

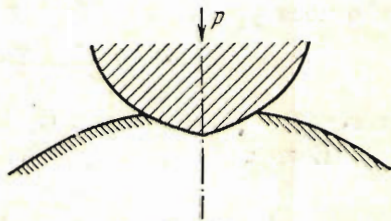
## О ДАВЛЕНИИ ПЛАСТИЧЕСКОЙ СРЕДЫ НА ЖЕСТКИЙ ШТАМП

В. В. СОКОЛОВСКИЙ

(Москва)

При вдавливании жесткого штампа происходит местное смятие среды еще в упругом ее состоянии. При дальнейшем вдавливании вблизи контактной поверхности возникает пластическая зона.

Ниже мы решаем плоскую задачу об определении распределения давления пластической среды на жесткий штамп вдоль линии их контакта (фиг. 1), причем пластические смещения предполагаются достаточно малыми, чтобы они не вызывали значительного изменения формы кривой, ограничивающей свободную поверхность пластической среды.



Фиг. 1

Простейшие задачи в этой постановке уже рассматривались Генки<sup>[1]</sup> и Прандтлем<sup>[2]</sup>.

### § 1. Основные уравнения

Если к уравнениям равновесия добавить условие пластичности Сан-Венана, то получим систему уравнений вида<sup>1</sup>:

$$\frac{\partial \sigma_x}{\partial x} + \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial y} = \gamma, \quad \frac{\partial \tau_{xy}}{\partial x} + \frac{\partial \sigma_y}{\partial y} = 0, \quad \left( \frac{\sigma_x - \sigma_y}{2} \right)^2 + \tau_{xy}^2 = k^2. \quad (1.1)$$

При  $\gamma = 0$  из (1.1) получим уравнения для невесомой пластической среды при  $k = 0$  уравнения гидростатики.

Положив, как обычно,

$$\sigma_x = \gamma x + k(2\sigma + \sin 2\varphi), \quad \sigma_y = \gamma x + k(2\sigma - \sin 2\varphi), \quad \tau_{xy} = -k \cos 2\varphi \quad (1.2)$$

и подставив в (1.1), получим:

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} + \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial \sigma}{\partial y} + \sin 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \cos 2\varphi \frac{\partial \varphi}{\partial y} = 0, \quad (1.3)$$

<sup>1</sup> Влияние  $\gamma$  в большинстве случаев незначительно, поэтому при вычислениях следует полагать  $\gamma = 0$ .

Производя замену переменных:

$$\xi = \sigma + \varphi, \quad \eta = \sigma - \varphi, \quad \sigma = \frac{\xi + \eta}{2}, \quad \varphi = \frac{\xi - \eta}{2}, \quad (1.4)$$

вместо (1.3) получим:

$$\frac{\partial \xi}{\partial x} \cos \varphi + \frac{\partial \xi}{\partial y} \sin \varphi = 0, \quad \frac{\partial \eta}{\partial x} \sin \varphi - \frac{\partial \eta}{\partial y} \cos \varphi = 0. \quad (1.5)$$

Уравнения характеристик для системы уравнений (1.5) для первого семейства и для второго семейства соответственно будут:

$$\frac{dx}{\cos \varphi} = \frac{dy}{\sin \varphi}, \quad \xi = \text{const}; \quad \frac{dx}{\sin \varphi} = -\frac{dy}{\cos \varphi}, \quad \eta = \text{const}.$$

Характеристики первого и второго семейств ортогональны ( $\varphi$  — угол наклона характеристик первого семейства к оси  $x$ ).

Производя замену переменных

$$\begin{aligned} u &= x \cos \varphi + y \sin \varphi, & v &= -x \sin \varphi + y \cos \varphi, \\ x &= u \cos \varphi - v \sin \varphi, & y &= u \sin \varphi + v \cos \varphi \end{aligned} \quad (1.6)$$

и относя уравнения (1.5) к характеристикам, получим:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \beta} - \frac{u}{4} \eta'(\beta) = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v}{2} = 0, \quad (1.7)$$

где  $\eta(\beta)$  — произвольная функция.

Если  $\eta(\beta) = \beta$ , то уравнения (1.7) представляются в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial \xi \partial \eta} - \frac{u}{4} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial \xi} - \frac{v}{2} = 0. \quad (1.8)$$

При этом нетрудно, воспользовавшись (1.5), получить:

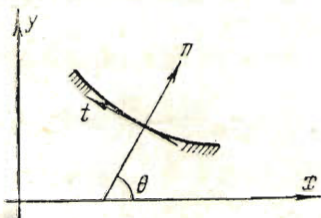
$$\Delta = \frac{D(x, y)}{D(\xi, \eta)} = \frac{2}{\sin 2\varphi} \frac{\partial x}{\partial \xi} \frac{\partial x}{\partial \eta}. \quad (1.9)$$

В статье<sup>[3]</sup> С. А. Христианович ввел понятие линий разрыва, вдоль которых  $\partial \xi / \partial x, \dots$  бесконечны. Им доказана теорема:

Пусть  $1/\Delta \neq 0$  и производные от  $x, y$  по  $\xi$  и  $\eta$  ограничены; для того чтобы некоторая линия была линией разрыва, необходимо и достаточно, чтобы вдоль этой линии выполнялось равенство  $\Delta \equiv 0$ .

## § 2. Условия вдоль контура

Пусть нам задана некоторая граничная кривая (Фиг. 2).



Фиг. 2

Обозначив через  $\sigma_n$  и  $\tau_{nt}$  соответственно нормальное и касательное напряжения вдоль этой кривой и вспомнив (1.2), получим:

$$\begin{aligned} \sigma_n &= \gamma x + k [2\sigma + \sin(2\varphi - 2\theta)], \\ \tau_{nt} &= -k \cos(2\varphi - 2\theta). \end{aligned} \quad (2.1)$$

Воспользовавшись этими формулами, получим:

если  $\sigma_n = \tau_{nt} = 0$ , то

$$\varphi = \theta \pm \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \sigma = -\frac{\gamma}{2k} x \mp \frac{1}{2}, \quad (2.2)$$

где  $n$  — целое число;

если  $\tau_{nt} = 0$ , то

$$\varphi = \theta \pm \frac{\pi}{4} + n\pi, \quad \sigma_n = \gamma x + k(2\sigma \pm 1); \quad (2.3)$$

если  $\tau_{nt} = -\tau = \text{const}$ , то

$$\varphi = \theta \pm \frac{\pi}{4} \mp \psi_0 + n\pi, \quad \sigma_n = \gamma x + 2k\sigma \pm \sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad (2.4)$$

где

$$\psi_0 = \frac{1}{2} \arcsin \frac{\tau}{k}, \quad -\frac{\pi}{4} \leq \psi_0 \leq \frac{\pi}{4};$$

если  $\tau_{nt} = \sigma_n \operatorname{tg} \mu$ , то

$$\varphi = \theta + \frac{\mu}{2} \pm \frac{\pi}{4} \mp \chi_0 + n\pi, \quad \sigma_n = \gamma x + k[2\sigma \pm \cos(2\chi_0 \mp \mu)], \quad (2.5)$$

где

$$\chi_0 = \frac{1}{2} \arcsin \left( -\frac{\gamma}{k} x \sin \mu - 2\sigma \sin \mu \right), \quad -\frac{\pi}{4} \leq \chi_0 \leq \frac{\pi}{4}.$$

Приведенные формулы будут использованы в дальнейшем.

