dA_{i-1}}{dk} + b_i \frac{dA_i}{dk} + a_{i+1} \frac{dA_{i+1}}{dk} = \\ & = - \left[ \frac{1}{2} (2i+1)(2i-3) A_{i-1} + (4i^2+1) A_i + \frac{1}{2} (2i-1)(2i+3) A_{i+1} \right]. \end{aligned}$$

Умножая правую и левую части полученного равенства на  $k$ , прибавляя и отнимая затем из левой части  $4i^2(4i^2-1)^2 A_i$ , получим:

$$k \left( a_i \frac{dA_{i-1}}{dk} + b_i \frac{dA_i}{dk} + a_{i+1} \frac{dA_{i+1}}{dk} \right) = - (a_i A_{i-1} + b_i A_i + a_{i+1} A_{i+1}) + 4i^2 (4i^2 - 1)^2 A_i = 4i^2 (4i^2 - 1)^2 A_i \quad (i = 2, 3, 4, \dots). \quad (24)$$

Производная от  $A_i$ ,  $\frac{dA_i}{dk}$  вычисляется с помощью формулы (21). Дифференцируя (21), находим:

$$\frac{dA_i}{dk} = A_i \left\{ \frac{1}{A_1} \frac{dA_1}{dk} + \sum_{j=2}^i \left( \frac{1}{\mu_j} \frac{d\mu_j}{dk} - \frac{4j^2 + 1}{b_j} \right) + (i-1) \frac{1}{k} \right\}.$$

Следовательно, можем записать:

$$\begin{aligned} a_i \frac{dA_{i-1}}{dk} &= a_i A_{i-1} \left\{ \frac{1}{A_1} \frac{dA_1}{dk} + \sum_{j=2}^{i-1} \left( \frac{1}{\mu_j} \frac{d\mu_j}{dk} - \frac{4j^2 + 1}{b_j} \right) + (i-2) \frac{1}{k} \right\}, \\ b_i \frac{dA_i}{dk} &= b_i A_i \left\{ \frac{1}{A_1} \frac{dA_1}{dk} + \sum_{j=2}^i \left( \frac{1}{\mu_j} \frac{d\mu_j}{dk} - \frac{4j^2 + 1}{b_j} \right) + (i-1) \frac{1}{k} \right\}, \\ a_{i+1} \frac{dA_{i+1}}{dk} &= a_{i+1} A_{i+1} \left\{ \frac{1}{A_1} \frac{dA_1}{dk} + \sum_{j=2}^{i+1} \left( \frac{1}{\mu_j} \frac{d\mu_j}{dk} - \frac{4j^2 + 1}{b_j} \right) + i \frac{1}{k} \right\}. \end{aligned}$$

Складывая выписанные выражения и пользуясь для упрощения полученного вторым уравнением (17), придем к соотношению:

$$\begin{aligned} k \left( a_i \frac{dA_{i-1}}{dk} + b_i \frac{dA_i}{dk} + a_{i+1} \frac{dA_{i+1}}{dk} \right) &= \\ &= - a_i A_{i-1} + a_{i+1} A_{i+1} - k a_i A_{i-1} \left( \frac{1}{\mu_i} \frac{d\mu_i}{dk} - \frac{4i^2 + 1}{b_i} \right) + \\ &+ k a_{i+1} A_{i+1} \left( \frac{1}{\mu_{i+1}} \frac{d\mu_{i+1}}{dk} - \frac{4(i+1)^2 + 1}{b_{i+1}} \right). \end{aligned}$$

Наконец, умножая на  $A_i$  и суммируя от  $i=2$  до  $\infty$  и принимая во внимание (24), получим:

$$\sum_{i=2}^{\infty} 4i^2 (4i^2 - 1)^2 A_i^2 = - a_2 A_1 A_2 \left\{ 1 + \frac{k}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{dk} - \frac{17k}{b_2} \right\}.$$

