

## ГРАФИЧЕСКОЕ РЕШЕНИЕ ЗАДАЧ ПРОСТРАНСТВЕННОЙ МЕХАНИКИ ПРИ ПОМОЩИ ПОСТРОЕНИЙ НА ОДНОЙ ПЛОСКОСТИ

Ф. М. ДИМЕНТБЕРГ и Я. Б. ШОР

(Москва)

Федергофер<sup>[7]</sup> и Винтер<sup>[9]</sup> дали графическое решение ряда задач пространственной кинематики при помощи построений на одной плоскости по методу Майора-Мизеса. В настоящей работе мы собираемся показать как можно решить задачи Федергофера и Винтера и ряд других задач также при помощи построений на одной плоскости, но не прибегая к методу Майора-Мизеса. Мы будем опираться на наши работы<sup>[5], [6]</sup>, в связи с чем предварительно кратко изложим основные положения работы<sup>[3]</sup>.

### § 1. Метод изображения и основные задачи

Выберем в пространстве произвольную плоскость — будем ее называть картинной плоскостью. В дальнейшем будем предполагать, что картинная плоскость совпадает с плоскостью чертежа.

Условимся изображать скользящий вектор  $\mathbf{R}$  в пространстве при помощи его ортогональной проекции  $\mathbf{R}'$  на картинную плоскость (картина вектора), точки пересечения его линии действия с картинной плоскостью (след вектора) и величины  $r$  его перпендикулярной к картинной плоскости составляющей (вес вектора). Весу  $r$  будем приписывать знак плюс, если вектор  $\mathbf{R}$  направлен вверх от картинной плоскости, и знак минус в противном случае. Вес  $r$  вектора будем надписывать на чертеже у следа этого вектора. Через  $r$  будем обозначать перпендикулярную к картинной плоскости составляющую вектора  $\mathbf{R}$ , приложенную в следе этого вектора.

Если на картинной плоскости задана система скользящих векторов  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \dots, \mathbf{R}_n$ , то нетрудно ее привести к простейшему виду. Для этого находим равнодействующую  $\mathbf{R}'$  картин  $\mathbf{R}'_1, \mathbf{R}'_2, \dots, \mathbf{R}'_n$  и центр тяжести  $r$  следов  $r_1, r_2, \dots, r_n$ , которому приписываем вес  $r$ , равный алгебраической сумме весов  $r_1, r_2, \dots, r_n$ .

Если точка  $r$  лежит на картине  $\mathbf{R}'$ , то данная система скользящих векторов эквивалентна вектору  $\mathbf{R}$  с картиной  $\mathbf{R}'$  и следом  $r$ . Если же точка  $r$  не лежит на картине  $\mathbf{R}'$ , то данная система векторов эквивалентна двум скрещивающимся под прямым углом векторам  $\mathbf{R}'$  и  $r$  — кресту векторов. Будем  $\mathbf{R}'$  называть картиной креста, а точку  $r$  с весом  $r$  — следом креста. Крест определяет собой мотор (винт) (см., например, Мизес<sup>[8]</sup>).

Условимся точку  $M$  пространства изображать при помощи ее ортогональной проекции  $m$  на картинную плоскость с приписанным этой проекции весом  $m$ , равным расстоянию точки  $M$  от картинной плоскости. Вес  $m$  будем снабжать знаком плюс, если  $M$  лежит над картинной плоскостью, и знаком минус, если  $M$  лежит под этой плоскостью.

Условимся прямую  $L$  пространства изображать при помощи орт-вектора  $l$ , лежащего на этой прямой и имеющего вес, равный  $+1$ . Значит прямая  $L$  определяется картиной  $l'$  орт-вектора и своим следом.

Пользуясь изложенным способом изображения на картинной плоскости векторов, точек и прямых, нетрудно решить следующие основные задачи.

Задача 1. Заданы векторы  $R_1(R_1', r_1)$  и  $R_2(R_2', r_2)$ . Найти их скалярное произведение.

Имеем:

$$R_1 \cdot R_2 = (R_1' + r_1)(R_2' + r_2) = R_1' \cdot R_2' + r_1 r_2$$

т. е. скалярное произведение двух векторов равно произведению их картин плюс произведение весов.

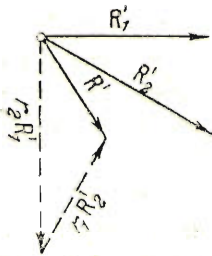
Задача 2. Заданы векторы  $R_1(R_1', r_1)$  и  $R_2(R_2', r_2)$ . Найти их векторное произведение  $R$ . (Здесь и в дальнейшем будем пользоваться правой системой координат). Имеем:

$$R = R_1 \times R_2 = (R_1' + r_1) \times (R_2' + r_2) = R_1' \times r_2 + r_1 \times R_2' + R_1' \times R_2';$$

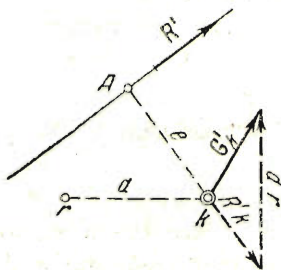
откуда находим:

$$R' = R_1' \times r_2 + r_1 \times R_2' \quad \text{и} \quad r = \pm R_1' R_2' \sin(R_1', R_2').$$

Отсюда вытекает простой способ построения картины векторного произведения (фиг. 1). Проводим составляющую  $R_1' \times r_2$  перпендикулярно к  $R_1'$ , а затем составляющую  $r_1 \times R_2'$  перпендикулярно к  $R_2'$ . Замыкающая  $R'$  дает картину искомого векторного произведения. Вес его равен удвоенной площади треугольника, образованного картинками  $R_1'$  и  $R_2'$  (с соответствующим знаком).



Фиг. 1



Фиг. 2

Задача 3. Заданы крест  $R(R', r)$  и полюс  $K$  с весом  $k$  (фиг. 2). Найти момент  $G_K$  креста  $R$  относительно полюса  $K$ .

Имеем:

$$G_K = (\overline{Kk} + \overline{kA}) \times R' + (\overline{Kk} + \overline{kr}) \times r = \overline{kr} \times r + \overline{Kk} \times R' + \overline{kA} \times R',$$

где  $\overline{kA}$  — перпендикуляр, опущенный из  $k$  на  $R'$ . Первые два члена правой

части определяют собой картину  $G_K'$  искомого момента, а последний член — вес  $g_K$  этого момента. Так как

$$|\overline{kr} \times \mathbf{r}| = rd, \quad |\overline{Kk} \times \mathbf{R}'| = kR', \quad g_K = \pm |\overline{kA} \times \mathbf{R}'| = \pm eR',$$

то построить эти векторы не представляет труда.

Задача 4. Задан крест  $\mathbf{R}(\mathbf{R}', r)$  (фиг. 3).

Найти его центральную ось, инвариант и параметр.

Как известно, центральная ось креста разделяет кратчайшее расстояние между осями векторов креста на части, пропорциональные тангенсам углов между этими векторами и центральной осью. Пусть это кратчайшее расстояние равно  $d$ . Угол наклона центральной оси к картинной плоскости получается из равенства  $\operatorname{tg} \alpha = r/R'$ ; следовательно, тангенсы углов, составляемых центральной осью с векторами  $\mathbf{R}'$  и  $\mathbf{r}$ , равны соответственно  $r/R'$  и  $R'/r$ , откуда отношение отрезков, на которые расстояние  $d$  разделяется центральной осью, равно  $r^2/R'^2$ . Из сказанного вытекает простой способ построения картины центральной оси  $L$ , представленной на чертеже. След  $S$  центральной оси находится на перпендикуляре  $d$ . Длина  $l'$  картины орт-вектора, лежащего на центральной оси, определится из уравнения:

$$\operatorname{tg} \alpha = l'/l = r/R';$$

откуда

$$l' = R'/r.$$

Инвариант  $J$  креста равен скалярному произведению главного вектора на главный момент, взятый относительно произвольного полюса. Возьмем за полюс след  $r$ . Имеем:

$$J = (\mathbf{R}' + \mathbf{r}) \cdot \mathbf{G}_r;$$

но момент  $\mathbf{G}_r$  направлен перпендикулярно к картинной плоскости и равен по длине  $dR'$ . Отсюда следует, что

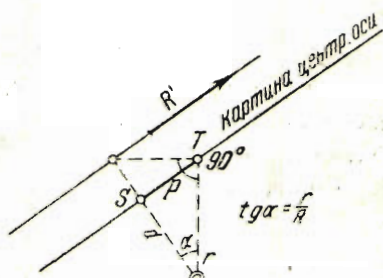
$$J = \pm rdR',$$

т. е. инвариант креста равен моменту картины креста вокруг следа, умноженному на вес.