### § 3. Постановка задачи

Перейдем к определению распределения давлений пластической среды на штамп вдоль линии их контакта.

Так как штамп предполагается абсолютно твердым, то форма линии контакта штампа и среды нам известна.

Пусть  $x, y, z$  — оси координат, неподвижно связанные со средой, причем ось  $z$  направлена перпендикулярно к плоскости чертежа.

Уравнение кривой, ограничивающей штамп, задано в виде:

$$x = x(\theta) - \delta, \quad y = y(\theta), \quad (3.1)$$

а уравнение кривой, ограничивающей свободную поверхность пластической среды, в виде:

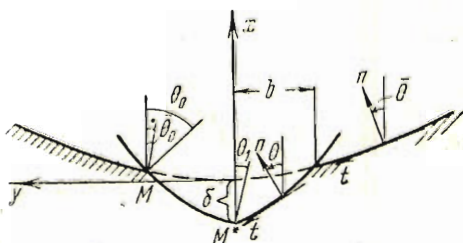
$$x = \bar{x}(\bar{\theta}), \quad y = \bar{y}(\bar{\theta}), \quad (3.2)$$

причем кривые (3.1) и (3.2) симметричны относительно оси  $x$ .

Здесь через  $\theta$  и  $\bar{\theta}$  обозначены углы между нормальными соответственно к кривым (3.1) и (3.2) и осью  $x$ , через  $\delta$  — глубина вдавливания штампа, в дальнейшем  $\theta_0$  и  $\theta_1$  обозначают значения  $\theta$  в точках  $M$  и  $M^*$ , через  $\bar{\theta}_0$  — значение  $\bar{\theta}$  в точке  $M$ ,  $\rho$  и  $\bar{\rho}$  — радиусы кривизны кривых (3.1) и (3.2).

Кривая (3.1) — выпуклая ( $\rho$  сохраняет постоянный знак), кривая (3.2) может иметь точки перегиба.

В точке  $M^*$  кривая (3.1) может иметь перелом<sup>1</sup>, на остальных участках  $x(\theta)$ ,  $y(\theta)$  и  $\bar{x}(\bar{\theta})$ ,  $\bar{y}(\bar{\theta})$  имеют непрерывные вторые производные<sup>2</sup>.



Фиг. 3

<sup>1</sup> Если перелома нет, то  $\theta_1 = 0$ .

<sup>2</sup> Впрочем нетрудно рассмотреть поставленную задачу и при наличии нескольких переломов на кривых (3.1) и (3.2).

Из соотношений

$$x(\theta_1) = y(\theta_1) = 0, \quad x(\theta_0) - \delta = \bar{x}(\bar{\theta}_0), \quad y(\theta_0) = \bar{y}(\bar{\theta}_0)$$

определяем:

$$\bar{\theta}_0 = t(\theta_0), \quad \delta = \delta(\theta_0), \quad b = y(\theta_0). \quad (3.3)$$

На поверхности, ограничивающей пластическую среду,

$$\sigma_n = \tau_{nt} = 0.$$

Поэтому по формулам (2.2) вдоль свободной поверхности принимаем:

$$\varphi = \bar{\theta} + \frac{\pi}{4}, \quad \sigma = -\frac{\gamma}{2k} \bar{x}(\bar{\theta}) - \frac{1}{2}. \quad (3.4)$$

Далее необходимо сделать предположение относительно трения между поверхностью штампа и пластической средой.

Мы рассмотрим три случая:

$$\tau_{nt} = 0, \quad \tau_{nt} = -\tau = \text{const}, \quad \tau_{nt} = \sigma_n \operatorname{tg} \mu,$$

где  $\mu$  — угол трения между пластической средой и штампом.

По формулам (2.3), (2.4) и (2.5) вдоль линии контакта  $MM^*$  принимаем: если  $\tau_{nt} = 0$ , то

$$\varphi = \theta + \frac{3\pi}{4}, \quad \sigma_n = \gamma [x(\theta) - \delta(\theta_0)] + k(2\sigma - 1); \quad (3.5)$$

если  $\tau_{nt} = -\tau$ , то

$$\varphi = \theta + \frac{3\pi}{4} + \psi_0, \quad \sigma_n = \gamma [x(\theta) - \delta(\theta_0)] + 2k\sigma - \sqrt{k^2 - \tau^2}; \quad (3.6)$$

если  $\tau_{nt} = \sigma_n \operatorname{tg} \mu$ , то

$$\varphi = \theta + \frac{\mu}{2} + \frac{3\pi}{4} + \chi_0, \quad \sigma_n = \gamma [x(\theta) - \delta(\theta_0)] + k[2\sigma - \cos(2\chi_0 + \mu)]. \quad (3.7)$$

Замечание о выборе знаков в формулах (3.4) — (3.7) будет сделано ниже. Подставив (3.4) в (1.4), получим вдоль кривой (3.2):

$$\xi = -\frac{\gamma}{2k} \bar{x}(\bar{\theta}) - \frac{1}{2} + \bar{\theta} + \frac{\pi}{4}, \quad \eta = -\frac{\gamma}{2k} \bar{x}(\bar{\theta}) - \frac{1}{2} - \bar{\theta} - \frac{\pi}{4}. \quad (3.8)$$

#### § 4. Прямолинейная граница пластической среды

Прежде чем перейти к решению общей задачи, сформулированной в начале статьи при криволинейной границе пластической среды, остановимся на частном случае, когда эта граница прямолинейна.

Расположение характеристик для этого случая было показано еще Л. Прандтлем в его работе<sup>[2]</sup>.

Ось  $y$  у нас совпадает с прямой, ограничивающей свободную поверхность пластической среды [вместо кривой (3.2)], поэтому<sup>1</sup>

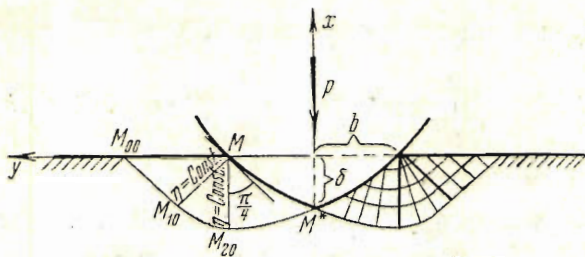
$$\bar{x}(\bar{\theta}) = 0, \quad \bar{\theta} = 0, \quad \delta(\theta_0) = x(\theta_0).$$

Рассмотрим три случая.

<sup>1</sup> Случай, когда прямые, ограничивающие пластическую среду, не горизонтальны, а наклонны и, следовательно, величина  $\bar{\theta}$  постоянна, но не равна нулю, может быть рассмотрен совершенно аналогично.

1. Вдоль линии контакта  $\tau_{nt} = 0$  (гладкий штамп)

Угол  $(\varphi - \theta)$  наклона первого семейства характеристик к нормали (фиг. 4) вдоль линии контакта  $MM^*$  в этом случае равен  $3\pi/4$ .



Фиг. 4

Так как по формулам (3.8) вдоль  $M_{00}M$

$$\xi = -\frac{1}{2} + \frac{\pi}{4} = \text{const}, \quad (4.1)$$

то  $\xi$  сохраняет ту же величину во всей пластической области  $MM_{00}M_{10}M_{20}M^*$  а следовательно, и вдоль  $MM^*$ .