Но, как нетрудно в этом убедиться путем дифференцирования первого из соотношений (20):

$$\frac{1}{\mu_2} \frac{d\mu_2}{dk} = \frac{17}{b_2} - \frac{1}{k} + \frac{1}{A_2} \frac{dA_2}{dk} - \frac{1}{A_1} \frac{dA_1}{dk},$$

поэтому можно записать, что

$$\sum_{i=2}^{\infty} 4i^2 (4i^2 - 1)^2 A_i^2 = - k a_2 \left( A_1 \frac{dA_2}{dk} - A_2 \frac{dA_1}{dk} \right).$$

С другой стороны, дифференцирование первого уравнения (17) дает:

$$a_2 \frac{dA_2}{dk} = 3 - 5A_1 - (36 + 5k) \frac{dA_1}{dk} - \frac{5}{2} A_2.$$

Отсюда, подставляя, находим:

$$\sum_{i=2}^{\infty} 4i^2 (4i^2 - 1)^2 A_i^2 = -k \left( 3A_1 - 5A_1^2 - \frac{5}{2} A_1 A_2 - 3k \frac{dA_1}{dk} \right) = 3k^2 \frac{dA_1}{dk} - 36A_1^2,$$

т. е. пришли к тому, что хотели показать.

Перейдем теперь к вычислению приращения момента инерции  $\overline{\Delta I}$ , которое понадобится для определения функции  $Q(k)$ . Вначале выпишем:

$$\overline{\Delta I} = \Delta I - \Delta^2 I,$$

где

$$\Delta I = \frac{3}{\pi} \int_0^{2\pi} v \sin 2\varphi \, d\varphi, \quad \Delta^2 I = \frac{2}{\pi} \int_0^{2\pi} v^2 \sin^2 \varphi \, d\varphi - \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left[ v^2 - \left( \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 \right] \cos^2 \varphi \, d\varphi.$$

Все необходимые вычисления можно было бы произвести с помощью выписанных выражений стр. 37, но мы этого делать не будем, так как некоторые соображения нас приведут к более простому выражению для определения  $\overline{\Delta I}$ .

Умножим уравнение (13) на  $v(\varphi)$  и проинтегрируем полученное выражение в пределах от 0 до  $2\pi$ :

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} - f(\varphi) \right) v \, d\varphi = -k \int_0^{2\pi} R(v) v \, d\varphi.$$

Но

$$\int_0^{2\pi} R(v) v \, d\varphi = - \int_0^{2\pi} \left[ (1 + \cos 2\varphi) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} - 2 \sin 2\varphi \frac{dv}{d\varphi} - (1 - 3 \cos 2\varphi) v \right] v \, d\varphi;$$

отсюда, интегрируя по частям и используя условия на контуре

$$v(0) = v(2\pi), \quad \left. \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=0} = \left. \frac{dv}{d\varphi} \right|_{\varphi=2\pi},$$

найдем:

$$\int_0^{2\pi} R(v) v \, d\varphi = - \int_0^{2\pi} \left[ \left( \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 (1 + \cos 2\varphi) + v^2 (1 - 3 \cos 2\varphi) \right] d\varphi = -2\pi \Delta^2 I.$$

Следовательно,

$$\int_0^{2\pi} \left( \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} - f(\varphi) \right) v \, d\varphi = 2\pi k \Delta^2 I,$$

или, подставив

$$f(\varphi) = -3k \sin 2\varphi,$$

получим:

$$2\pi k \Delta^2 I = \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} + 3k \sin 2\varphi \right) v \, d\varphi.$$

Вычитая последнее выражение из

$$2\pi k \Delta I = 6k \int_0^{2\pi} v \sin 2\varphi \, d\varphi,$$

будем иметь:

$$2\pi k (\Delta I - \Delta^2 I) = 2\pi k \overline{\Delta I} = \int_0^{2\pi} \left[ 3k \sin 2\varphi - \left( \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) \right] v d\varphi,$$

