А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ — **INSTITUTE OF MECHANICS**

ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА" — **JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS**

Т. IV, в. 5—6, 1940

ЗАМЕТКИ

О ПРИМЕНИМОСТИ ЗАКОНА ГУКА К РАСЧЕТУ РЕЗИНОВЫХ ДЕТАЛЕЙ

(Москва)

Н. И. ГЛАГОЛЕВ

Попытки обоснования нового закона упругости, заменяющего закон Гука для больших деформаций, предпринятые Ариано [1] и Генки [2], не увенчались пока успехом. Сез [3] и Шеферд [4], определяя деформации и напряжения в резиновых деталях, пользуются законом Гука, учитывая не только первые степени, но и квадраты и произведения производных от смещений, относя напряжения и деформации к действительному положению точки в упругом теле.

Экспериментальные подтверждения полученных Сезом и Шефердом результатов решения ряда задач пока неизвестны.

В этой заметке, исходя из концепции Сеза-Шеферда, излагается решение задачи об однородной осесимметричной деформации сжатия полого резинового цилиндра, надетого на стальной цилиндрический стержень так, что осуществляется скользящая посадка.

Для получения ответа на вопрос, в какой степени это решение будет соответствовать действительной картине напряженного и деформированного состояния, предварительно приводятся результаты экспериментальной проверки.

Испытания резиновых образцов производились на прессе Амслера; всего проведено девять экспериментов.

Постоянные упругости материала:

$$\eta = 0.49, \qquad \mu = 7.12 \text{ кг/см}^2, \qquad \lambda = 349.12 \text{ кг/см}^2.$$

Размеры образцов: высота $h = 2c = 115.76$ мм, внутренний диаметр $2a = 39.84$ мм, внешний диаметр $2b = 78.90$ мм.

Форма, в которой вулканизировались образцы, была тщательно обработана.

Чтобы обеспечить сохранение образцом цилиндрической формы в достаточно широких пределах изменения сжимающих усилий, торцы, отполированные плиты пресса и внутренняя цилиндрическая поверхность образца смачивались водой, действующей как смазка.

При испытаниях деформация осуществлялась с постоянной скоростью; через определенные промежутки времени делались остановки постоянной продолжительности для записи показаний приборов. Измерения деформаций производились при помощи восьми индикаторов с точностью 0.01 мм.

Было установлено, что при изменении сжимающих усилий от 0 до 250 кг разность величин площадей сечений среднего по высоте образца и торцевого достигает во всех опытах не более 1.5% от первоначальной площади поперечного сечения образца.

Таким образом цилиндрическая форма образца в рассматриваемых пределах изменения сжимающих усилий практически сохранялась, т. е. выполнялось предположение об однородности деформаций.

В табл. 1, где P (в кг) — сжимающее усилие, σ (в кг/см²) — напряжение, отнесенное к первоначальной площади поперечного сечения образца, q_0 (в мм) — радиальное смещение точек, лежащих на внешнем контуре торца, q_1 (в мм) — радиальное смещение точек, лежащих на внешнем контуре сечения, параллельного торцевому, среднего по высоте образца, S_0 (в см²) — площадь торцевого сечения, S_1 (в см²) — площадь среднего по высоте образца сечения, Δh (в мм) — усадка образца, приведены результаты испытаний для образца № 3.

Таблица 1

P	σ	q_0	q_1	S_0	S_1	S_1-S_0	$\frac{P}{S_0}=\sigma_0$	$\frac{P}{S_1}=\sigma_1$	Δh
20.4	0.56	0.14	0.14	36.63	36.63	0	0.55	0.55	1.07
34.2	0.94	0.27	0.27	36.95	36.95	0	0.92	0.92	2.10
47.5	1.31	0.41	0.41	37.27	37.27	0	1.27	1.27	3.13
60.2	1.66	0.54	0.54	37.62	37.62	0	1.60	1.60	4.19
74.6	2.05	0.68	0.68	37.98	37.98	0	1.96	1.96	5.34
87.6	2.41	0.81	0.81	38.30	38.30	0	2.28	2.28	6.49
104.3	2.87	0.95	0.95	38.68	38.68	0	2.69	2.69	7.55
122.1	3.36	1.08	1.08	38.99	38.99	0	3.13	3.13	8.61
148.1	4.08	1.21	1.21	39.32	39.32	0	3.76	3.76	9.67
164.4	4.53	1.35	1.35	39.68	39.68	0	4.14	4.14	10.73
180.8	4.98	1.50	1.50	40.06	40.06	0	4.51	4.51	11.80
206.7	5.69	1.64	1.64	40.42	40.42	0	5.11	5.11	12.88
217.5	5.99	1.81	1.86	40.86	41.00	0.14	5.32	5.32	13.87
232.6	6.41	1.97	2.09	41.28	41.62	0.34	5.63	5.58	14.86