По формулам (1.4) и (3.5)

$$\xi = \sigma^* + \theta + 3\pi/4. \quad (4.2)$$

Приравнявая (4.1) и (4.2), определим:

$$\sigma^* = -(\theta + \pi/2 + 1/2). \quad (4.3)$$

Вслед затем по формуле (3.5) получим формулу<sup>1</sup>:

$$\sigma_n = \gamma [x(\theta) - x(\theta_0)] - k(2\theta + \pi + 2) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1), \quad (4.4)$$

дающую распределение нормальных напряжений вдоль линии контакта.

Из этой формулы видно, что  $\sigma_n$  убывает ( $|\sigma_n|$  возрастает) при движении вдоль линии контакта от  $M$  к  $M^*$ .

Выбор обратных знаков в формулах (2.2), (2.3), (2.4) и (2.5) при написании (3.4), (3.5), (3.6) и (3.7) приводит вместо (4.4) к формуле:

$$\sigma_n = \gamma [x(\theta) - x(\theta_0)] + k(2\theta + \pi + 2) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1).$$

Из постановки задачи следует, что при предельном переходе к плоскому штампу ( $\theta = 0$ ,  $x(\theta) = 0$ )

$$\sigma_n < 0$$

(штамп давит на пластическую среду). Это условие останавливает наш выбор на формуле (4.4).

Обозначим через  $p$  равнодействующую давлений штампа, взятую на единицу длины вдоль оси  $x$ .

<sup>1</sup> В случае, когда прямые, ограничивающие пластическую среду, не горизонтальны, а наклонны, если опустить член, содержащий  $\gamma$ , вместо (4.4) получим:

$$\sigma_n = -k(2\theta - 2\theta_0 + \pi + 2) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1).$$

Из условия равновесия получим:

$$p = -2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sigma_n \rho \cos \theta d\theta. \quad (4.5)$$

Подставив  $\sigma_n$ , определенное формулой (4.4), в (4.5), определим:

$$p = 2 [\gamma x(\theta_0) + k(\pi + 2)] \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho \cos \theta d\theta - 2\gamma \int_{\theta_0}^{\theta_1} x(\theta) \rho \cos \theta d\theta + 4k \int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta \rho \cos \theta d\theta. \quad (4.6)$$

Если штамп круглый, то

$$\begin{aligned} x &= -R(\cos \theta - \cos \theta_0), & y &= -R \sin \theta, & x(\theta) &= R(1 - \cos \theta), \\ \delta &= R(1 - \cos \theta_0), & b &= -R \sin \theta_0, \end{aligned} \quad (4.7)$$

и вместо (4.6) получим<sup>1</sup>:

$$p = -\gamma R^2 \left( \theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 \right) + 4kR(1 - \theta_0 \sin \theta_0 - \cos \theta_0) - 2kR(\pi + 2) \sin \theta_0. \quad (4.8)$$

По этой формуле<sup>2</sup> при  $\gamma = 0$  подсчитана зависимость между  $b$  и  $p$ . Полученные результаты приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\frac{b}{R}$	$-\theta_0$	$\frac{p}{kR}$	$\frac{b}{R}$	$-\theta_0$	$\frac{p}{kR}$
0.01	0°34'	0.102	0.15	8°38'	1.497
0.02	1 09	0.204	0.20	11 32	1.976
0.03	1 43	0.306	0.25	14 29	2.445
0.04	2 18	0.408	0.30	17 27	2.904
0.05	2 52	0.509	0.35	20 29	3.351
0.10	5 44	1.008	0.40	23 35	3.789

## 2. Вдоль линии контакта $\tau_{nz} = -\tau = \text{const}$

Угол  $(\varphi - \theta)$  наклона первого семейства характеристик к нормали вдоль линии контакта  $MM^*$  в этом случае постоянен, но отличен от  $3\pi/4$ .

Во всей пластической области  $MM_{00}M_{10}M_{20}M^*$  имеет место формула (4.1). По формулам (1.4) и (3.6)

$$\xi = \sigma^* + \theta + 3\pi/4 + \psi_0. \quad (4.9)$$

Приравнявая (4.1) и (4.9), получим:

$$\sigma^* = -(\theta + \pi/2 + 1/2 + \psi_0). \quad (4.10)$$

Вслед затем по (3.6) получим формулу:

$$\sigma_n = \gamma [x(\theta) - x(\theta_0)] - 2k \left[ \theta + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \psi_0 \right] - \sqrt{k^2 - \tau^2}, \quad (4.11)$$

дающую распределение нормальных напряжений вдоль линии контакта.

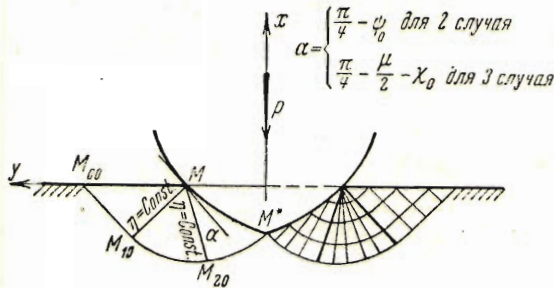
<sup>1</sup> Заметим, что при  $k=0$  формула (4.8) переходит в известную гидростатическую формулу для плавающего кругового цилиндра.

<sup>2</sup> Влияние члена, содержащего  $\gamma$ , незначительно.

Далее, воспользовавшись (3.6) и положив  $\varphi = 3\pi/4$ , получим значение  $\theta = \theta_*$ , при котором на контуре  $MM^*$   $\varphi = 3\pi/4$ , в виде:

$$\theta_* = -\psi_0.$$

Если  $\theta_* \geq \theta_1$ , то по формулам (4.11) найдем  $\sigma_n$  вдоль всей линии контакта  $MM^*$  (фиг. 5).



Фиг. 5

Из условия равновесия получим:

$$p = -2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sigma_n \rho \cos \theta d\theta - 2 \int_{\theta_0}^{\theta_1} \tau_{nt} \rho \sin \theta d\theta. \quad (4.12)$$

Подставив величину  $\sigma_n$ , определенную формулой (4.11), и  $\tau_{nt} = -\tau$  в (4.12), определим:

$$p = 2 \left[ \gamma x(\theta_0) + k(\tau + 1 + 2\psi_0) + \sqrt{k^2 - \tau^2} \right] \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho \cos \theta d\theta - 2\gamma \int_{\theta_0}^{\theta_1} x(\theta) \rho \cos \theta d\theta + 4k \int_{\theta_0}^{\theta_1} \theta \rho \cos \theta d\theta + 2\tau \int_{\theta_0}^{\theta_1} \rho \sin \theta d\theta. \quad (4.13)$$

Если  $\theta_* < \theta_1$ , то по формулам (4.11) имеем  $\sigma_n$  вдоль отрезка линии контакта, для которого  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_*$ , т. е. на участке  $MA$ . Точка  $A$  соответствует  $\theta = \theta_*$  (фиг. 6).

Как это было указано еще Л. Шрандтлем (см. [2]), среда вблизи участка кривой  $AM^*$  ( $\theta_* \leq \theta \leq \theta_1$ ) не может быть пластической при  $\tau_{nt} = -\tau$ .

Ограничиваясь случаем, когда участок  $AM^*$  мал по сравнению с участком  $MA$ , будем рассматривать вдавливание штампа, ограниченного не кривой  $MM^*N$ , а близкой к ней ломаной  $M\bar{M}^*N$ , отличающейся от прежней кривой тем, что криволинейные участки  $AM^*$  и  $M^*B$  заменены отрезками прямых  $A\bar{M}^*$  и  $\bar{M}^*B$ , касательных к линии контакта в точках  $A$  и  $B$ .