откуда окончательно находим:

$$\overline{\Delta I} = \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \left[ 3k \sin 2\varphi - \left( \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v}{d\varphi^2} \right) \right] v d\varphi. \quad (25)$$

Выведенной формулой (25) воспользуемся для вычисления  $\overline{\Delta I}$ . Подставив (12) в (25), будем иметь:

$$\begin{aligned} \overline{\Delta I} &= \frac{1}{2\pi k} \int_0^{2\pi} \left\{ 3k \sin 2\varphi + \sum_{i=1}^{\infty} 4i^2 (4i^2 - 1)^2 A_i \sin 2i\varphi \right\} \sum_{i=1}^{\infty} A_i \sin 2i\varphi d\varphi = \\ &= \frac{1}{2k} \left[ 3k A_1 + \sum_{i=1}^{\infty} 4i^2 (4i^2 - 1)^2 A_i^2 \right], \end{aligned}$$

или, упрощая с помощью тождества (23), приходим к выражению:

$$\overline{\Delta I} = \frac{3}{2} \frac{d}{dk} (k A_1) = \frac{1}{8} \frac{d}{dk} \left( \frac{k^2}{1 + \frac{5}{36} k} \mu_1 \right). \quad (26)$$

Результатом всех наших вычислений является формула, из которой определяется изгибающий момент  $M$  как функция параметра  $k = 12\beta$ , пропорционального квадрату кривизны нейтральной оси цилиндра:

$$Q = 24\pi\beta (1 - \overline{\Delta I})^2 = 2\pi k \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{d}{dk} (k A_1) \right]^2 = 2\pi k \left[ 1 - \frac{1}{8} \frac{d}{dk} \left( \frac{k^2}{1 + \frac{5}{36} k} \mu_1 \right) \right]^2, \quad (27)$$

где функция  $\mu_1(k)$  выражается в виде бесконечной непрерывной дроби:

$$\mu_1 = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_1}{1 - \frac{\lambda_2}{1 - \dots}}}$$

Прежде чем анализировать результаты, доставляемые формулой (27), проделаем контрольные вычисления, которые должны подтвердить правильность полученного решения. Будем исходить из закона сохранения энергии: работа, произведенная внешними силами (изгибающим моментом) при деформации, равна работе, совершенной внутренними силами (потенциальной энергии). Здесь, как обычно, подразумевается, что тепловая энергия системы остается при деформации неизменной.

Из предыдущего известно, что потенциальная энергия системы

$$U = \frac{1}{2} \frac{D}{a} \left( L + \frac{Q}{1 - \overline{\Delta I}} \right),$$

где

$$L = \int_0^{2\pi} \left( \frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \right)^2 d\varphi,$$

или, принимая во внимание (16), после вычислений получим:

$$L = \int_0^{2\pi} \left( \sum_{i=1}^{\infty} 2i(4i^2 - 1) A_i \sin 2i\varphi \right)^2 d\varphi = \pi \sum_{i=1}^{\infty} 4i^2(4i^2 - 1)^2 A_i^2.$$

Тождество (23) и формула (27) позволяют написать потенциальную энергию в очень простом виде:

$$U = \frac{1}{2} \frac{D}{a} \left\{ 3\pi k^2 \frac{dA_1}{dk} + 2\pi k \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{d}{dk} (kA_1) \right] \right\} = \pi \frac{D}{a} k \left( 1 - \frac{3}{2} A_1 \right). \quad (c)$$

Работа изгибающего момента при деформации подсчитывается по формуле:

$$A_M = \int_0^x M dx_1.$$

Подставив сюда

$$M = \sqrt{\frac{EI_0 D}{a}} Q, \quad x = \sqrt{2\pi \frac{D}{aEI_0}} \sqrt{k},$$

будем иметь:

$$A_M = \pi \frac{D}{a} \int_0^k (1 - \Delta I) dk_1 = \pi \frac{D}{a} \int_0^k \left[ 1 - \frac{3}{2} \frac{d}{dk} (kA_1) \right] dk = \pi \frac{D}{a} k \left( 1 - \frac{3}{2} A_1 \right). \quad (c')$$

Сравнивая выражения потенциальной энергии (c) и работы изгибающего момента (c'), убеждаемся в их тождественности. Отсюда — закон сохранения энергии выполняется, и найденное решение, отвечающее всем условиям поставленной задачи, правильно.