Параметр  $p$  креста равен отношению минимального момента креста к величине главного вектора или отношению инварианта к квадрату главного вектора. Следовательно,

$$p = \frac{\pm rdR'}{R'^2 + r^2} = \pm \frac{rd/R'}{1 + r^2/R'^2} = \pm d \sin \alpha \cos \alpha.$$

Отсюда следует, что параметр  $p$  как раз равен отрезку  $ST$  на фиг. 3.



Фиг. 3

Задача 5. Задан мотор при помощи главного вектора  $\mathbf{V}(\mathbf{V}', v)$ , лежащего на центральной оси, и параметра  $p$ . Найти момент  $\mathbf{G}_K$  мотора относительно полюса  $K$ .

Имеем:

$$\mathbf{G}_K = p \mathbf{V} + \text{mom}_K \mathbf{V}.$$

Первое слагаемое известно, а второе легко находим по правилу задачи 3.

Задача 6. Заданы центральная ось  $L$  мотора и его параметр  $p$ . Задан также момент  $\mathbf{G}_K$  этого мотора относительно полюса  $K$ . Найти главный вектор  $\mathbf{V}$  мотора.

Очевидно, что

$$\mathbf{V} = x \mathbf{l},$$

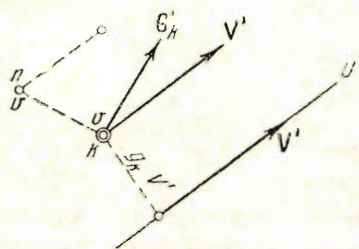
где  $x$  — неизвестный скаляр, а  $\mathbf{l}$  — орт-вектор на центральной оси. Имеем:

$$\mathbf{G}_K = x(p \mathbf{l} + \text{mom}_K \mathbf{l}),$$

отсюда легко находим  $x$ , так как  $\mathbf{G}_K$  задан,  $p \mathbf{l}$  известно, а момент орта  $\mathbf{l}$  легко можем построить по правилу задачи 3.

Задача 7. Заданы главный вектор  $\mathbf{V}(\mathbf{V}', v)$  и главный момент  $\mathbf{G}_K(\mathbf{G}_K', g_K)$  мотора относительно полюса  $K$  с весом  $k$ . Найти центральную ось.

Рассмотрим сначала случай  $k=0$  (фиг. 4).



Фиг. 4

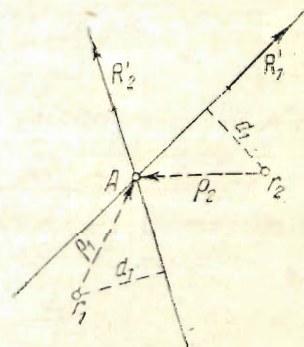
Момент  $\mathbf{G}_K'$  можно рассматривать как момент пары вертикальных векторов  $(v, -v)$  с плечом  $G_K':v$ . Передвинем эту пару так, чтобы один из ее векторов попал в точку  $n$  и уравновесил там вес  $v$  главного вектора. После этого останется вес  $v$  в точке  $n$ . Момент  $\mathbf{g}_K$  можно рассматривать как момент пары  $(\mathbf{V}', -\mathbf{V}')$  с плечом  $g_K':\mathbf{V}'$ . Передвинем эту пару так, чтобы один из ее векторов уравновесил картину

$\mathbf{V}'$  главного вектора. После этого останется вектор  $\mathbf{V}'$  на прямой  $U$ , который вместе с  $v$  в  $n$  определяет крест векторов. Нетрудно теперь найти центральную ось этого креста по правилу задачи 4.

Случай  $k \neq 0$  сводится к рассмотренному случаю, если перенести горизонтальную составляющую главного вектора в картинную плоскость, присоединив при этом дополнительную пару. Это вызовет только дополнительный сдвиг точки  $n$  параллельно оси  $U$  на величину  $kV':v$ .

Задача 8. Заданы два креста  $\mathbf{R}_1(\mathbf{R}_1', r_1)$  и  $\mathbf{R}_2(\mathbf{R}_2', r_2)$  (фиг. 5). Найти их взаимный момент.

Взаимным моментом двух крестов или моторов (скалярным произведением моторов по терминологии Мизеса) называется число, равное сумме



Фиг. 5

скалярных произведений главного вектора первого мотора на главный момент второго и главного вектора второго мотора на главный момент первого, причем оба главных момента берутся относительно одного и того же полюса.

Выберем полюс в точке  $A$  пересечения картин обоих крестов. Тогда для взаимного момента получим выражение:

$$\begin{aligned} (\mathbf{R}_1' + \mathbf{r}_1)(\mathbf{r}_2 \times \rho_2) + (\mathbf{R}_2' + \mathbf{r}_2)(\mathbf{r}_1 \times \rho_1) &= \mathbf{R}_1' \cdot (\mathbf{r}_2 \times \rho_2) + \mathbf{R}_2' \cdot (\mathbf{r}_1 \times \rho_1) = \\ &= \mathbf{r}_2 \cdot (\rho_2 \times \mathbf{R}_1') + \mathbf{r}_1 \cdot (\rho_1 \times \mathbf{R}_2') = \mathbf{r}_2 \cdot \text{mom}_{r_2} \mathbf{R}_1' + \mathbf{r}_1 \cdot \text{mom}_{r_1} \mathbf{R}_2' = \\ &= \pm r_2 d_2 R_1' \pm r_1 d_1 R_2', \end{aligned}$$

т. е. искомый взаимный момент равен моменту картины первого креста вокруг следа второго, умноженному на вес второго, плюс момент картины второго креста вокруг следа первого, умноженный на вес первого.

Задача 9. Определение взаимных крестов (моторов)<sup>1</sup>.

Два креста (мотора), взаимный момент которых равен нулю, назовем взаимными крестами (моторами).

Для того чтобы два креста были взаимными, очевидно, достаточно, чтобы картина первого креста проходила через след второго, а картина второго через след первого.

Чтобы крест  $\mathbf{R}_{12}$  был взаимным с двумя крестами  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_2$ , достаточно, чтобы его картина  $\mathbf{R}_{12}'$  проходила через следы  $r_1$  и  $r_2$ , а его след  $r_{12}$  лежал на пересечении картин  $\mathbf{R}_1'$  и  $\mathbf{R}_2'$ . Отношение  $r_{12}$  к  $R_{12}'$  при этом может быть произвольно.

Крест  $\mathbf{R}_{123}$ , взаимный с тремя данными крестами  $\mathbf{R}_1, \mathbf{R}_2, \mathbf{R}_3$ , можно построить следующим образом: сначала находим крест  $\mathbf{R}_{12}$ , взаимный с двумя первыми. Затем, составив выражение взаимного момента  $\mathbf{R}_{12}$  и  $\mathbf{R}_3$  и приравняв его нулю, получим уравнение с одним неизвестным, из которого определится отношение  $r_{12} : R_{12}'$ . Можно изменить порядок решения, а именно начать с крестов  $\mathbf{R}_1$  и  $\mathbf{R}_3$  или с крестов  $\mathbf{R}_2$  и  $\mathbf{R}_3$ . При этом будут получаться различные кресты  $\mathbf{R}_{123}$  и  $\mathbf{R}_{321}$ , взаимные с тремя данными. Всего таких различных крестов будет три. Всякая их линейная комбинация снова составит крест, взаимный с тремя данными.

Чтобы построить крест, взаимный с четырьмя данными, строим сперва три креста, взаимных с тремя из данных. Затем составляем линейную комбинацию из двух найденных крестов с неизвестным параметром. Этот параметр определим из условия, что построенная линейная комбинация взаимна с четвертым заданным крестом. Ясно, что таким путем можно построить всего два креста, взаимных с четырьмя данными.