Результаты экспериментов не получились совпадающими. Разброс экспериментальных точек таков: усадка образца порядка 12.50—12.88 мм вызывалась сжимающими усилиями и соответственно напряжениями, изменяющимися в пределах от

$$P=206.7 \text{ кг}, \qquad \sigma=5.69 \text{ кг/см}^2, \qquad \sigma_0=\sigma_1=5.11 \text{ кг/см}^2$$

до

$$P=287.7 \text{ кг}, \qquad \sigma=7.93 \text{ кг/см}^2, \qquad \sigma_0=7.19 \text{ кг/см}^2, \qquad \sigma_1=7.08 \text{ кг/см}^2.$$

Данные опытов для указанной величины усадок представлены в табл. 2.

Таблица 2

№№ образцов	P	σ	q_0	q_1	S_0	S_1	S_1-S_0	σ_0	σ_1	Δh
1	175.4	4.83	0.76	0.84	38.1	38.4	0.3	4.60	4.56	12.11
2	210.5	5.80	1.81	1.98	40.8	41.3	0.5	5.15	5.09	12.53
3	206.7	5.69	1.64	1.64	40.4	40.4	0	5.11	5.11	12.88
4	287.7	7.93	1.50	1.71	40.0	40.6	0.6	7.19	7.08	12.75
5	252.6	6.96	1.60	1.78	40.3	40.8	0.5	6.26	6.19	12.46
6	238.6	6.57	1.81	1.92	40.9	41.2	0.3	5.83	5.79	12.55
7	154.8	4.26	0.81	0.81	38.3	38.3	0	4.04	4.04	11.83
8	250.4	6.90	1.98	2.08	41.3	41.6	0.3	6.06	6.01	12.56
9	217.5	5.99	1.82	1.82	40.9	40.9	0	5.31	5.31	12.55

Исходя из экспериментальных результатов, полученных при испытании образца № 3 (а они являются средними и характерными для всех опытов), задача была решена приближенным методом.

Размеры образца после деформации обозначим через a', b', c'. В нашем случае $a' = 19.92$ мм, $b' = 41.09$ мм, $c' = 51.44$ мм.

Будем пользоваться цилиндрическими координатами r, φ, z.

При указанных предпосылках радиальное смещение q будет функцией только r, смещение w, параллельное оси цилиндра, будет функцией только z.

Уравнения равновесия будут иметь вид:

$$(\lambda + \mu)\left(\frac{d^2q}{dr^2} + \frac{1}{r}\frac{dq}{dr} - \frac{q}{r^2}\right) - \left\{(\lambda + 2\mu)\frac{dq}{dr}\frac{d^2q}{dr^2} + \mu\left[\frac{1}{r}\left(\frac{dq}{dr}\right)^2 - \frac{q^2}{r^3}\right] + \right.$$

$$\left. + \lambda\left[\frac{q}{r^2}\frac{dq}{dr} - \frac{q^2}{r^3}\right]\right\} = 0, \tag{1}$$

$$\frac{d^2w}{dz^2} - \frac{dw}{dz}\frac{d^2w}{dz^2} = 0.$$

Выражения компонент напряжения и деформации через перемещения будут:

$$\varepsilon_{rr} = \frac{dq}{dr} - \frac{1}{2}\left(\frac{dq}{dr}\right)^2, \qquad \varepsilon_{\varphi\varphi} = \frac{q}{r} - \frac{1}{2}\frac{q^2}{r^2},$$

$$\varepsilon_{zz} = \frac{dw}{dz} - \frac{1}{2}\left(\frac{dw}{dz}\right)^2, \qquad \varepsilon_{rz} = \varepsilon_{\varphi z} = \varepsilon_{r\varphi} = 0,$$

$$\widehat{rr} = \lambda\left(\frac{dq}{dr} + \frac{q}{r} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{dq}{dr} - \left\{\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{dq}{dr}\right)^2 + \frac{q^2}{r^2} + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right] + \mu\left(\frac{dq}{dr}\right)^2\right\},$$

$$\widehat{zz} = \lambda\left(\frac{dq}{dr} + \frac{q}{r} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{dw}{dz} - \left\{\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{dq}{dr}\right)^2 + \frac{q^2}{r^2} + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right] + \mu\left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right\}, \tag{2}$$

$$\widehat{\varphi\varphi} = \lambda\left(\frac{dq}{dr} + \frac{q}{r} + \frac{dw}{dz}\right) + 2\mu\frac{q}{r} - \left\{\frac{\lambda}{2}\left[\left(\frac{dq}{dr}\right)^2 + \frac{q^2}{r^2} + \left(\frac{dw}{dz}\right)^2\right] + \mu\frac{q^2}{r^2}\right\},$$

$$\widehat{rz} = 0, \qquad \widehat{\varphi z} = 0, \qquad \widehat{r\varphi} = 0.$$