Анализ функции  $Q(k)$  начнем с беглого, впрочем, вполне достаточного в нашем случае рассмотрения вспомогательной функции  $\mu_i(k)$ .

Посмотрим, каково асимптотическое поведение функции  $\mu_i(k)$  при значениях  $i > S$ , где  $S$  — произвольно большое целое положительное число. Функции

$$\mu_i(k) = \frac{1}{1 - \frac{\lambda_i}{1 - \frac{\lambda_{i+1}}{1 - \dots}}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

связанные между собой соотношением

$$\lambda_i \mu_i \mu_{i+1} - \mu_i - 1 = 0, \quad (*)$$

остаются при любом положительном значении параметра  $k$  меньше своих превосходящих функций (или равными им):

$$m_i(k) = \frac{2}{1 - \sqrt{1 - 4\lambda_i}}, \quad \mu_i(k) \leq \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\lambda_i}} \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$

но

$$\lambda_i = \frac{k^2}{4} \frac{(2i-1)^2 (2i+3)^2}{[4i^2 (2i-1)^2 (2i+1)^2 + k(4i^2+1)] [4(i+1)^2 (2i+1)^2 (2i+3)^2 + k(4(i+1)^2+1)]},$$

стало быть при  $k > 0$ , что имеет место в нашей задаче,  $\lim_{i \rightarrow \infty} \lambda_i = 0$ , а отсюда

$$\lim_{i \rightarrow \infty} \mu_i(k) = 1.$$

Кроме того, имеем:

$$1 \leq \mu_i \leq \mu_{i-1} \leq \dots \leq \mu_1 < m_i = \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\lambda_i}}$$

при всех значениях  $i$ . Из дальнейшего будет видно, что значения параметра  $k$  нашей задачи заключены в интервале ( $0 \leq k < 4$ ), причем верхний предел взят сильно преувеличенным. Когда  $k$  пробегает все положительные значения, функция  $\mu_1(k)$  монотонно возрастает. Наименьшее ее значение при  $k=0$  равно 1. Дадим оценку функции  $\mu_1(k)$  при значении  $k=4$ . Вычислив, имеем:

$$\mu_1(4) < \frac{2}{1 + \sqrt{1 - 4\lambda_1(4)}} < 1.0005, \text{ т. е. } \mu_i(k) < 1.0005 \quad (i=1, 2, 3, \dots)$$

при всех значениях  $k$ , заключенных в интервале ( $0 \leq k < 4$ ).

Точно так же легко показать, что  $\frac{d\mu_1}{dk}$  в указанном интервале изменения параметра  $k$  будет весьма близка к нулю. С этой целью напишем производную функции  $\mu_i(k)$ . Дифференцируя соотношение (\*) между двумя последовательными функциями  $\mu_i, \mu_{i+1}$ , находим:

$$\frac{d\mu_i}{dk} = \frac{\mu_{i+1}}{\mu_i^2} \frac{d\lambda_i}{dk} + \lambda_i \frac{1}{\mu_i^2} \frac{d\mu_{i+1}}{dk} = \sum_{j=i}^{\infty} \frac{\mu_{i+1}}{\lambda_j} \frac{d\lambda_j}{dk} \prod_{m=i}^j \frac{\lambda_m}{\mu_m^2}.$$