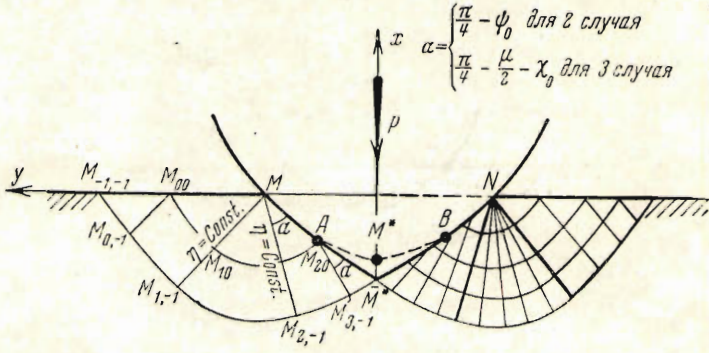
Такое изменение контура штампа не повлияет сильно на величину силы  $p$ .

Вдоль участка  $A\bar{M}^*$  напряжения  $\sigma_n$  определяются по формуле (4.11), если в ней положить  $\theta = \theta_*$ .

$$\sigma_n = \gamma [x(\theta_*) - x(\theta_0)] - 2k \left( \theta_* + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} + \psi_0 \right) - \sqrt{k^2 - \tau^2} = [\sigma_n]_A. \quad (4.14)$$

Далее, воспользовавшись формулами (4.12) и (4.13), получим:

$$p = 2 \left[ \gamma x(\theta_0) + k(\pi + 1 + 2\psi_0) + \sqrt{k^2 - \tau^2} \right] \int_{\theta_0}^{\theta_*} \rho \cos \theta d\theta - 2\gamma \int_{\theta_0}^{\theta_*} x(\theta) \rho \cos \theta d\theta + \\ + 4k \int_{\theta_0}^{\theta_*} \theta \rho \cos \theta d\theta + 2\tau \int_{\theta_0}^{\theta_*} \rho \sin \theta d\theta - 2[\sigma_n]_A y(\theta_*) - 2\tau y(\theta_*) \operatorname{tg} \theta_* \quad (4.15)$$



Фиг. 6

Если штампы круглые, то, вспомнив (4.7), получим:

$$p = -\gamma R^2 \left[ 2 \cos \theta_0 \sin \theta_* + \theta_0 - \theta_* - \frac{1}{2} \sin 2\theta_0 - \frac{1}{2} \sin 2\theta_* \right] + \\ + 4kR [\theta_* \sin \theta_* + \cos \theta_* - \theta_0 \sin \theta_0 - \cos \theta_0] - \\ - 2kR(\pi + 1 + 2\psi_0 + \sqrt{1 - \tau^2/R^2}) (\sin \theta_0 - \sin \theta_*) - 2\tau R (\cos \theta_* - \cos \theta_0) + \\ + 2R[\sigma_n]_A \sin \theta_* + 2R\tau \sin \theta_* \operatorname{tg} \theta_* \quad (4.16)$$

3. Вдоль линии контакта  $\tau_n = \sigma_n \operatorname{tg} \mu$

Угол  $(\varphi - \theta)$  наклона первого семейства характеристик к нормали в этом случае вдоль линии контакта  $MM^*$  отличен от  $3\pi/4$  и зависит от  $\theta$ , а в остальном расположении характеристик то же, что и на фиг. 5.

По формулам (1.4) и (3.7)

$$\xi = \sigma^* + \theta + \mu/2 + 3\pi/4 + \chi_0 \quad (4.17)$$

Приравнивая (4.1) и (4.17), получим уравнение:

$$2\sigma^* + \operatorname{arcsin} \left\{ -\frac{\gamma}{k} [x(\theta) - x(\theta_0)] \sin \mu - 2\sigma^* \sin \mu \right\} = -(2\theta + \pi + 1 + \mu), \quad (4.18)$$

определяющее<sup>1</sup>

$$\sigma = \sigma^*(\theta, \theta_0). \quad (4.19)$$

Вслед затем по (3.7) получим формулу:

$$\sigma_n = \gamma [x(\theta) - x(\theta_0)] + k \{ 2\sigma^*(\theta, \theta_0) - \cos [2\chi_0(\theta) + \mu] \} = \sigma_n^*(\theta, \theta_0), \quad (4.20)$$

где вследствие (2.5) и (4.18)

$$\chi_0(\theta) = -[\sigma^*(\theta) + \theta + \pi/2 + 1/2 + \mu/2],$$

дающую распределение нормальных напряжений вдоль линии контакта.

<sup>1</sup> При  $\gamma = 0$  величина  $\sigma^*$  не зависит от  $\theta_0$ .



Далее, воспользовавшись (3.7) и (4.18) и положив  $\varphi = 3\pi/4$ , получим равенство:

$$\sigma^*(\theta, \theta_0) + \pi/2 + 1/2 = 0,$$

определяющее  $\theta = \theta_*(\theta_0)$ , при котором  $\varphi = 3\pi/4$  на контуре  $MM^*$ .

Если  $\theta_* \geq \theta_1$ , то по формулам (4.20) имеем  $\sigma_n$  вдоль всей линии контакта  $MM^*$  (фиг. 5). Из условия равновесия (4.12), вспомнив, что  $\tau_{nl} = \sigma_n \operatorname{tg} \mu$ , получим:

$$p = - \frac{2}{\cos \mu} \int_{\theta_0}^{\theta_1} \sigma_n \rho \cos(\theta + \mu) d\theta, \tag{4.21}$$

где  $\sigma$  дано формулой (4.20).

Если  $\theta_* < \theta$ , то по формулам (4.20) имеем  $\sigma_n$  вдоль отрезка линии контакта, для которого  $\theta_0 \leq \theta \leq \theta_*$ , т. е. на участке  $MA$ . Точка  $A$  соответствует  $\theta = \theta_*$  (фиг. 6). Как и в предыдущем случае, будем рассматривать вдавливание штампа, ограниченного не кривой  $MM^*N$ , а близкой к ней ломаной  $M\bar{M}^*N$ .

Вдоль участка  $A\bar{M}^*$  напряжение  $\sigma_n$  определяется по формуле (4.20), если в ней положить  $\theta = \theta_*$ :

$$\sigma_n = \sigma_n^*(\theta_*, \theta_0) = [\sigma_n]_A. \tag{4.22}$$

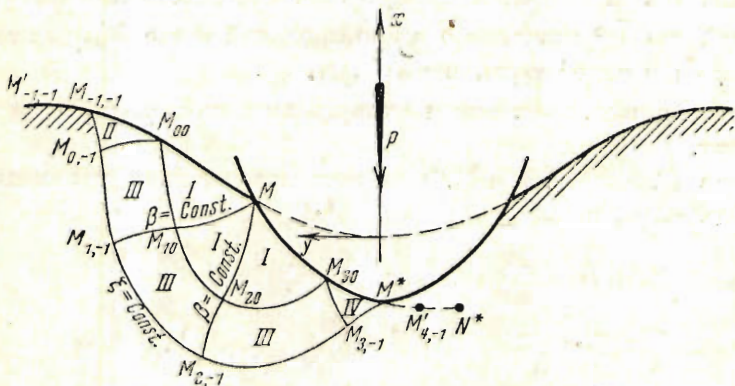
Далее, воспользовавшись (4.12), получим:

$$p = - \frac{2}{\cos \mu} \int_{\theta_0}^{\theta_*} \sigma_n \rho \cos(\theta + \mu) d\theta - 2 [\sigma_n]_A \frac{\cos(\theta_* + \mu)}{\cos \theta_* \cos \mu} y(\theta_*), \tag{4.23}$$

где  $\sigma_n$  дано формулой (4.20).