Граничные условия представятся в виде:

$$q_{r=a'} = 0, \qquad \widehat{rr}_{r=b'} = 0, \qquad \widehat{zz}_{z=\pm c'} = \text{const} = -5.11 \text{ кг/см}^2.$$

Решение второго уравнения равновесия будет:

$$w = \alpha z + \beta,$$

где α, β — постоянные, причем $\beta = 0$, так как w должно быть нечетной функцией z.

Полагая, следуя Сезу,

$$q = [1 - Q(r)]\,r,$$

уравнение равновесия преобразуем к виду:

$$\frac{(2\lambda + 5\mu)}{(\lambda + 2\mu)}\,r\left(\frac{dQ}{dr}\right)^2 + 3Q\frac{dQ}{dr} + Qr\frac{d^2Q}{dr^2} + r^2\frac{dQ}{dr}\frac{d^2Q}{dr^2} = 0. \tag{3}$$

Обозначим

$$\frac{2\lambda + 5\mu}{2(\lambda + 2\mu)} = \gamma \tag{4}$$

и введем параметр

$$U = \frac{r}{Q}\frac{dQ}{dr}; \tag{5}$$

тогда уравнение (3) можно переписать так:

$$(1 + U)\,Q\frac{dU}{dQ} + U^2 + 2\gamma U + 2 = 0, \quad \text{или} \quad \frac{dQ}{Q} = -\frac{(1 + U)\,dU}{U^2 + 2\gamma U + 2}.$$

Откуда

$$\ln(C_1 Q) = \frac{\gamma - 1}{\sqrt{2 - \gamma^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{U + \gamma}{\sqrt{2 - \gamma^2}} - \frac{1}{2} \ln(U^2 + 2\gamma U + 2),$$

$$\ln(C_2 r) = \frac{\gamma - 2}{2\sqrt{2 - \gamma^2}} \operatorname{arc\,tg} \frac{U + \gamma}{\sqrt{2 - \gamma^2}} - \frac{1}{2} \ln U + \frac{1}{4} \ln(U^2 + 2\gamma U + 2), \tag{6}$$

где C_1 и C_2 — постоянные.

Таким образом

$$w = \alpha z, \qquad q = (1 - Q)\, r,$$

причем Q и r выражаются через вспомогательный параметр U.

Напряжения $\widehat{rr}$, $\widehat{\varphi\varphi}$ $\widehat{zz}$ выражаются через α и Q следующим образом:

$$\frac{\widehat{rr}}{\lambda + \mu} = 1 + \eta(2\alpha - \alpha^2) - Q^2 [\eta + (1 - \eta)(1 + U)^2], \tag{7}$$

$$\frac{\widehat{\varphi\varphi}}{\lambda + \mu} = 1 + \eta(2\alpha - \alpha^2) - Q^2 [(1 - \eta) + \eta(1 + U)^2], \tag{8}$$

$$\frac{\widehat{zz}}{\lambda + \mu} = 2\eta + (1 - \eta)(2\alpha - \alpha^2) - Q^2 \eta [1 + (1 + U)^2]. \tag{9}$$

Так как $q = 0$ при $r = a'$, то

$$Q(a') = Q_{a'} = 1,$$

и так как $\widehat{rr} = 0$ при $r = b'$, то

$$1 + \eta(2\alpha - \alpha^2) - Q_{b'}^2 [\eta + (1 - \eta)(1 + U_{b'})^2] = 0, \tag{10}$$

где $Q_{b'} = Q(b')$, $U_{b'}$ — значение параметра U, соответствующее $r = b'$ (аналогично будем писать $U_{a'}$).

Интенсивность сжимающих напряжений по всему торцевому сечению постоянна, следовательно, в выражении (9) множитель

$$Q^2 [1 + (1 + U)^2] = \text{const} \tag{11}$$

при $z = \pm c'$ и при $a' \leqslant r \leqslant b'$. В рассматриваемом случае это подтверждается следующим соображением.