Чтобы построить крест, взаимный с пятью данными крестами, строим сперва два креста, взаимных с четырьмя из данных. Затем составляем линейную комбинацию из построенных двух крестов с неизвестным параметром. Этот параметр определится из условия, что построенная линейная комбинация взаимна с пятым заданным крестом. Этим определяется крест, взаимный с пятью данными крестами. Такой крест — единственный (с точностью до скалярного множителя), если данные пять крестов линейно независимы.

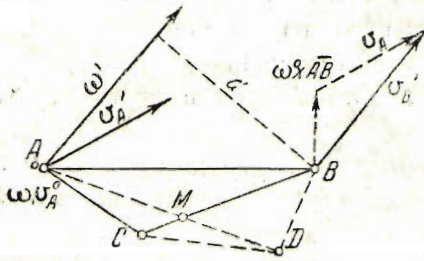
<sup>1</sup> См. также статью Б. Н. Горбунова<sup>[4]</sup>, в которой автор определяет взаимные моторы, пользуясь методом изображения Майора-Мизеса.

§ 2. Кинематика пространственного движения одного твердого тела

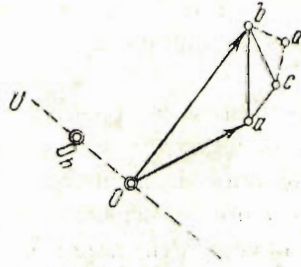
Изложенное в предыдущем параграфе позволяет дать простое графическое решение многих задач пространственной кинематики твердого тела. Рассмотрим здесь некоторые задачи, которые Федергофер<sup>III</sup> решал методом Майора-Мизеса.

Задача 10. Заданы скорость  $v_A$  точки  $A$  твердого тела и мгновенная угловая скорость  $\omega$ . Построить мгновенную винтовую ось.

Решение этой задачи легко проводится по правилу задачи 7, если принять во внимание, что  $\omega$  представляет собой главный вектор мотора скоростей, а  $v_A$  — главный момент этого мотора относительно точки  $A$ .



Задача 11. Заданы скорость  $v_A$  ( $v'_A, v''_A$ ) точки  $A$  твердого тела и угловая скорость  $\omega$  ( $\omega', \omega''$ ), где  $v'_A$  и  $\omega'$  — картины, а  $v''_A$  и  $\omega''$  — веса векторов  $v_A$  и  $\omega$  (фиг. 6). Точка  $A$  лежит в картинной плоскости. Построить план скоростей.



Фиг. 6

Рассмотрим сначала скорости тех точек данного тела, которые лежат в картинной плоскости. Для произвольной точки  $B$  этой плоскости имеем:

$$v_B = v_A + \omega \times \overline{AB} = v'_A + v''_A + \omega' \times \overline{AB} + \omega'' \times \overline{AB},$$

откуда определяются картина  $v'_B$  и вес  $v''_B$  скорости  $v_B$ :

$$v'_B = v'_A + \omega' \times \overline{AB}, \quad v''_B = v''_A \pm \omega' d,$$

где  $d$  — перпендикуляр, опущенный из  $B$  на  $\omega'$ , а знак произведения  $\omega' d$  зависит от направления вектора  $\omega' \times \overline{AB}$ .

Отстроим картины скоростей точек  $A, B, C, \dots$  тела от одной точки  $O$  и обозначим концы этих картин через  $a, b, c, \dots$  соответственно. Легко видеть, что план скоростей  $a, b, c, \dots$  представляет собой фигуру, подобную фигуре  $A, B, C, \dots$  и повернутую относительно ее на  $90^\circ$ . Надпишем на плане скоростей у точек  $a, b, c, \dots$  веса скоростей  $v''_A, v''_B, v''_C, \dots$ . Этим полностью определяются скорости точек тела, лежащих в картинной плоскости.

Покажем, что план скоростей  $a, b, c$ , построенный для трех точек  $A, B$  и  $C$  тела, полностью определяет собой скорости всех точек этого тела. Пусть, например, требуется построить скорость точки  $D$  (фиг. 6). Проведем  $bd \perp BD$  и  $cd \perp CD$ . Пересечение этих прямых определит точку  $d$ , чем

определилась картина  $Od$  скорости точки  $D$ . Остается найти вес  $v_D^{\circ}$ . Для этого найдем точку  $M$  пересечения прямых  $AD$  и  $BC$  и воспользуемся линейным законом распределения весов. Имеем:

$$\frac{v_C^{\circ} - v_M^{\circ}}{v_M^{\circ} - v_B^{\circ}} = \frac{CM}{MB} \quad \text{и} \quad \frac{v_A^{\circ} - v_M^{\circ}}{v_M^{\circ} - v_D^{\circ}} = \frac{AM}{MD},$$

откуда определяем:

$$v_M^{\circ} = \frac{v_C^{\circ} MB + v_B^{\circ} CM}{BC} \quad \text{и} \quad v_D^{\circ} = \frac{v_M^{\circ} AD - v_A^{\circ} MD}{AM}.$$

Нетрудно это вычисление провести и графически (фиг. 7).

Рассмотрим теперь построение скоростей точек, не лежащих в картинной плоскости. Здесь можно воспользоваться тем, что все точки на прямой, параллельной  $\omega$ , имеют одинаковые скорости. Но это требует построений, выходящих из пределов картинной плоскости, а потому мы пойдем другим путем.

Рассмотрим плоскость  $Q$ , параллельную картинной плоскости и отстоящую от нее на  $h$ . Возьмем в плоскости  $Q$  произвольную точку  $M$ . Пусть ее проекция на картинную плоскость будет  $N$ . Имеем:

$$v_M = v_N + \omega \times h = v_N' + v_N^{\circ} + \omega' \times h,$$

где  $h = \overline{NM}$ .

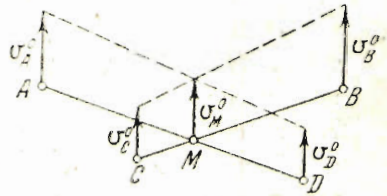
Отсюда следует, что

$$v_M' = v_N' + \omega' \times h, \quad v_M^{\circ} = v_N^{\circ}.$$

Значит, веса скоростей точек плоскости  $Q$  такие же, как и веса скоростей соответствующих точек картинной плоскости. Что же касается картин скоростей точек плоскости  $Q$ , то они отличаются на постоянный вектор  $\omega' \times h$  от картин скоростей соответствующих точек в картинной плоскости. Поэтому можно для картин скоростей точек плоскости  $Q$  сохранить тот же план скоростей, если сдвинуть полюс  $O$  плана по прямой  $U$ , перпендикулярной к  $\omega'$ , в точку  $O_h$  на расстояние  $\overline{OO_h} = -\omega' \times h$ , причем  $\overline{OO_h} = \omega' h$ . Таким образом один раз построенный план скоростей для точек картинной плоскости определяет собой скорости всех точек тела при переменном полюсе  $O_h$ , положение которого легко находится в зависимости от высоты  $h$  точки над картинной плоскостью.

Задача 12. Твердое тело движется в пространстве так, что пять его точек  $A, B, C, D$  и  $E$  движутся по заданным поверхностям (Fünfpunktführung по Федергоферу). Известна величина скорости точки  $A$ . Найти скорости точек  $B, C, D$  и  $E$ .

Как известно (см. Мизес<sup>[8]</sup>), взаимный момент мотора сил и мотора бесконечно малых перемещений представляет собой работу сил на этих



Фиг. 7

перемещениях. Поэтому взаимный момент мотора перемещений и нормальной реакции каждой из данных пяти поверхностей должен быть равен нулю; т. е. мотор перемещений данного тела (а значит, и мотор скоростей) взаимен с реакцией каждой из данных поверхностей. Поэтому можем найти мотор скоростей  $\mathbf{R}$  как мотор взаимный с пятью векторами, направленными по нормальям к данным поверхностям в точках  $A, B, C, D$  и  $E$ . Это нетрудно сделать по правилам задачи 9. Конечно, этим мотор  $\mathbf{R}$  определится только с точностью до постоянного множителя. Этот последний множитель легко найти по правилу задачи 6, зная скорость  $v_A$ . Определив мотор  $\mathbf{R}$ , легко найдем скорости точек  $B, C, D$  и  $E$  как моменты мотора  $\mathbf{R}$  относительно этих точек (задача 3).