Производные

$$\frac{d\lambda_j}{dk} = 2k \frac{(2j-1)^2 (2j+3)^2}{b_j b_{j+1}} - \lambda_j \left[ \frac{4j^2+1}{b_j} + \frac{4(j+1)^2+1}{b_{j+1}} \right] \leq \frac{d\lambda_i}{dk} \quad (j > i),$$

а функции

$$\lambda_j \leq \lambda_i$$

для всех значений  $j=i, i+1, i+2, \dots$  и при любом  $k > 0$ . Следовательно, ряд

$$\frac{d\lambda_i}{dk} (1 + \lambda_i + \lambda_i^2 + \lambda_i^3 + \dots) = \frac{1}{1 - \lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dk}$$

является мажорантным по отношению к ряду, которым выражается производная  $\frac{d\mu_i}{dk}$ , и поэтому заключаем, что

$$\frac{d\mu_i}{dk} \leq \frac{1}{1 - \lambda_i} \frac{d\lambda_i}{dk} \quad (i=1, 2, 3, \dots; k > 0),$$

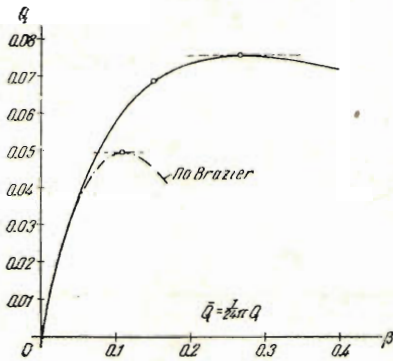
т. е. с возрастанием числа  $i$  производные от функций  $\mu_i$  устремляются очень быстро к нулю. Подсчитывая оценку для производной  $\frac{d\mu_1}{dk}$  при  $k=4$ , находим:

$$\frac{d\mu_1}{dk} \leq \frac{1}{1 - \lambda_1} \frac{d\lambda_1}{dk} < 0.0008$$

(действительно малая величина).

При практических расчетах пользоваться формулой (27) невозможно из-за больших трудностей, вносимых присутствием бесконечной непрерывной дроби. Преодолеть эти трудности нам не удалось, но на основании сделанных оценок функций  $\mu_i$ ,  $\frac{d\mu_i}{dk}$  очевидно, что с очень большой точностью можно принять за функцию  $Q(k)$  ей близкую функцию:

$$Q(k) \approx 2\pi k \left[ 1 - \frac{1}{8} \frac{d}{dk} \left( \frac{k^2}{1 + \frac{5}{36}k} \right) \right]^2 = \frac{2\pi k}{\left(1 + \frac{5}{36}k\right)^4} \left(1 + \frac{1}{36}k + \frac{5}{2592}k^2\right)^2. \quad (27')$$



Фиг. 4

Эту формулу (27') мы примем за решение задачи.

График функции  $Q(k)$  согласно (27') построен на фиг. 4. Функция  $Q(k)$ , как показывает график, имеет максимум при значении  $k_0 = 3.206$ , являющемся наименьшим положительным корнем уравнения:

$$25k_0^3 + 540k_0^2 - 31104k_0 + 93312 = 0,$$

полученного из приравнения производной  $\frac{dQ}{dk}$  нулю. Вычисляя  $Q(k_0)$  по формуле (27'), находим  $Q_{\max} = 1.81\pi$ . Вспоминая, что

$$Q = \frac{M^2 a}{EI_0 D} = \frac{M^2 12(1 - \sigma^2)}{E^2 \pi a^2 h^4},$$

сразу получаем формулу для предельной величины изгибающего момента:

$$M_{\max} = 1,22 \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma^2}} Eah^2. \quad (28)$$

Максимальное (от предельного изгибающего момента) напряжение, ответственное к первоначальному сечению цилиндра, будет определяться по формуле:

$$\sigma_{\max \phi} = 0,388 \frac{11}{\sqrt{1 - \sigma^2}} E \frac{h}{a}. \quad (29)$$