### § 5. Криволинейная граница пластической среды

Перейдем теперь к решению общей задачи при криволинейной границе пластической среды (фиг. 7).

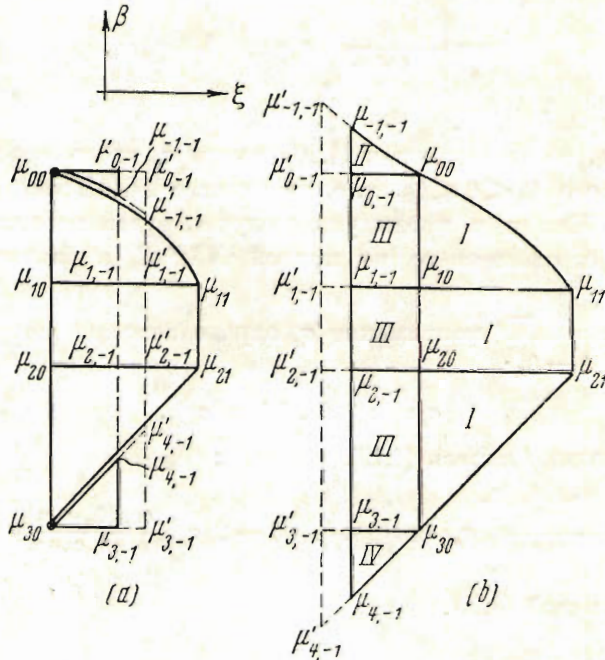


Фиг. 7

Кривая (3.2) может иметь точки перегиба. Такой точкой перегиба является  $M_{00}$ . Значение угла  $\bar{\theta}$  в этой точке обозначим через  $\bar{\theta}^*$ .

Поверхность штампа будем считать гладкой, т. е. вдоль линии контакта  $\tau_{ni} = 0$ . Нетрудно, однако, обобщить все рассуждения и на случай наличия трения между штампом и пластической средой, аналогично тому, как это было сделано в предыдущем параграфе.

Введем в рассмотрение многолистную поверхность  $\xi, \beta$ , которую будем полагать состоящей из пяти листов, наложенных друг на друга (фиг. 8а).



Фиг. 8

На листах I и II проводим кривую (3.8) соответственно для  $\bar{\theta}^* \leq \bar{\theta} \leq \bar{\theta}_0$  и  $\bar{\theta}^* \leq \bar{\theta} \leq \bar{\theta}^{**}$ , где  $\bar{\theta}^{**}$  значение  $\bar{\theta}$  в произвольной точке  $M'_{-1, -1}$  этой кривой. Они изобразятся в виде  $\nu_{00} \nu_{11}$  и  $\nu_{00} \nu'_{-1, -1}$ .

Вдоль этих кривых, а тем самым в треугольниках  $\nu_{00} \nu_{10} \nu_{11}$  и  $\nu_{00} \nu'_{0, -1} \nu'_{-1, -1}$  полагаем  $\beta = \gamma$ .

Подставив (3.2) и (3.4) в (1.6) и воспользовавшись уравнениями (1.8), получим вдоль  $\nu_{00} \nu_{11}$  и  $\nu_{00} \nu'_{-1, -1}$ :

$$u = \bar{x}(\bar{\theta}) \cos \left( \bar{\theta} + \frac{\pi}{4} \right) + \bar{y}(\bar{\theta}) \sin \left( \bar{\theta} + \frac{\pi}{4} \right),$$

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = -\frac{1}{2} \bar{x}(\bar{\theta}) \sin \left( \bar{\theta} + \frac{\pi}{4} \right) + \frac{1}{2} \bar{y}(\bar{\theta}) \cos \left( \bar{\theta} + \frac{\pi}{4} \right), \tag{5.1}$$

$$\frac{\partial u}{\partial \eta} = -\frac{\sqrt{2} k \bar{\rho}}{\gamma \bar{x}'(\bar{\theta}) + 2k} + \frac{1}{2} \bar{x}(\bar{\theta}) \sin \left( \bar{\theta} + \frac{\pi}{4} \right) - \frac{1}{2} \bar{y}(\bar{\theta}) \cos \left( \bar{\theta} + \frac{\pi}{4} \right).$$

<sup>1</sup> Изображения точек  $M_{ik}$  и  $M'_{ik}$  на плоскости  $\xi\beta$  обозначим через  $\mu_{ik}$  и  $\mu'_{ik}$ .

Теперь функция  $u$ , а вслед за ней и  $v$  может быть определена по известным формулам для телеграфного уравнения (1.8) и данным Коши (5.1) в треугольниках  $\mu_{00}\mu_{10}\mu_{11}$  и  $\mu_{00}\mu'_{0,-1}\mu'_{-1,-1}$ , а следовательно, и вдоль  $\mu_{00}\mu_{10}$ ,  $\mu_{10}\mu_{11}$  и  $\mu_{00}\mu'_{0,-1}$ .

Обозначим через  $M_{11}$  точку  $M$ , если рассматривать ее как крайнюю точку  $M_{00}M$ , и через  $M_{21}$  ту же точку, если рассматривать ее как крайнюю точку  $MM^*$ . Значения  $\sigma$  и  $\varphi$  в точках  $M_{11}$  и  $M_{21}$  различны.

Нетрудно видеть, что  $M_{11}$  и  $M_{21}$  должны лежать на одной характеристике  $\xi = \text{const}$ , вырождающейся на плоскости  $(x, y)$  в точку  $M$ .

Поэтому изображение точки  $M_{21}$  на листе I поверхности  $\xi\beta$  должно лежать на характеристике<sup>1</sup>  $\xi = \xi_{11}$ .

Далее, из (3.5) и (1.4) следует, что вдоль кривой (3.1)

$$\eta = \xi - 2\theta - 3\pi/2. \quad (5.2)$$

Поэтому в точке  $M_{21}(\theta = \theta_0)$ , зная  $\xi_{21} = \xi_{11}$ , нетрудно определить  $\eta_{21}$  в виде:

$$\eta_{21} = \xi_{11} - 2\theta_0 - 3\pi/2.$$

Вдоль характеристики  $\xi = \xi_{11}$  на участке  $\eta_{21} \leq \beta \leq \eta_{11}$  положим  $\eta(\beta) = \beta$ . Координаты  $\xi = \xi_{21}$ ,  $\beta = \eta_{21}$  определяют точку  $\mu_{21}$ .

Отрезок характеристики  $\mu_{11}\mu_{21}$  соответствует на плоскости  $xu$  точке  $M$  с координатами  $[\bar{x}(\bar{\theta}_0), \bar{y}(\bar{\theta}_0)]$ .

Подставив эти значения в (1.6) и заменив  $\bar{\theta}_0$  через  $\theta_0$  по формулам (3.3), получим:

$$u = \bar{x}(\bar{\theta}_0) \cos \frac{\xi_{11} - \eta}{2} + \bar{y}(\bar{\theta}_0) \sin \frac{\xi_{11} - \eta}{2} = \bar{u}(\eta, \theta_0). \quad (5.3)$$

Функция  $u$  была выше определена вдоль  $\mu_{10}\mu_{11}$ , а по формуле (5.3) она дана вдоль  $\mu_{11}\mu_{21}$ .