Задача 13. Твердое тело движется в пространстве так, что три его точки  $A, B$  и  $C$  движутся по заданным поверхностям, а точка  $D$  — по заданной кривой (Vierpunktführung по Федергоферу). Известна скорость точки  $D$ . Найти скорости точек  $A, B$  и  $C$ .

Рассмотрим какие-нибудь две нормали в точке  $D$  к траектории этой точки и три нормали к поверхностям в точках  $A, B$  и  $C$ . Задача решается совершенно аналогично предыдущей.

Задача 14. Твердое тело движется в пространстве так, что одна его точка  $A$  движется по заданной поверхности, а точки  $B$  и  $C$  по заданным кривым (Dreipunktführung по Федергоферу). Известна скорость точки  $C$ . Найти скорости точек  $A$  и  $B$ .

Задача решается совершенно аналогично предыдущей, если в рассмотрение ввести одну нормаль в точке  $A$  и по две нормали в точках  $B$  и  $C$ .

Задача 15. Для точки  $A$ , лежащей в картинной плоскости, задана скорость  $\mathbf{v}_A$  ( $v_A', v_A^\circ$ ) и ускорение  $\mathbf{a}_A$  ( $a_A', a_A^\circ$ ). Даны также угловая скорость  $\omega$  ( $\omega', \omega^\circ$ ) и угловое ускорение  $\varepsilon$  ( $\varepsilon', \varepsilon^\circ$ ) (фиг. 8). Построить план ускорений.

Рассмотрим сначала ускорения тех точек твердого тела, которые лежат в картинной плоскости. Для произвольной точки  $B$  имеем:

$$\mathbf{a}_B = \mathbf{a}_A + \varepsilon \times \overline{AB} + \omega \times (\omega \times \overline{AB}) = \mathbf{a}_A' + \mathbf{a}_A^\circ + \varepsilon' \times \overline{AB} + \varepsilon^\circ \times \overline{AB} + \omega' (\omega \cdot \overline{AB}) + \omega^\circ (\omega \cdot \overline{AB}) - \omega^2 \overline{AB}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mathbf{a}_B' &= \mathbf{a}_A' + \varepsilon^\circ \times \overline{AB} + \omega' (\omega \cdot \overline{AB}) - \omega^2 \overline{AB}, \\ \mathbf{a}_B^\circ &= \mathbf{a}_A^\circ + \varepsilon' \times \overline{AB} + \omega^\circ (\omega \cdot \overline{AB}). \end{aligned}$$

Пользуясь этим уравнением, нетрудно построить картину  $\mathbf{a}_B'$  и векс  $\mathbf{a}_B^\circ$  ускорения  $\mathbf{a}_B$ . Из этих уравнений следует, что картины и веса изменяются по линейному закону при перемещении точки  $B$  по прямой  $AB$ .

Отстроим ускорения всех точек прямой  $AB$  от некоторого полюса  $P$ .

Концы ускорений образуют прямую  $ab$ . Ясно, что точке  $K$  на прямой  $AB$  будет соответствовать точка  $k$  на прямой  $ab$  так, что

$$AK: BK = ak: bk,$$

т. е. ряды точек на прямых  $AB$  и  $ab$  будут подобны.



Рассмотрим теперь прямую  $MN$  в теле, параллельную  $AB$ . Пусть  $AM \parallel BN$ . Тогда  $\overline{AM} = \overline{BN} = \mathbf{r}$  и

$$\mathbf{a}_M = \mathbf{a}_A + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}),$$

$$\mathbf{a}_N = \mathbf{a}_B + \varepsilon \times \mathbf{r} + \omega \times (\omega \times \mathbf{r}).$$

Откуда

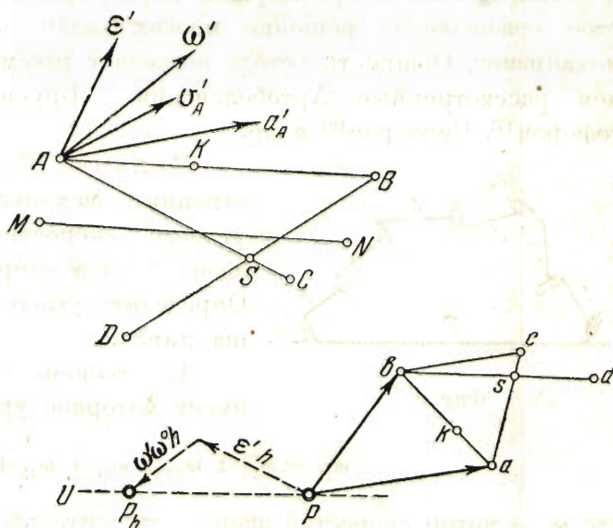
$$\mathbf{a}_M - \mathbf{a}_A = \mathbf{a}_N - \mathbf{a}_B,$$

т. е.  $\overline{am} = \overline{bn}$  и прямая  $mn$  будет параллельна  $ab$ . Из всего вышесказанного следует, что точки  $a, b, c, \dots$  на плане ускорений находятся в аффинном соответствии с точками  $A, B, C, \dots$  на теле.

Так как аффинное соответствие вполне определяется тремя парами соответствующих точек, то достаточно на плане ускорений построить ускорение трех точек тела, чтобы этим определить ускорения всех его точек.

Пусть для точек  $A, B$  и  $C$  построены на плане ускорений соответственные точки  $a, b$  и  $c$ . Покажем, как для точки  $D$  тела построить на плане соответственную точку  $d$  (фиг. 8). Найдем точку  $S$  пересечения прямых  $AC$  и  $BD$ . На прямой  $ac$  найдем точку  $s$ , делящую  $ac$  в том же отношении, в каком  $S$  делит  $AC$ . Искомая точка  $d$  лежит на прямой  $bs$ . Отрезок  $ds$  найдем из пропорции:

$$ds : bs = DS : BS.$$



Фиг. 8

Вес ускорения точки  $D$  строится по весам ускорений в точках  $A, B, C$  точно так же, как на фиг. 7 это сделано для скоростей.

Рассмотрим теперь ускорения точек тела, лежащих в плоскости  $Q$ , параллельной картинной плоскости и отстоящей от нее на  $h$ . Возьмем в плоскости  $Q$  произвольную точку  $E$ . Пусть ее проекция на картинную плоскость будет  $F$ . Имеем:

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_F + \varepsilon \times \mathbf{h} + \omega \times (\omega \times \mathbf{h}) \quad (\mathbf{h} = \overline{FE}),$$

или

$$\mathbf{a}_E = \mathbf{a}_F' + \mathbf{a}_E^\circ + \varepsilon' \times \mathbf{h} + \omega' (\omega' h) - \mathbf{h} \omega'^2.$$

Значит,

$$\mathbf{a}_E' = \mathbf{a}_F' + \varepsilon' \times \mathbf{h} + \omega' (\omega' h), \quad \mathbf{a}_E^\circ = \mathbf{a}_F^\circ - \mathbf{h} \omega'^2.$$

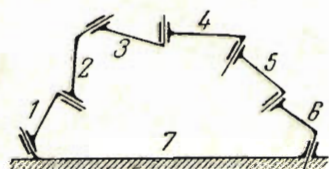
Отсюда следует, что при переходе от картинной плоскости к плоскости  $Q$  к картинкам ускорений точек прибавляется постоянный вектор  $\epsilon' \times \mathbf{h} + \omega'(\omega^\circ \mathbf{h})$ , а к весам ускорений — постоянное число  $h\omega'^2$ . Значит, чтобы сохранить план ускорений, построенный для точек картинной плоскости, достаточно полюс  $P$  этого плана сдвинуть по некоторой прямой  $U$  в точку  $PP_h$ , определяемую вектором:

$$\overline{PP_h} = -\epsilon' \times \mathbf{h} - \omega'(\omega^\circ \mathbf{h}).$$

Пользуясь этим, можно определять ускорения произвольных точек данного тела.