Формула (29) дает фиктивное напряжение, а не действительное, которое будет в оболочке. Чтобы определить фактическое напряжение от изгиба при предельном изгибающем моменте  $M_{\max}$ , необходимо учесть изменение момента сопротивления сечения вследствие его деформации. Вначале определим укорочение радиуса, перпендикулярного нейтральной линии сечения. За функции  $v(\varphi)$ ,  $w(\varphi) = \frac{dv}{d\varphi}$  можно принять, положив в точном выражении для  $v(\varphi)$  (22) и ее производной по переменной  $\varphi$

$$\mu_i = 1, \quad \frac{d\mu_i}{dk} = 0 \quad (i = 1, 2, 3, \dots),$$



следующие выражения:

$$v(\varphi) \approx \frac{3k}{b_1} \left\{ \sin 2\varphi + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} \prod_{j=2}^i \frac{a_j}{b_j} \sin 2i\varphi \right\},$$

$$w(\varphi) \approx \frac{6k}{b_1} \left\{ \cos 2\varphi + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} i \prod_{j=2}^i \frac{a_j}{b_j} \cos 2i\varphi \right\},$$

откуда

$$w(0) = \frac{6k}{b_1} \left\{ 1 + \sum_{i=2}^{\infty} (-1)^{i+1} i \prod_{j=2}^i \frac{a_j}{b_j} \right\} =$$

$$= \frac{1}{6} \frac{k}{1 + \frac{5}{36}k} \left[ 1 - \frac{1}{720} \frac{k}{1 + \frac{5}{36}k} + \frac{1}{2016000} \frac{k^2}{\left(1 + \frac{17}{3600}k\right)\left(1 + \frac{37}{44100}k\right)} - \dots \right].$$

Ряд, представляющий  $w(0)$ , сходится очень быстро, и для практических расчетов вполне достаточно двух первых членов этого ряда. Сделав вычисления для значения  $k_0 = 3.206$ , имеем деформации сечения по взаимно перпендикулярным направлениям:

$$w(0) = w(\pi) = 0.368, \quad w\left(\frac{\pi}{2}\right) = w\left(\frac{3}{2}\pi\right) = -0.368. \quad (30)$$

Для момента инерции искаженного сечения получим:

$$I' = I_0(1 - \Delta I) = \frac{I_0}{\left(1 + \frac{5}{36}k\right)^2} \left(1 + \frac{1}{36}k + \frac{5}{2592}k^2\right);$$

последняя формула при значении  $k_0 = 3.206$  дает:

$$I'(k_0) = 0.531 I_0.$$

Принимая во внимание (30), находим момент сопротивления:

$$W'(k_0) = 0.841 W_0 = 0.841 \pi a^2 h.$$

После всех этих предварительных подсчетов определяется фактическое максимальное напряжение в оболочке при изгибе цилиндра предельным изгибающим моментом:

$$\sigma_{\max} = 0.461 \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma^2}} E \frac{h}{a}. \quad (29)$$

С помощью выражения (11) аналогично найдем максимальное значение кривизны оси цилиндра:

$$\chi_{\max} = 0.731 \frac{1}{\sqrt{1 - \sigma^2}} \frac{h}{a^2}. \quad (31)$$

Для удобства сравнения полученных результатов для предельного случая с аналогичными результатами, полученными Брэзором<sup>[1]</sup> и Хвалла<sup>[2]</sup> иным способом, приведена таблица, из которой видно, что полученные нами результаты ближе всего к соответственным результатам Хвалла. Формулы Брэзора значительно расходятся с нашими формулами.