Теперь функция  $u$ , а вслед за ней и  $v$  может быть по известным формулам для телеграфного уравнения (1.8) и значениям  $u$ , данным вдоль двух характеристик различных семейств, определена в прямоугольнике  $\mu_{10}\mu_{11}\mu_{21}\mu_{20}$ , а следовательно, вдоль  $\mu_{20}\mu_{21}$ .

Пользуясь произволом в выборе  $\eta = \eta(\beta)$ , можно достигнуть того, чтобы изображением кривой (3.1) на листе I поверхности  $\xi\beta$  была прямая

$$\beta = \xi - 2\theta_0 - 3\pi/2, \quad (5.4)$$

проходящая через точку  $\mu_{21}$  [ср. с (5.2)].

Отрезок  $\mu_{21}\mu_{30}$  является изображением (3.1), поэтому вдоль него имеем:

$$x = x(\theta) - \delta(\theta_0), \quad y = y(\theta),$$

причем эти функции несколько продолжены и для  $\theta > \theta_1$  (отрезок  $M^*N^*$  на фиг. 7), так, чтобы их вторые производные были непрерывны и  $\rho$  имел бы постоянный знак вдоль всей кривой  $MM^*N^*$ .

<sup>1</sup> Через  $\xi_{ik}$ ,  $\eta_{ik}$  и  $\xi'_{ik}$ ,  $\eta'_{ik}$  будем обозначать  $\xi$ ,  $\eta$  в точках  $\mu_{ik}$  и  $\mu'_{ik}$ . Величина  $\xi_{11}$  вычисляется по формуле (3.6) в виде:

$$\xi_{11} = -\frac{\gamma}{2k} \bar{x}(\bar{\theta}_0) - \frac{1}{2} + \bar{\theta}_0 + \frac{\pi}{4}.$$

Подставив эти функции в (1.6) и вспомнив (1.7), вдоль  $\mu_{21} \mu_{30}$  получим:

$$\begin{aligned} u &= -[x(\theta) - \delta(\theta_0)] \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) + y(\theta) \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right), \\ \frac{\partial u}{\partial \xi} &= -\frac{1}{2}[x(\theta) - \delta(\theta_0)] \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - \frac{1}{2}y(\theta) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right). \end{aligned} \quad (5.5)$$

Определяя из первого соотношения функцию<sup>1</sup>  $\theta = \theta(u, \theta_0)$  и подставляя во второе, получим вдоль  $\mu_{21} \mu_{30}$ :

$$\frac{\partial u}{\partial \xi} = \frac{1}{2}f(u, \theta_0), \quad \eta = \xi - 2\theta(u, \theta_0) - \frac{3\pi}{2}, \quad (5.6)$$

а вдоль  $\mu_{20} \mu_{21}$  функции  $u, v$  были определены выше.

Таким образом нахождение  $u, \eta$  свелось к построению решений для нелинейного гиперболического уравнения (1.7) при сформулированных выше граничных условиях.

Теорема существования и единственности этих решений может быть доказана обычными в теории гиперболических уравнений методами<sup>2</sup>.

Итак, получаем  $u = u^*(\xi, \beta; \theta_0)$  и  $\eta = \eta(\beta; \theta_0)$  в треугольнике  $\mu_{20} \mu_{21} \mu_{30}$ ; исключив  $\beta$ , получим  $u = u(\xi, \eta; \theta_0)$ , а вслед затем и  $v = v(\xi, \eta; \theta_0)$ .

Выше  $u, v$  были определены вдоль  $\mu_{00} \mu_{30}$  на листе I и вдоль  $\mu_{00} \mu'_{0,-1}$  на листе II поверхности  $\xi \beta$ . Склеим листы I и III вдоль  $\mu_{00} \mu_{30}$ , а листы II и III вдоль  $\mu_{00} \mu'_{0,-1}$ . Теперь и на листе III  $u, v$  известны вдоль  $\mu_{00} \mu_{30}$  и  $\mu_{00} \mu'_{0,-1}$ . По данным значениям  $u$  вдоль двух характеристик различных семейств, решая уравнения (1.7), получим  $u, v$  в прямоугольнике  $\mu_{00} \mu_{20} \mu'_{2,-1} \mu'_{0,-1}$ , а решая уравнения (1.8), получим  $u, \eta$ , а вслед затем  $v$  в прямоугольнике  $\mu_{20} \mu_{30} \mu'_{3,-1} \mu'_{2,-1}$ .

Пересечения (5.4) проведенной на листе IV плоскости  $\xi \beta$  с характеристиками  $\xi = \xi_{00}$  и  $\xi = \xi'_{-1,-1}$  дадут точки  $\mu_{30}$  и  $\mu'_{4,-1}$ . Склеим листы III и IV вдоль  $\mu_{30} \mu'_{3,-1}$ . Теперь на листе IV  $u, v$  известны вдоль  $\mu_{30} \mu'_{3,-1}$ , а вдоль  $\mu_{30} \mu'_{4,-1}$  имеют место (5.6). Итак,  $u, \eta$ , а вслед затем  $v$  определяются в треугольнике  $\mu_{30} \mu'_{3,-1} \mu'_{4,-1}$  совершенно так же, как и в треугольнике  $\mu_{20} \mu_{21} \mu_{30}$ .

Таким образом в результате проведенных выше рассуждений мы получили  $u, v$  в четырехлистной области, изображенной на фиг. 8а, или в развернутом виде на фиг. 8б, причем номера листов обозначены римскими цифрами.

<sup>1</sup> Для однозначности функции  $\theta = \theta(u, \theta_0)$  достаточно постоянство знака:

$$\frac{\partial u}{\partial \theta} = -\frac{\sqrt{2}}{2} \rho - [x(\theta) - \delta] \cos\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right) - y(\theta) \sin\left(\theta + \frac{\pi}{4}\right).$$

Это имеет место, например, если штамп вдавливается в среду не слишком глубоко и  $x(\theta) - \delta, y(\theta)$  малы по сравнению с  $\rho$ , который вдоль кривой (3.1) сохраняет постоянный знак.

<sup>2</sup> Приведением этих краевых задач к решению нелинейного интегрального уравнения Вольтерра и решению его методом последовательных приближений, см., например, [4].

Вслед за этим по формулам (1.6) в той же области получим:

$$x = x(\zeta, \eta; \theta_0), \quad y = y(\zeta, \eta; \theta_0). \quad (5.7)$$

Обращая функции (5.7) и вспоминая (1.4), получим:

$$\sigma = \sigma(x, y; \theta_0), \quad \varphi = \varphi(x, y; \theta_0). \quad (5.8)$$

Подставив в (5.8) функции (3.1) вдоль  $MM'_{4,-1}$  получим<sup>1</sup>:

$$\sigma = \sigma^*(\theta, \theta_0) \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1). \quad (5.9)$$

Далее заметим, что так как

$$\xi_{11} = -\frac{\gamma}{2k} \bar{x}(\bar{\theta}_0) - \frac{1}{2} + \bar{\theta}_0 + \frac{\pi}{4}, \quad \xi_{21} = \sigma_M^* + \theta_0 + \frac{3\pi}{4},$$

то из равенства  $\xi_{11} = \xi_{21}$  получим значение  $\sigma^*$  в точке  $M$  в виде:

$$\sigma_M^* = -\frac{\gamma}{2k} [x(\theta_0) - \delta(\theta_0)] + t(\theta_0) - \left( \theta_0 + \frac{\pi}{2} + \frac{1}{2} \right).$$

Подставив  $\theta_1$  в (3.5) и (5.9), получим  $\sigma$  и  $\varphi$  в этой точке, вслед затем по формулам (1.4) определим  $\xi_{4,-1}$  и  $\eta_{4,-1}$ .