### § 3. Некоторые задачи кинематики пространственных механизмов

Изложенное в предыдущих параграфах позволяет дать достаточно простое графическое решение многих задач кинематики пространственных механизмов. Общность метода позволяет рассмотреть более сложные задачи, чем рассмотренные Артоблевым<sup>[1]</sup>, Бруевичем<sup>[2]</sup>, Барановым<sup>[3]</sup>, Федергофером<sup>[7]</sup>, Винтером<sup>[9]</sup> и др.



Фиг. 9

Задача 16. Дан семизвенный пространственный механизм 1234567 (фиг. 9). Задана угловая скорость  $\omega_{17}$  звена 1 относительно звена 7 (она направлена по оси шарнира 17). Определить угловые скорости во всех остальных шарнирах.

По теореме сложения угловых скоростей имеем моторное уравнение:

$$\omega_{17} = \omega_{12} + \omega_{23} + \omega_{34} + \omega_{45} + \omega_{56} + \omega_{67} \quad (1)$$

где  $\omega_{ik}$  — мотор скоростей звена  $i$  относительно звена  $k$ . Положим:

$$\omega_{ik} = x_i \mathbf{l}_i,$$

где  $\mathbf{l}_i$  есть орт-мотор оси шарнира  $ik$  (вес  $\mathbf{l}_i^\circ = +1$ ).

Уравнение (1) переписется в следующем виде:

$$\omega_{17} = x_1 \mathbf{l}_1 + x_2 \mathbf{l}_2 + x_3 \mathbf{l}_3 + x_4 \mathbf{l}_4 + x_5 \mathbf{l}_5 + x_6 \mathbf{l}_6. \quad (1')$$

Задача сводится к определению шести скаляров  $x_1, x_2, \dots, x_6$ .

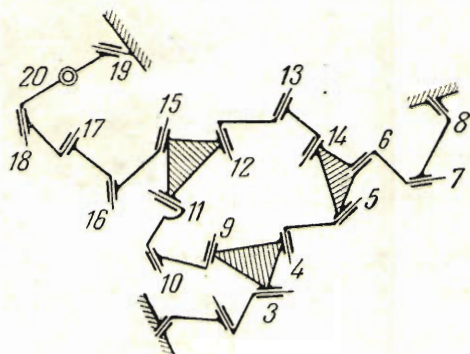
Найдем по правилам задачи 9 моторы  $\mathbf{R}_{123}$ ,  $\mathbf{R}_{1234}$  и  $\mathbf{R}_{12345}$ , взаимные ортам  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3$ , ортам  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4$  и ортам  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \mathbf{l}_3, \mathbf{l}_4, \mathbf{l}_5$  соответственно. Умножим скалярно уравнение (1') на мотор  $\mathbf{R}_{12345}$ . В правой части получим сумму взаимных моментов мотора  $\mathbf{R}_{12345}$  и ортов  $\mathbf{l}_1, \mathbf{l}_2, \dots, \mathbf{l}_6$ . Так как первые пять из этих шести взаимных моментов равны нулю, то будем иметь уравнение с одним неизвестным:

$$\omega_{17} \cdot \mathbf{R}_{12345} = x_6 (\mathbf{l}_6 \cdot \mathbf{R}_{12345}),$$

откуда определим  $x_6$ . Умножив затем уравнение (1') скалярно на  $\mathbf{R}_{1234}$  и на  $\mathbf{R}_{123}$ , определим  $x_5$  и  $x_4$ . После этого уже нетрудно найти  $x_1$ ,  $x_2$  и  $x_3$  из условия равновесия картин моторов скоростей, пользуясь, например, построением веревочного многоугольника или каким-либо другим приемом плоской статики.

Задача 17. Дан 17-звенный пространственный механизм (фиг. 10). Задана угловая скорость  $\omega_1$  в шарнире 1. Определить угловые скорости во всех остальных шарнирах.

Разрежем звено (18, 19) на две части и введем дополнительный шарнир 20, связывающий между собой эти части. Этим преобразуем данный механизм в механизм с двумя степенями свободы. Для моторов угловых скоростей составим три уравнения:



Фиг. 10

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8, \quad (2)$$

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_9 + \omega_{10} + \omega_{11} + \omega_{12} + \omega_{13} + \omega_{14} + \omega_6 + \omega_7 + \omega_8, \quad (3)$$

$$\omega_1 = \omega_2 + \omega_3 + \omega_9 + \omega_{10} + \omega_{11} + \omega_{15} + \omega_{16} + \omega_{17} + \omega_{18} + \omega_{20} + \omega_{19}. \quad (4)$$

Решение проведем в два приема

I. Положим во всех уравнениях  $\omega_2 = 0$ . Тогда в уравнении (2) будет только шесть неизвестных (они подчеркнуты) и это уравнение можно решить аналогично тому, как это сделано в задаче 16. После этого перейдем к уравнению (3), а затем к уравнению (4). Так как каждый раз будем иметь дело с шестью неизвестными, то сможем эти уравнения решить также по образцу задачи 16. Обозначим полученные решения уравнений (2), (3) и (4) через  $\omega_i^I$  ( $i=3, 4, \dots, 20$ ).

II. Положим  $\omega_1 = 0$ ,  $\omega_2 = 1$  в уравнениях (2), (3) и (4). Решив эти уравнения аналогично предыдущему, получим решения:

$$\omega_i^{II}, \quad (i=3, 4, \dots, 20).$$

Ясно, что уравнениям (2), (3) и (4) будет удовлетворять линейная комбинация решений I и II

$$\omega_i^I + k\omega_i^{II}$$

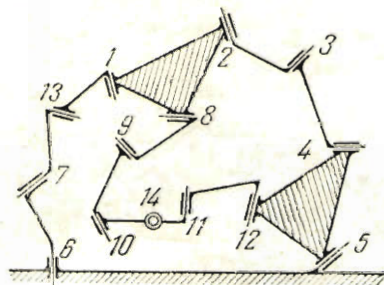
при любом значении множителя  $k$ . Определив этот множитель из условия, что угловая скорость в дополнительном шарнире 20 равна нулю:

$$\omega_{20}^I + k\omega_{20}^{II} = 0,$$

мы узнаем искомые угловые скорости во всех шарнирах.

Аналогично можно решать и еще более сложные механизмы (см. [6], § 24). Этот же метод можно перенести на определение ускорений пространственных механизмов.

Проведем теперь во всех подробностях решение одной задачи на определение скоростей в сложном 12-звенном пространственном механизме.



Фиг. 11

Задача 18. Дан 12-звенный пространственный механизм согласно схеме на фиг. 11. Оси шарниров 1, 2, ..., 13 изображены в двух проекциях на фиг. 12 а, б. Задана угловая скорость в шарнире 13. Найти угловые скорости во всех шарнирах.

Для простоты ограничимся определением угловой скорости в одном из шарниров, например, в шарнире 4.

Имеем:

$$\omega_{13} = \omega_1 + \omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_5 + \omega_6 + \omega_7, \quad (5)$$

где  $\omega_i$  есть мотор угловой скорости в шарнире  $i$ .

Введем дополнительную винтовую пару 14, разрезав звено (10, 11) (выбор этой пары уточним в дальнейшем). Имеем еще уравнение:

$$\omega_2 + \omega_3 + \omega_4 + \omega_{12} + \omega_{11} + \omega_{14} + \omega_{10} + \omega_9 + \omega_8 = 0. \quad (6)$$

I. Положив  $\omega_4 = 0$  в уравнениях (5) и (6), определим  $\omega_2^I$  и  $\omega_3^I$  из уравнения (5).

Выберем теперь винтовую пару 14 так, чтобы

$$\omega_{14}^I = -(\omega_2^I + \omega_3^I);$$

тогда, если моторы  $\omega_{14}$ ,  $\omega_8$ ,  $\omega_9$ ,  $\omega_{10}$ ,  $\omega_{11}$  и  $\omega_{12}$  линейно независимы (в противном случае решение задачи невозможно), из уравнения (6) получим:

$$\omega_{12}^I = \omega_{11}^I = \omega_{10}^I = \omega_9^I = \omega_8^I = 0.$$

II. Положим  $\omega_{13} = 0$ ,  $\omega_4 = 1$  в уравнениях (5) и (6). Из уравнения (5) найдем  $\omega_2^{II}$  и  $\omega_3^{II}$ , после чего в уравнении (6) останутся только шесть неизвестных, для которых мы получим значения  $\omega_8^{II}$ ,  $\omega_9^{II}$ ,  $\omega_{10}^{II}$ ,  $\omega_{11}^{II}$ ,  $\omega_{12}^{II}$ ,  $\omega_{14}^{II}$ .