		По Brazier [1]	По Chwalla [3]	По формулам автора
1	Максимальный изгибающий момент ( $\sigma = 0.3$ )	$M_{\max} = 0.987 \frac{E}{\sqrt{1-\sigma^2}} ah^2$ $M_{\max} = 1.035Eah^2$	$M_{\max} = 1.19Eah^2$	$M_{\max} = 1.22 \frac{E}{\sqrt{1-\sigma^2}} ah^2$ $M_{\max} = 1.279Eah^2$ *
2	Максимальная кривизна осевой линии цилиндра ( $\sigma = 0.3$ )	$\chi_{\max} = 0.494 \frac{h}{a^2}$	$\chi_{\max} = 0.806 \frac{h}{a^2}$	$\chi_{\max} = 0.766 \frac{h}{a^2}$
3	Относительное укорочение перпендикулярного нейтральной линии диаметра	$w_{\max}(0) = 0.222$	$w_{\max}(0) = 0.365$	$w_{\max}(0) = 0.368$
4	Относительное удлинение совпадающего с нейтральной линией диаметра	$w_{\max}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.222$	$w_{\max}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.307$	$w_{\max}\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0.368$
5	Фиктивное максимальное напряжение при максимальном изгибающем моменте ( $\sigma = 0.3$ )	$\sigma_{\max \phi} = 0.329E \frac{h}{a}$	$\sigma_{\max \phi} = 0.379E \frac{h}{a}$	$\sigma_{\max \phi} = 0.407E \frac{h}{a}$ *
6	Действительное максимальное напряжение при максимальном изгибающем моменте ( $\sigma = 0.3$ )	$\sigma_{\max \chi} = 0.385E \frac{h}{a}$	$\sigma_{\max \chi} = 0.523E \frac{h}{a}$	$\sigma_{\max \chi} = 0.484E \frac{h}{a}$

\* Точно такие же формулы получил Хек [2], решая задачу методом Ритца.

Нетрудно показать, что формулы Брэжора вытекают из наших более точных формул как первое приближение к ним. В самом деле, согласно Брэжор в наших обозначениях должно быть:

$$v(\varphi) = \beta \sin 2\varphi, \quad Q = 24\pi\beta(1 - 3\beta)^2. \quad (d)$$

Рассматривая первое из выписанных выражений, замечаем, что функция

$$v(\varphi) = \beta \sin 2\varphi$$

есть решение первого дифференциального уравнения системы (14).

$$\frac{d^6 v_0}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v_0}{d\varphi^4} + \frac{d^2 v_0}{d\varphi^2} = -36\beta \sin 2\varphi,$$

которое, например, выводится из (10), если ввести допущение, что ординаты  $z$  настолько мало деформируются, что их можно принять за старые, т. е.

положить  $z = \cos \varphi$ , иными словами — принять первоначальный контур сечения за деформированный. Точно такое же дифференциальное уравнение получается, если пренебречь в выражении момента инерции искаженного сечения (входящим в потенциальную энергию и работу внешнего момента) всеми членами, зависящими от квадратов перемещений.

Правую часть формулы (27') для  $k < 36/5$  можно представить в виде разложения по степеням  $k$ :

$$Q(k) = 2\pi k \left( 1 - \frac{1}{4}k + \frac{5}{96}k^2 - \frac{25}{2592}k^3 + \frac{125}{8 \times 36^3}k^4 - \dots \right)^2,$$

или, заменив  $k = 12\beta$ ,

$$Q(\beta) = 24\pi\beta \left( 1 - 3\beta + \frac{15}{2}\beta^2 - \frac{50}{3}\beta^3 + \frac{625}{18}\beta^4 - \dots \right)^2,$$

откуда усматриваем, что формула Бржора получается из формулы (27') в результате довольно грубых упрощений. На фиг. 4 построена кривая по второму уравнению (d). Как видно из графика, для малых значений  $k = 12\beta$  приближенное решение является достаточно точным, и им вполне можно пользоваться. Относительно же предельного значения (или значений, близких к предельному) функции  $Q(k)$  можно сказать, что все теории, построенные в предположении малых деформаций при изгибе цилиндра, вообще говоря, не должны давать близкого к истине значения величины  $Q_{\max}$ , так как предположение о малости деформации здесь уже далеко не оправдывается.