Проводя характеристики  $\xi = \xi_{4,-1}$  на листах II, III и IV, получим четырехлиственную область, обведенную на фиг. 8 сплошными линиями.

Воспользовавшись формулами (5.7), нетрудно отобразить эту область на плоскость  $xu$  (фиг. 7).

Остановимся более подробно на вопросе о линиях разрыва. В конце § 1 мы уже указывали, что вдоль линии разрыва  $\Delta = 0$ .

Выше было показано, что отрезок характеристики  $\mu_{11}\mu_{21}$  на листе I поверхности  $\xi\beta$  соответствует точке  $M$  на плоскости  $xu$  (фиг. 9).

Поэтому вдоль отрезка  $\mu_{11}\mu_{21}$

$$x = \bar{x}(\bar{\theta}_0)$$

(абсцисса точки  $M$ ), а следовательно, по формуле (1.9) на этом отрезке  $\Delta = 0$ . Таким образом

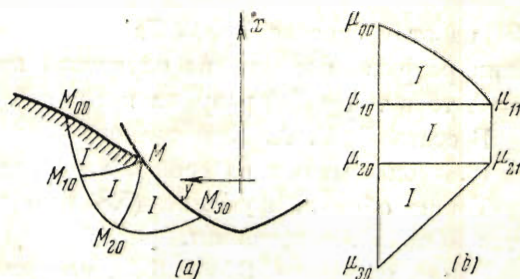
$\mu_{11}\mu_{21}$  является изображением линии разрыва, которая на плоскости  $xu$  вы-  
рождается в точку  $M$ .

Далее рассмотрим разрыв в точке  $M^*$  (фиг. 10). Выше мы определили  $\eta$  в треугольнике  $\mu_{30}\mu_{3,-1}\mu_{4,-1}$  на листе IV плоскости  $\xi\beta$ . Следовательно, нам известна  $\eta_{4,-1}$  в точке  $\mu_{4,-1}$ .

Проводим на листе IV характеристику:

$$\xi = \eta_{4,-1} + 3\pi/2.$$

Пересечения ее с характеристиками  $\beta = \beta_{3,-1}$  и  $\beta = \beta_{4,-1}$  дадут точки  $\mu_{3,-2}$  и  $\mu_{4,-2}$ . Отрезок характеристики  $\mu_{4,-1}\mu_{4,-2}$  на листе IV поверхности  $\xi\beta$  соответствует точке  $M^*$  на плоскости  $xu$ , поэтому вдоль него  $x = -\delta$  (абсцисса точки  $M^*$ ).



Фиг. 9

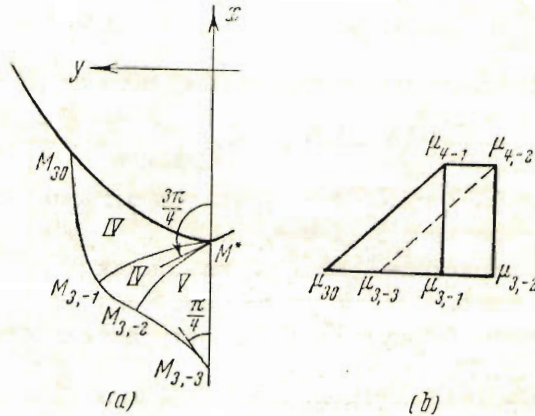
<sup>1</sup> Точка  $M'_{4,-1}$  определяется как отображение точки  $\mu_{4,-1}$  по формулам (5.7).

Проводя на листе V прямую (проходящую через точку  $\mu_{4,-2}$ )

$$\beta = \xi - 3\pi/2$$

и характеристику  $\beta = \beta_{3,-1}$ , получим в пересечении точку  $\mu_{3,-3}$ . Склеим листы IV и V вдоль  $\mu_{3,-2}$ ,  $\mu_{4,-2}$ .

Проводя теперь рассуждения аналогично тому, как это было сделано для областей  $\mu_{10}$ ,  $\mu_{11}$ ,  $\mu_{21}$ ,  $\mu_{20}$  и  $\mu_{20}$ ,  $\mu_{21}$ ,  $\mu_{30}$  на листе I, можно определить  $u$ ,  $\tau$ , а вслед затем и  $v$  в прямоугольнике  $\mu_{3,-1}$ ,  $\mu_{3,-2}$ ,  $\mu_{4,-2}$ ,  $\mu_{4,-1}$  и в треугольнике  $\mu_{3,-2}$ ,  $\mu_{3,-3}$ ,  $\mu_{4,-2}$ . Так как  $x = -\delta$ , вдоль отрезка  $\mu_{4,-1}$ ,  $\mu_{4,-2}$ , то по формуле



Фиг. 10

(1.9) на этом отрезке  $\Delta = 0$ . Таким образом  $\mu_{4,-1}$ ,  $\mu_{4,-2}$  является изображением линии разрыва, которая на плоскости  $xu$  вырождается в точку  $M^*$ . (Если  $\theta_1 = 0$ , то в точке  $M^*$  разрыва нет).

В статье [3] С. А. Христианович доказал, что до линии разрыва функции (5.8) однозначны во всей области, где они определены.

Таким образом функции (5.8) в областях, где они определены, кроме точек  $M$  и  $M^*$ , однозначны.

Далее, вспомнив (3.5) и (5.9), получим формулу:

$$\sigma_n = \gamma [x(\theta) - \delta(\theta_0)] + k [2\sigma^*(\theta, \theta_0) - 1] \quad (\theta_0 \leq \theta \leq \theta_1), \quad (5.10)$$

дающую распределение напряжений вдоль линии контакта штампа и пластической среды.

В точке  $M$

$$[\sigma_n]_M = -k [2\theta_0 - 2t(\theta_0) + \pi + 2].$$

Подставив (5.10) в (4.5), получим величину силы  $p$  в зависимости от угла  $\theta_0$  или  $b$  ( $b = y(\theta_0)$ ), характеризующих глубину вдавливания штампа.

В заключение отметим, что решение краевых задач для гиперболических уравнений (1.7) и (1.8) может быть при вычислениях проведено с помощью приближенного метода Массо, широко используемого в гидро- и газовой динамике [4], [5].

ЛИТЕРАТУРА

1. Hencky H. Über einige statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. „Zeitschr. für angew. Math. u. Mech.“ 1923. H. 4.
2. Prandtl L. Anwendungsbeispiele zu einem Henckyschen Satz über das plastische Gleichgewicht. „Zeitschr. für angew. Math. u. Mech.“ 1923. H. 6.
3. Христианович С. А. Плоская задача математической теории пластичности при внешних силах, заданных на замкнутом контуре. „Математ. сборн.“ 1936. Т. 1. № 4.
4. Христианович С. А. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. 1938.
5. Франкль Ф. и Алексеева Р. Две крайние задачи из теории гиперболических уравнений. „Математ. сборн.“ 1934. Т. XLI. Вып. 3.
6. Sokolovsky V. Plane Problem of Earth Pressure. „Comptes rendus (doklady) de l'Academie des Sciences de l'USSR“. 1939. Vol. XXII. № 4.
7. Sokolovsky V. On a Problem of Earth Pressure. „Comptes rendus (doklady) de l'Academie des Sciences de l'USSR“. 1939. Vol. XXIII. № 1.