Общий вид решений системы уравнений (5) и (6) будет:

$$\omega_i = \omega_i^I + k\omega_i^{II}.$$

Множитель  $k$  найдем из условия:

$$\omega_{14} = \omega_{14}^I + k\omega_{14}^{II} = 0.$$

Искомая угловая скорость  $\omega_4$  найдется из уравнения:

$$\omega_4 = \omega_4^I + k\omega_4^{II} = k,$$

так как

$$\omega_4^I = 0, \quad \omega_4^{II} = 1.$$

Для графического выполнения вышеуказанного решения (фиг. 12) введем в рассмотрение орты  $I_1, I_2, \dots, I_{13}$  осей шарниров. Пусть угловая скорость  $\omega_{13} = I_{13}$  ( $\omega_{13}^I = 1, \omega_{13}^{II} = 0$ ,  $\omega_{13}^{\text{III}} = 1$ ).

Угловая скорость в  $i$ -м шарнире выразится так:

$$\omega_i = x_i I_i \quad (i=1, 2, \dots, 12),$$

где  $x_i$  — скалярные множители, подлежащие определению. Уравнения (5) и (6) примут при этом вид:

$$\omega_{13} = x_1 I_1 + x_2 I_2 + x_3 I_3 + x_4 I_4 + x_5 I_5 + x_6 I_6 + x_7 I_7, \quad (5')$$

$$x_2 I_2 + x_3 I_3 + x_4 I_4 + x_8 I_8 + x_9 I_9 + x_{10} I_{10} + x_{11} I_{11} + x_{12} I_{12} + x_{14} I_{14} = 0, \quad (6')$$

где  $I_{14}$  есть орт-мотор винтовой пары 14.

Определяем из уравнения (5') угловые скорости  $\omega_2$  и  $\omega_3$ , для чего находим крест  $R_{56712}$ , взаимный с ортами осей 5, 6, 7, 1, 2, и крест  $R_{56713}$ , взаимный с 5, 6, 7, 1, 3. Определение взаимных моторов делается постепенно. Сначала находим орт-мотор  $R_{567}$ , взаимный с 5, 6 и 7. Его картина проходит через следы осей 5 и 6, а след лежит на пересечении картин осей 5 и 6. Величина  $R'_{567}$  находится из уравнения:

$$+ R'_{567} \times 3.0 - 1.45 \times 2.6 = 0, \quad R'_{567} = 1.256.$$

Аналогично определяются орт-кресты  $R_{576}$  и  $R_{675}$ , взаимные с ортами  $I_5, I_6$ , и  $I_7$ :

$$- R'_{576} \cdot 4.75 + 1.50 \times 3.1 = 0, \quad R'_{576} = 0.98,$$

$$- R'_{675} \cdot 4.1 + 2.83 \times 6.85 = 0, \quad R'_{675} = 4.73.$$

Составляем линейную комбинацию  $R_{567} + \lambda R_{576}$ , подчиняя ее условию взаимности с ортом  $I_1$ :

$$+ 1.256 \times 3.3 - 0.84 \times 7.1 + (+0.98 \times 3.7 - 0.84 \times 5.0) \lambda = 0.$$

Откуда  $\lambda = -3.12$ .

Крест  $R_{567}$  графически складываем с крестом  $R_{576}$ , умноженным на  $-3.12$ , после чего получим крест  $R_{5671}$ , взаимный с ортами  $I_5, I_6, I_7$  и  $I_1$  (фиг. 12 б). Величины геометрических составляющих картины креста  $R_{5671}$  суть  $1.256$  и  $-3.12 \times 0.98 = -3.06$ ; величина геометрической суммы графически получена равной  $1.07$ . На фиг. 12 б проводим  $R'_{5671}$  через точку пересечения  $R'_{567}$  с  $R'_{576}$ . Комбинация весов равна  $1 - 3.12 = -2.12$ . После приведения к орту получаем:

$$R'_{5671} = 1.07 : (-2.12) = -0.505.$$

Положение  $r_{5671}$  находим на прямой, соединяющей  $r_{567}$  с  $r_{576}$ .

Составляем линейную комбинацию  $R_{576} + \mu R_{675}$  и аналогично находим крест  $R_{6751}$ , взаимный с ортами  $I_5, I_6, I_7$  и  $I_1$ . Для определения  $\mu$  имеем уравнение:

$$+ 0.98 \times 3.7 - 0.84 \times 5.0 + (-4.73 \times 2.8 - 0.84 \times 3.0) \mu = 0.$$

Откуда  $\mu = -0.0368$ .

Геометрические составляющие картины креста  $R_{6751}$  имеют величины  $0.98$  и  $-0.0368 \times 4.73 = -0.178$  (фиг. 12 в). Комбинация весов равна  $1 - 0.178 \times 1 = 0.822$ , а величина  $R'_{6751}$  картины креста после приведения к орту

$$R'_{6751} = 0.98 : 0.822 = 1.19.$$

Итак, имеем два различных креста, взаимных с ортами  $l_5, l_6, l_7$  и  $l_1$ . Составляем их линейную комбинацию  $R_{5671} + \nu R_{6751}$  и подчиняем ее условию взаимности с ортом  $l_2$ :

$$-0.505 \times 9.15 + 0.84 \times 1.68 + (+1.19 \times 2.20 + 0.84 \times 0.5) \nu = 0.$$

Откуда  $\nu = 1.055$ .

Комбинируем графически кресты  $R_{5671}$  и  $R_{6751}$  (фиг. 12 *д*); составляющие будут 0.505 и  $1.055 \times 1.19 = 1.256$ ; величина  $R'_{56712}$  картины креста  $R_{56712}$  по чертежу после приведения к орту:

$$R'_{56712} = 1.10 : (1 + 1.055) = 0.535.$$

Крест  $R_{56712}$  взаимен с ортами  $l_5, l_6, l_7, l_1, l_2$ .

Аналогично определяем крест  $R_{56713}$ , взаимный с ортами  $l_5, l_6, l_7, l_1, l_3$ . Составляем комбинацию  $R_{5671} + \tau R_{6751}$  и находим  $\tau = 0.595$  из уравнения:

$$-0.505 \times 18.4 + 0.65 \times 9.3 + (-1.19 \times 0.45 + 0.65 \times 9.25) \tau = 0.$$

Комбинируем  $R_{5671}$  с  $R_{6741}$  на фиг. 12 *д*. Составляющие будут 0.505 и  $0.595 \times 1.19 = 0.708$ . Величина картины креста  $R_{56713}$  после приведения к орту будет:

$$R'_{56713} = 0.65 : (1 + 0.595) = 0.408.$$

I. Теперь положим в уравнении (5')  $x_4^I = 0$  и находим величины скоростей

$$\omega_3^I = x_3^I l_3, \quad \omega_2^I = x_2^I l_2.$$

Умножая уравнение (5') на мотор, соответствующий кресту  $R_{56712}$ , и соответственно на  $R_{56713}$ , получаем:

$$(-0.535 \times 10 + 0.65 \times 9.3) x_3^I + (+1.05 \times 3.3 - 0.535 \times 0.25) = 0,$$

$$x_3^I = -4.83;$$

$$(-0.408 \times 4.7 + 0.84 \times 0.9) x_2^I + (+1.05 \times 3.1 - 0.408 \times 2.40) = 0,$$

$$x_2^I = -1.957.$$

Графическим путем складываем кресты  $\omega_2^I$  и  $\omega_3^I$  и получаем крест:

$$Z = \omega_2^I + \omega_3^I$$

(фиг. 12 *е*). Составляющие будут:

$$1.957 \times 0.84 = 1.645, \quad -4.83 \times 0.65 = -3.14; \quad Z = 4.24,$$

$$z = -4.83 + 1.957 = -2.283.$$

Орт  $l_{14}$  винтовой пары 14:

$$l_{14}' = 4.24 : (-2.283) = -1.858.$$

Затем полагаем, как указано было:

$$\omega_{14}^I = -(\omega_2^I + \omega_3^I) = -Z = 2.283 l_{14}.$$

Откуда  $x_{14}^I = 2.283$ .