В заключение настоящего параграфа приведем приближенное решение, порядка точности уравнений (d), задачи об изгибе бесконечно длинного тонкостенного цилиндра с шарниром вдоль образующей, лежащей в плоскости действия изгибающих пар. Решение задачи сводится к интегрированию приближенного дифференциального уравнения:

$$\frac{d^6v}{d\varphi^6} + 2\frac{d^4v}{d\varphi^4} + \frac{d^2v}{d\varphi^2} = -36\beta \sin 2\varphi - \frac{48}{\pi}\beta\epsilon \sin \varphi$$

при условиях на контуре поперечного сечения:

$$v(2\pi - \varphi) = -v(\varphi), \quad v(0) = v(2\pi) = 0, \quad \frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \Big|_{\varphi=0} = \frac{d^3v}{d\varphi^3} + \frac{dv}{d\varphi} \Big|_{\varphi=2\pi} = 0$$

(другие условия, которые можно было бы здесь написать, удовлетворяются автоматически при соблюдении написанных). Опуская простые вычисления, приводим окончательный результат:

$$v(\varphi) = \beta [-2(\pi - \varphi)(1 - \cos \varphi) + 3 \sin \varphi + \sin 2\varphi],$$

$$Q(\beta) = 24\pi\beta(1 - 5\beta)^2;$$

откуда просто выводятся и все остальные формулы. Приведем только одну из них — формулу для определения предельного изгибающего момента:

$$M_{\max} = \frac{2}{3} \sqrt{\frac{2}{15}} \pi \frac{1}{\sqrt{1-\sigma^2}} Eah^2 \quad \left( \text{при } \beta = \frac{1}{15} \right).$$

Деформация поперечного сечения сопровождается образованием угловой точки в месте расположения шарнира.

Поступила в редакцию 4 IV 1940.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Brazier L. G. The Flexure of Thin Cylindrical Shells and other "Thin Sections". "Aeron. Res. Comm. Rep. and. Mem." London. 1927. (1081). "Proc. Roy. Soc." London. 1927. Ser. AIII. 116. [P. 104—114].
2. Heck. Über die Stabilität orthotroper elliptischer Zylinderschalen bei reiner Biegung. „Luftfahrtforschung“. 1937. Bd. 14.
3. Ch wall a E. Reine Biegung schlanker, dünnwandiger Rohre mit gerader Achse. "Zeitschr. f. angew. Math. u. Mech." 1933. Bd. 13. [S. 48—59].

## FLEXURE OF A THIN-WALL CYLINDRICAL SHELL

J. V. KONOVALOV

(Summary)

The work deals with the approximate solution of the problem of flexure and stability of a circular cylinder of infinite length with an invariable contour.

The author shows that a sufficiently exact solution can be obtained directly from a differential equation of Euler's variation problem without employing Ritz' method, provided the problem is confined to a consideration "in small".

The problem is reduced to the solution of the equation

$$\begin{aligned} \frac{d^6 v}{d\varphi^6} + 2 \frac{d^4 v}{d\varphi^4} + (1 + 2k \cos^2 \varphi) \frac{d^2 v}{d\varphi^2} - 2k \sin 2\varphi \frac{dv}{d\varphi} - 2k (2 \sin^2 \varphi - \cos^2 \varphi) v = \\ = -k \left( 3 \sin 2\varphi + \frac{4}{\pi} \varepsilon \sin \varphi \right) \end{aligned}$$

(where  $k, \varepsilon$  are constants) which solution satisfies the given boundary conditions on the contour of a cross-section of the shell.

For a closed uncut shell the solution obtained is comparatively simple and is carried to completion.

The well-known Brazier<sup>[1]</sup> results in the question under consideration may be obtained from ours, if rough assumptions are made.

Consequently, the Brazier formulae for critical values of bending moments, stresses and deformations differ considerably from the formulae given in this paper.