ÜBER DEN DRUCK EINES PLASTISCHEN KONTINUUMS AUF EINEM HARTEN STEMPEL

W. SOKOLOWSKY

(Zusammenfassung)

Beim Eindringen eines harten Stempels erfährt das Kontinuum schon in seinem elastischen Zustande eine lokale Knüllung. Bei fortgesetztem Eindringen entsteht nahe der Kontaktfläche eine plastische Zone.

Die vorliegende Arbeit liefert eine Lösung des ebenen Problems der Druckverteilung längs der Kontaktlinie eines plastischen Kontinuums und eines eindringenden harten Stempels.

Eine lokale Knüllung des Kontinuums findet bereits in dessen elastischem Zustande statt. Die plastischen Verschiebungen muss man sich übrigens so klein angedenken, dass sie demnach keine wesentliche Formänderung der die freie Oberfläche des Kontinuums begrenzenden Kurve hervorrufen können.

§ 4 betrachtet zunächst den Spezialfall eines von Geraden begrenzten plastischen Kontinuums. Den Lauf der diesbezüglichen Charakteristiken (Fig. 4, 5, 6) finden wir bereits in der Arbeit von L. Prandtl<sup>[2]</sup>.

Hier ersteht die Notwendigkeit einer Voraussetzung über die Reibung zwischen der Oberfläche des Stempels und dem plastischen Kontinuum.

Wir betrachten drei Einzelfälle, wo längs der Kontaktlinie

$$\tau_{nt} = 0, \quad \tau_{nt} = -\tau = \text{const}, \quad \tau_{nt} = \sigma_n \operatorname{tg} \mu.$$

Für den glatten  $\tau_{nt} = 0$  Stempel erhalten wir die Verteilung der Normaldrucke längs der Kontaktlinie in der Formel (4.4) und ihre Resultierende  $p$  in den Formeln (4.6) und (4.8) — für den runden Stempel.

Für den Stempel mit reibender Oberfläche, längs der  $\tau_{nt} = -\tau$ , ist  $\sigma_n$  längs der Kontaktlinie für den Fall (Fig. 5) durch die Formel (4.11), und die Kraft  $p$  — durch die Formel (4.13) gegeben.

Für den Fall (Fig. 6) ist  $\sigma_n$  durch die Formeln (4.11) für den Abschnitt  $MA$  und dementsprechend (4.14) für den Abschnitt  $A\bar{M}^*$  gegeben.

Die Kraft ergibt sich aus den Formeln (4.15) und (4.16) (für den runden Stempel).

Für den Stempel mit reibender Oberfläche, längs der  $\tau_{nt} = \sigma_n \operatorname{tg} \nu$ , ist  $\sigma_n$  längs der Kontaktlinie für den Fall (Fig. 5) durch die Formel (4.20), und die Kraft  $p$  — durch die Formel (4.21) gegeben.

Für den Fall (Fig. 6) erhalten wir  $\sigma_n$  aus den Formeln (4.20) und (4.22) für den Abschnitt  $MA$ , bzw.  $A\bar{M}^*$ , die Kraft  $p$  aber aus den Formeln (4.23).

Auf diese Weise erhalten wir die Kraftgrösse  $p$  durch den Winkel  $\theta_0$  oder  $b$  (siehe Fig. 4), welche die Eindringtiefe des Stempels bezeichnen.

Weiter in § 5 betrachten wir den Allgemeinfall eines plastischen Kontinuums, dessen freie Oberfläche von einer beliebigen Kurve begrenzt wird (Fig. 7). Dieser Fall kann hier in analoger Weise untersucht werden, wie es bereits an anderer Stelle bei Lösung der Probleme der Erddrucktheorie geschah. Sh.<sup>[6]</sup> und <sup>[7]</sup>. Es wird eine Hilfsebene  $\xi\beta$  mit beliebiger Funktion  $\gamma(\beta)$  in Betracht gezogen, in der das vierblättrige Bereich konstruiert wird. Dieses Bereich ist auf der Fig. 8a oder in entwickelter Form Fig. 8b unter Bezeichnung der einzelnen Blätter mittels römischen Ziffern abgebildet.

Diese Blätter sind folgendermassen miteinandergeheftet: I und III längs  $\mu_{00} \mu_{30}$  II und III längs  $\mu_{00} \mu'_{0,-1}$  III und IV längs  $\mu_{30} \mu'_{3,-1}$ . Die Aufgabe wird also auf eine Konstruktion von Lösungen hyperbolischer Gleichungen (1.7) (1.8) in den Bereichen in der Ebene  $\xi\beta$  in bestimmter Reihenfolge reduziert.

Innerhalb der Dreiecke  $\mu_{00} \mu_{11} \mu_{10}$  und  $\mu_{00} \mu'_{0,-1} \mu'_{-1,-1}$  nach den Angaben von Cauchy längs  $\mu_{00} \mu_{11}$  und  $\mu_{00} \mu'_{-1,-1}$ .

Innerhalb des Rechtecks  $\mu_{10} \mu_{11} \mu_{21} \mu_{20}$  nach den Angaben längs zwei Charakteristiken  $\mu_{10} \mu_{11}$  und  $\mu_{11} \mu_{21}$ .

Im Dreieck  $\mu_{20} \mu_{21} \mu_{30}$  nach kombinierten Angaben längs der Charakteristik  $\mu_{20} \mu_{21}$  und der Geraden  $\mu_{21} \mu_{30}$  Innerhalb des Rechtecks  $\mu'_{0,-1} \mu_{00} \mu'_{30} \mu'_{3,-1}$  nach Angaben längs zweier Charakteristiken  $\mu_{00} \mu'_{0,-1}$  und  $\mu_{00} \mu_{30}$ .

Im Dreieck  $\mu_{30} \mu'_{3,-1} \mu'_{4,-1}$  nach kombinierten Angaben längs der Charakteristik  $\mu_{30} \mu'_{3,-1}$  und der Geraden  $\mu_{30} \mu'_{4,-1}$ .

Das vierblättrige Bereich in der Ebene  $\xi\beta$  (Fig. 8a oder 8b) wird als ein orthogonales krummliniges Netz von Charakteristiken (Fig. 7) auf der Ebene  $xy$  abgebildet, wobei die Punkte  $M_{ik}$  den Punkten  $\mu_{ik}$  entsprechen und der Punkt  $M^*$  dem Punkte  $\mu_{4,-1}$  entspricht.

Die Strecke  $\mu_{11} \mu_{21}$  entartet in der Ebene  $xy$  zum Punkt  $M$ .

Das Rechteck  $\mu_{1,-1} \mu_{11} \mu_{21} \mu_{2,-1}$  entspricht dem krummlinigen Dreieck  $M_{1,-1} M M_{2,-1}$ .

Auf solche Weise erhalten wir die Verteilung der Normalspannungen längs der Kontaktlinie (5.10) und alsdann nach den Formeln (5.10) die Kraft  $p$ .

Die Lösung der Grenzprobleme für hyperbolische Gleichungen könnte bei numerischer Rechnung nach der Annäherungsmethode von Massau, welche in der Hydro<sup>[4]</sup> und Gasdynamik<sup>[5]</sup> vielfach angewandt wird, ausgeführt werden.