Находим теперь взаимные орт-кресты для группы ортов  $l_8, l_9, l_{10}, l_{11}$  и  $l_{12}$ .

Имеем:

$$\begin{aligned} R'_{8910} 1.85 - 1.30 \times 4.30 &= 0, & R'_{8910} &= 3.02; \\ R'_{8109} 0.95 - 3.50 \times 7.7 &= 0, & R'_{8109} &= 28.4; \\ R'_{9108} 0.65 - 0.45 \times 7.25 &= 0, & R'_{9108} &= 5.02. \end{aligned}$$

Комбинация  $R_{891011} = R_{8910} + \xi R_{8109}$  дает:

$$+ 3.02 \times 6.2 - 1.10 \times 7.1 + \xi(+28.4 \times 3.0 - 1.10 \times 5.0) = 0, \quad \xi = -0.137.$$

Составляющие (фиг. 12 ж) равны:

$$3.02, \quad -0.137 \times 28.4 = -3.89; \quad R'_{891011} = 1.97 : (1 - 0.137) = 2.28.$$

Комбинация  $R_{910811} = R_{8910} + \eta R_{9108}$  дает:

$$+ 0.02 \times 6.2 - 1.10 \times 7.1 + \eta(-5.02 \times 3.55 - 1.10 \times 1.05) = 0, \quad \eta = 0.576.$$

Составляющие (фиг. 12 з) равны:

$$3.02, \quad 0.576 \times 5.02 = 2.89; \quad R'_{910811} = 1.02 : (1 + 0.576) = 0.647.$$

Крест, взаимный с ортами  $l_8, l_9, l_{10}, l_{11}$  и  $l_{12}$ , представляем как комбинацию  $R_{89101112} = R_{8910} + \zeta R_{910811}$ ; откуда

$$+ 2.28 \times 8.9 + 0.8 \times 12.3 + \zeta(+0.647 \times 8.6 + 0.8 \times 11.3) = 0, \quad \zeta = -2.06.$$

Составляющие (фиг. 12 з) равны:

$$2.28, \quad -2.06 \times 0.647 = -1.335; \quad R'_{89101112} = 1.25 : (1 - 2.06) = -1.18.$$

II. Теперь полагаем  $x_{13}^{\text{II}} = 0$  и  $x_4^{\text{II}} = 1$  в уравнениях (5') и (6'). Умножая уравнение (5') скалярно на  $R_{56712}$  и на  $R_{56713}$ , получим соответственно  $x_3^{\text{II}}$  и  $x_2^{\text{II}}$ :

$$\begin{aligned} (-1.62 \times 7.2 - 0.535 \times 2.6) + (-0.535 \times 10 + 0.65 \times 9.3) x_3^{\text{II}} &= 0, & x_3 &= 18.75; \\ (-1.62 \times 7.15 - 0.408 \times 5.95) + (-0.408 \times 4.7 + 0.84 \times 0.9) x_2^{\text{II}} &= 0, \\ x_2^{\text{II}} &= 12.09. \end{aligned}$$

Теперь, умножая уравнение (6') скалярно на  $R_{89101112}$  и принимая во внимание, что  $x_4^{\text{II}} = 1$ ,  $x_2^{\text{II}} = 12.09$  и  $x_3^{\text{II}} = 18.75$ , получим:

$$(x_2^{\text{II}} l_2 + x_3^{\text{II}} l_3 + l_4) \cdot R_{89101112} + x_{14}^{\text{II}} l_{14} \cdot R_{89101112} = 0,$$

или

$$T \cdot R_{89101112} + x_{14}^{\text{II}} l_{14} \cdot R_{891011} = 0.$$

Крест T графически построен на фиг. 12 и. Таким образом получим:

$$-12.55 \times 0.8 + 1.18 \times 2.9 \times 29.84 + (+1.858 \times 4.1 - 1.18 \times 4.4) x_{14}^{\text{II}} = 0, \\ x_{14}^{\text{II}} = -37.7.$$

Теперь [из условия

$$x_{14}^{\text{I}} + k x_{14}^{\text{II}} = 0$$

находим:

$$k = -\frac{x_{14}^{\text{I}}}{x_{14}^{\text{II}}} = \frac{2.288}{37.7} = 0.0605.$$

Следовательно,

$$\omega_4 = (\epsilon_4^1 + k\epsilon_4^{11})I_4 = kI_4 = 0.0605I_4,$$

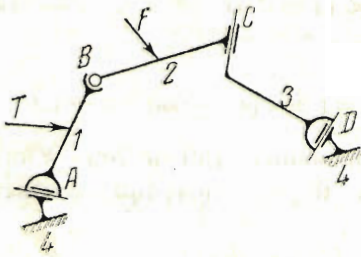
$$\omega_4' = 0.0605 \times 1.62 = 0.098, \quad \omega_4^0 = 0.0605.$$

Продолжая подобные операции, можно найти угловые скорости для всех осей.

Итак, следовательно, определение угловых скоростей в 12-звенном механизме приводящее к системе из 12 линейных уравнений, может быть проведено с помощью сравнительно несложных графических операций и простейших попутных вычислений; каждое из этих вычислений представляет собой решение самостоятельного уравнения с одним неизвестным.

#### § 4. Некоторые задачи статики пространственных механизмов

Задачами статики пространственных механизмов занимались весьма мало. Укажем здесь на работы Н. Г. Бруевича<sup>[3]</sup> и Я. Б. Шора<sup>[6]</sup>. Комбинируя метод взаимных моторов и метод замены связей, можно решать графически задачи статики сложных пространственных механизмов. Покажем это на одной задаче.



Фиг. 13

Задача 19. Четырехзвенный пространственный механизм 1234 находится в равновесии под действием силы  $F$ , приложенной к звену 2, и уравновешивающей  $T$ , приложенной к звену 1 (фиг. 13). Шарниры  $A$  (1, 4) и  $D$  (3, 4) — цилиндрические (пятого класса), шарнир  $B$  (1, 2) — сферический (третьего класса), шарнир  $C$  (2, 3) — цилиндрический (четвертого класса — допускает скольжение). Определить реакции в шарнирах и величину  $T$  уравновешивающей.

Разложим реакцию шарнира  $A$  на три составляющие  $A_1, A_2, A_3$  и два момента  $A_4$  и  $A_5$ , перпендикулярных к оси шарнира  $A$ . Аналогичное разложение на  $D_1, D_2, D_3, D_4$  и  $D_5$  сделаем в шарнире  $D$ . В шарнире  $B$  разложим реакцию на три взаимно перпендикулярных составляющих  $B_1, B_2$  и  $B_3$ . Реакцию шарнира  $C$  разложим на две составляющие  $C_1$  и  $C_2$ , перпендикулярных к оси шарнира, и на два момента  $C_3$  и  $C_4$ , также перпендикулярных к оси этого шарнира. Всего будем иметь вместе с силой  $T$  18 неизвестных.