Подставив U, согласно (5), в выражение (11) и продифференцировав результат по r, получим:

$$2r\left(\frac{dQ}{dr}\right)^2 + 3Q\frac{dQ}{dr} + Qr\frac{d^2Q}{dr^2} + r^2\frac{dQ}{dr}\frac{d^2Q}{dr^2} = 0;$$

а это есть одно из уравнений равновесия, но для материала с коэффициентом Пуассона $\eta = 1/2$. В нашем случае коэффициент Пуассона мало отличается от половины ($\eta = 0.49$), следовательно, соотношение (11) будет выполняться достаточно точно.

Если в соотношения (6) подставить $r = a'$, $r = b'$ и, следовательно, $Q_{a'}$, $Q_{b'}$, $U_{a'}$, $U_{b'}$, то, составляя разности

$$\lg(C_1 Q_{b'}) - \lg(C_1 Q_{a'}), \qquad 2\lg(C_2 b') - 2\lg(C_2 a'),$$

получим два соотношения:

$$g_1(U_{a'}) = g_1(U_{b'}) + \lg Q_{b'}, \qquad f_1(U_{a'}) = f_1(U_{b'}) - 2\lg(b'/a'). \tag{12}$$

Пользуясь (10) и уравнением (9) при $r = b'$, выразим $Q_{b'}$ через $U_{b'}$ и подставим (12); получим уравнения:

$$g_1(U_{a'}) = g_2(U_{b'}), \qquad f_1(U_{a'}) = f_2(U_{b'}).$$

Решая эти уравнения графически, найдем $U_{a'}$, $U_{b'}$, а пользуясь уравнениями (10) и (9), найдем $Q_{b'}$ и α. На деталях вычислений и на способе уточнения результатов графического решения мы останавливаться не будем.

В вычисленных значениях смещений только третий знак после запятой может вызвать сомнения. Поэтому точность, равная 0.01 мм, с которой нами определены смещения при экспериментах, достаточна для сравнений.

Приводим результаты вычислений: радиальное смещение точек внешней цилиндрической поверхности равно $q = 3.12$ мм (эксперимент 1.64 мм); смещение торцевых сечений $w = \mp 10.56$ мм (эксперимент ∓ 6.44 мм).

Напряжение $\widehat{rr}$ изменяется от нуля на внешней поверхности до 1.22 кг/см^2 на внутренней поверхности цилиндрического образца.

Напряжение $\widehat{\varphi\varphi}$ изменяется от -0.80 кг/см^2 для точек, лежащих на внешней поверхности, до -2.08 кг/см^2 для точек, лежащих на внутренней цилиндрической поверхности образца.

Результаты расчетов и экспериментов расходятся очень сильно. Расчетные данные для смещений w превышают экспериментальные на 60—65%. Расчетные значения радиальных смещений q отличаются от экспериментальных на 90%.

Таким образом с помощью решения при изложенных предпосылках действительной картины деформированного состояния получить нельзя.

Заметим, что если рассмотренную нами задачу решить аналитическим путем точно без учета квадратов и произведений производных от смещений, то полученные результаты будут отличаться от приведенных выше расчетных результатов на величину порядка 10%.

Следовательно, учет нелинейных членов вносит в расчет значительные усложнения, а между тем эффект учета крайне незначителен.

Поступила в редакцию 4 V 1940.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ariano R. Le deformazioni finite. Milano. 1935. XII.
2. Hencky H. The Elastic Behaviour of Vulcanized Rubber. "Trans. of the Amer. Soc. of Mech. Eng." 1933. № 1-2. [P. 45—54].
3. Seth. R. 1) Finite Strain in Elastic Problems. "Phil. Trans. of the Royal Soc. of London". 1935. Vol. 234. S. A. № 738. [P. 231—264]. 2) Problem of Finite Strain. "Phil. Mag." 1939. Part I. March. [P. 286—293]. Part II. April. [P. 449—452].
4. Shepherd W. and Seth R. Finite Strain in Elastic Problems. "Proceedings of the Royal Soc." 1936. Vol. 156. S. A. № 887. [P. 171—192].

ON THE APPLICABILITY OF HOOKE'S LAW TO RUBBER PARTS

N. I. GLAGOLEV

(Summary)

The author finds, by comparison of experimental results and calculations, that consideration of squares and products of derivatives of displacements does not reveal the true distribution of stresses and deformations in rubber parts.

The experiment was performed on a rubber cylinder drawn over a steel bar; compressive load being applied to the butt-ends of the rubber cylinder, which was, however, free to slide on the bar.

The theoretical solution of the problem was constructed after Seth and Shepherd. Accordingly, Hooke's Law was employed; stresses and deformations were taken with reference to points in the deformed shapes.