Рассмотрим сначала равновесие звеньев 2 и 3. Для звена 2 имеем моторное уравнение равновесия:

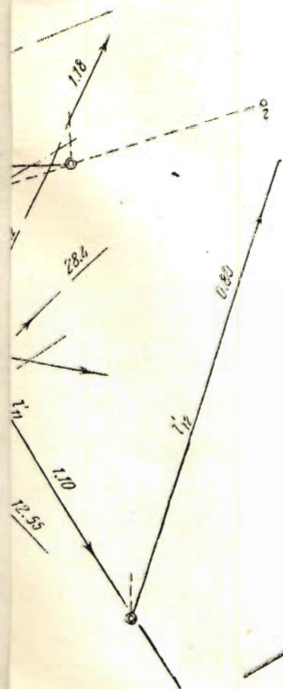
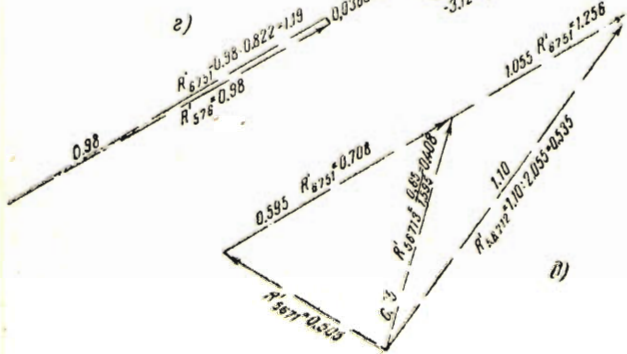
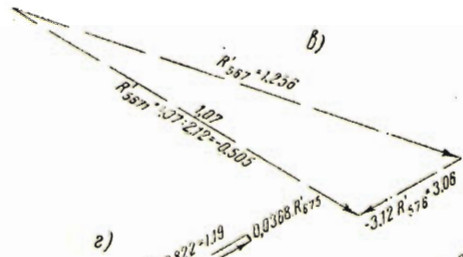
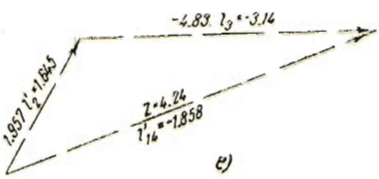
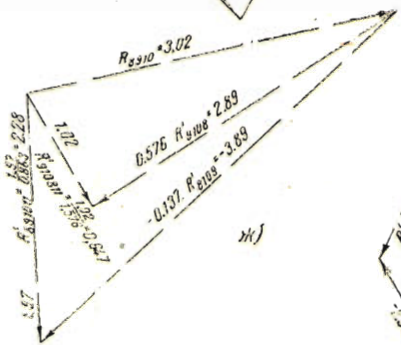
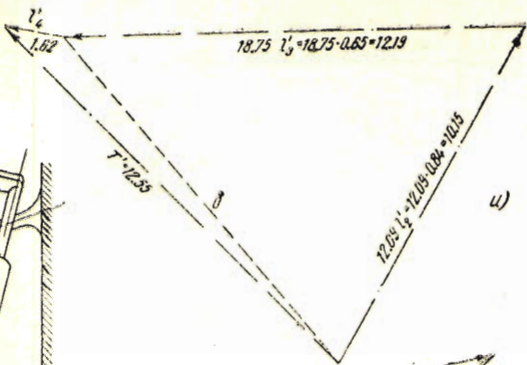
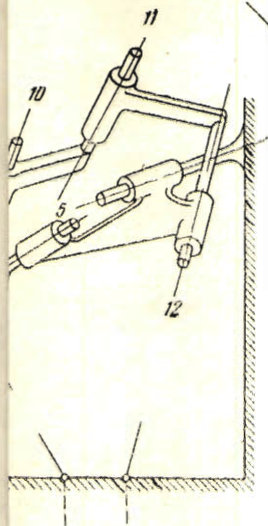
$$B_1 + B_2 + B_3 + C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + F = 0. \quad (7)$$

В этом уравнении семь неизвестных.

Приложим к звену 3 дополнительный момент  $D_6$ , направленный по оси шарнира  $D$ , и составим моторное уравнение равновесия звена 3:

$$-C_1 - C_2 - C_3 - C_4 + D_1 + D_2 + D_3 + D_4 + D_5 + D_6 = 0. \quad (8)$$





I. Положим  $C_4 = 0$  в уравнениях (7) и (8). Тогда в уравнении (7) будет только шесть неизвестных, которые мы определим при помощи взаимных крестов, как в задачах 16, 17 и 18. После этого из уравнения (8) аналогично определятся  $D_1, D_2, \dots, D_6$ . Обозначим полученные решения через

$$B_1^I, B_2^I, B_3^I; \quad C_1^I, C_2^I, C_3^I; \quad D_1^I, D_2^I, \dots, D_6^I.$$

II. Положим  $F = 0$  и  $C_4 = 1$  в уравнениях (7) и (8). Решив эти уравнения, найдем:

$$B_1^{II}, B_2^{II}, B_3^{II} \quad C_1^{II}, C_2^{II}, C_3^{II}, \quad D_1^{II}, D_2^{II}, \dots, D_6^{II}.$$

Ясно, что уравнениям (7) и (8) будет удовлетворять линейная комбинация решений I и II

$$B_1^I + kB_1^{II}, \dots; \quad C_1^I + kC_1^{II}, \dots; \quad D_1^I + kD_1^{II}, \dots$$

при любом значении множителя  $k$ . Определив этот множитель из условия

$$D_6^I + kD_6^{II} = 0,$$

мы узнаем искомые реакции в шарнирах  $B, C$  и  $D$ .

Перейдем теперь к звену 1. Так как реакция в шарнире  $B$  уже известна, то в уравнении равновесия звена 1

$$A_1 + A_2 + A_3 + A_4 + A_5 + T = B_1 + B_2 + B_3 \quad (9)$$

будет только шесть неизвестных. При помощи взаимных моторов нетрудно решить и это уравнение.

Задача 20. При условии предыдущей задачи определить уравновешивающую  $T$ , не определяя предварительно реакций в шарнирах.

Найдем моторы  $\omega_1$  и  $\omega_2$  скоростей звеньев 1 и 2. По принципу возможных перемещений сумма взаимных моментов сил и скоростей должна быть равна нулю. Из уравнения

$$\omega_1 \cdot T + \omega_2 \cdot F = 0$$

легко найдем величину уравновешивающей  $T$ .

Рассмотренные выше двадцать задач позволяют сделать следующие выводы:

1. Примененный нами метод изображения пространственных объектов на одной плоскости, являясь более наглядным, чем метод Майора-Мизеса, вместе с тем дает более простое решение задач пространственной механики.

2. Пользуясь этим методом, удастся выполнить решение более сложных задач графической пространственной механики, чем рассмотренные до сих пор в литературе по теории механизмов.

Поступила в редакцию 10 V 1940.      Институт механики Академии Наук СССР.

#### ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

1. Артоболевский И. И. Теория пространственных механизмов. Ч. 1. ОНТИ. 1937.
2. Баранов Г. Г. Кинематика пространственных механизмов. „Труды ВВА“. Сб. 18.
3. Бруевич Н. Г. Кинестатика пространственных механизмов. „Труды ВВА“. 1937. Сб. 22.

4. Горбунов Б. Н. О графической статике моторов. „Успехи математических наук“. 1940. Вып. VII.
5. Диментберг Ф. М. Общий метод пространственной графостатики, основанный на изображении в одной плоскости. „Известия отделения технических наук Акад. Наук“. 1939. № 7.
6. Шор Я. Б. Графические методы в статике и кинематике сложных пространственных систем. „Успехи математических наук“. 1940. Вып. VII.
7. Federhofer K. Graphische Kinematik und Kinetostatik der starren räumlichen Systems. Wien. 1928.
8. Mises R. Motorrechnung, ein neues Hilfsmittel der Mechanik. „ZAMM“. 1924. S. 155, 193.
9. Winter H. Geschwindigkeitspläne räumlicher Getriebe. „ZAMM“. 1930. S. 274. (Русский перевод см. „Успехи математических наук“. 1940. Вып. VII).

## GRAPHIC SOLUTION OF PROBLEMS OF SPACIAL MECHANICS

F. M. DIMENTBERG and J. B. SHOR

(Summary)

Federhofer and Winter, employing the method of Mayor-Mises, give a graphic solution of many problems in spacial kinematics by a representation on one plane. The present work presents a solution of the problems of Federhofer and Winter, as well as of others, by a representation on one plane employing a procedure other than that of Mayor-Mises. This procedure is based on the authors' previous work<sup>[5], [6]</sup>.

By employing this procedure, the representation of spacial systems becomes more visual, and the solution of problems simpler, even in more complicated cases.