

Т. IV, в. 4, 1940

## ПОСТРОЕНИЕ ПРОФИЛЕЙ ПО ГОДОГРАФУ СКОРОСТЕЙ

Л. А. СИМОНОВ

(Ленинград)

В работе излагается способ построения профиля по заданному годографу скоростей в точках контура профиля при обтекании плоскопараллельным потоком. Метод этот основан на конформном отображении области вне профиля на область годографа скоростей.

Рассмотрены особенности потока в области годографа скоростей для случая обтекания изолированного профиля, а также для случая обтекания решетки профилей при различных соотношениях скорости  $V_1$  на бесконечности перед решеткой и скорости  $V_2$  на бесконечности позади решетки.

Показаны общие свойства годографов скоростей для профилей с острыми и тупыми кромками.

Скорости на профиле, построенном по годографу скоростей для одного направления  $V_\infty$ , легко могут быть пересчитаны для обтекания потоком с любым другим направлением  $V_\infty$ . Для этого используется отображение области вне профиля или решетки профилей на верхнюю полуплоскость.

Для решетки профилей разработаны приемы подбора годографа скоростей, основанные на последовательном применении нескольких конформных преобразований верхней полуплоскости; эти приемы распространены на изолированное крыло как на частный случай решетки.

Приведены конкретные примеры построения как профилей в решетке, так и профилей, отдельно стоящих.

**1. Построение профиля по известному потенциалу в плоскости годографа.** Каждой точке области годографа сопряженных скоростей  $\bar{V}$  можно привести в соответствие точку на плоскости  $z$  профиля, обтекаемого параллельноструйным потоком. Действительно, комплексный потенциал  $w$  потока, обтекающего профиль, можно рассматривать и как функцию от  $z$  и как функцию от  $\bar{V}$ ; сравнение этих функций дает связь между  $z$  и  $\bar{V}$ , осуществляющую конформное отображение плоскости  $z$  (внешности профиля) и потока в ней на плоскость  $\bar{V}$  (внутренность годографа) и поток в ней. При этом контур профиля переходит в границу области годографа, а все остальные точки вне профиля переходят во внутренние точки области годографа (величина скорости и ее аргумент, являясь потенциальными функциями,

должны иметь экстремальные значения на границах, поэтому точке внутри области  $z$  не может соответствовать точка вне годографа скоростей).

Часто бывает проще определить поток в плоскости годографа скоростей, чем в плоскости профилей. Иногда определение формы профиля по заданным скоростям представляет даже больший интерес, чем прямая задача — определение скорости для заданного профиля.

Допустим, что удалось определить течение в плоскости годографа скоростей, т. е. известно  $w(\bar{V})$ . Форма профиля после этого может быть найдена интегрированием:

$$z = \int \frac{dw}{\bar{V}} = \int \frac{1}{\bar{V}} \frac{dw}{d\bar{V}} d\bar{V}. \quad (1)$$

Если функция  $w(\bar{V})$  не дана в аналитическом виде, а известны только значения потенциала  $\Phi$  на контуре годографа, то профиль может быть построен графически как огибающая ломаной линии, состоящей из отрезков

$$\Delta s = \Delta\Phi / |\bar{V}|, \quad (2)$$

направление которых совпадает с направлением скорости в середине участка, непосредственно определяемым из годографа скоростей.

**2. Особенности комплексного потенциала в случае обтекания отдельного профиля.** Комплексный потенциал потока, обтекающего изолированный профиль, вдали от профиля имеет вид:

$$w(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln z, \quad (3)$$

а комплексная скорость

$$\bar{V}(z) = \bar{V}_\infty + \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}. \quad (4)$$

Отсюда

$$\bar{V} - \bar{V}_\infty = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{z}, \quad z = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_\infty}.$$

В плоскости годографа сопряженных скоростей комплексный потенциал вблизи точки, соответствующей  $z = \infty$ , принимает вид:

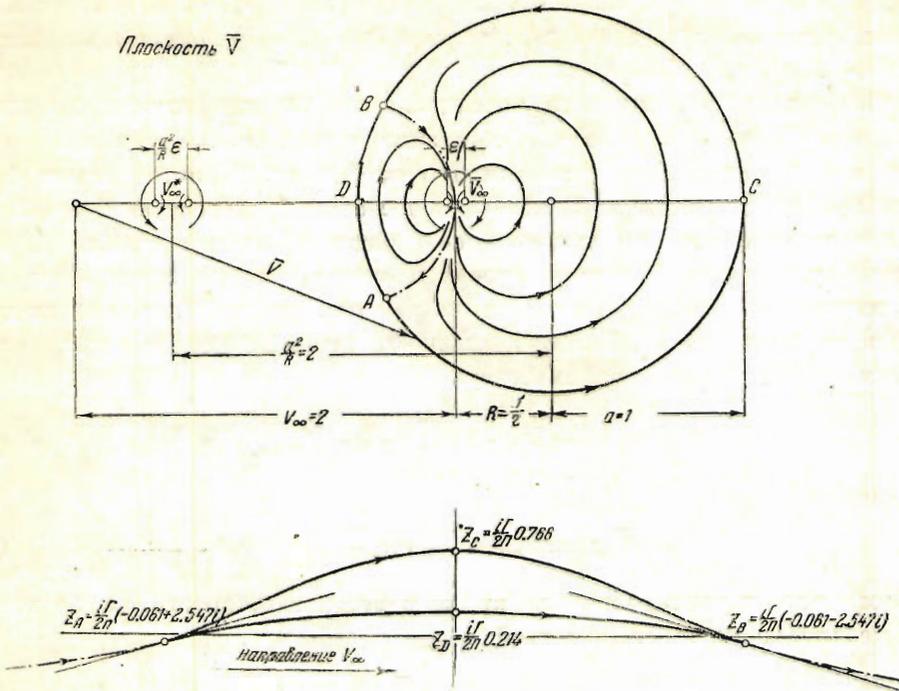
$$w(\bar{V}) = \frac{i\Gamma}{2\pi} \frac{\bar{V}_\infty}{\bar{V} - \bar{V}_\infty} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_\infty}. \quad (5)$$

Таким образом в плоскости  $\bar{V}$ , в точке  $\bar{V}_\infty$ , соответствующей  $z = \infty$ , будет вихрь с циркуляцией  $\Gamma$ , равной циркуляции вокруг крыла, и диполь с осью, перпендикулярной скорости  $\bar{V}_\infty$  (фиг. 1).

В некоторых случаях удобнее годограф действительных скоростей а не сопряженных; для него формула (5) принимает вид:

$$w(V) = -\frac{i\Gamma V_\infty}{2\pi(V - V_\infty)} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{V - V_\infty}. \quad (6)$$

Легко показать, что профиль, вычисленный по формуле (1), получается замкнутый, если интенсивность диполя и вихря в точке  $\bar{V}_\infty$  имеют значения, определенные функцией (5).



Фиг. 1.

Действительно, так как других особых точек внутри годографа нет, то вычет интеграла (1) может быть вычислен по малому контуру, охватывающему точку  $\bar{V}_\infty$ . На этом контуре подинтегральная функция обращается в

$$\frac{1}{\bar{V}} \frac{dw}{d\bar{V}} = \frac{1}{\bar{V}} \frac{d}{d\bar{V}} \left( \frac{i\Gamma \bar{V}_\infty}{2\pi} \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_\infty} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_\infty} \right) = - \frac{i\Gamma}{2\pi (\bar{V} - \bar{V}_\infty)^2},$$

вычет будет равен нулю, и, следовательно, профиль получится замкнутым.

**3. Особенности комплексного потенциала для случая бесциркуляционного потока.** В частном случае бесциркуляционного потока  $\Gamma = 0$  профиль будет влиять на бесконечно удаленную точку не как вихрь (формула 3), а как диполь, поэтому вдали от профиля комплексный потенциал примет вид:

$$w(z) = \bar{V}_\infty z - m/z, \tag{7}$$

а комплексная скорость

$$\bar{V}(z) = \bar{V}_\infty - m/z^2. \tag{8}$$

Отсюда

$$\bar{V} - \bar{V}_\infty = -m/z^2, \quad z = \sqrt{m / (\bar{V}_\infty - \bar{V})}.$$

Таким образом комплексный потенциал в плоскости годографа сопряженных скоростей для этого случая вблизи точки  $\bar{V}_\infty$  принимает вид:

$$w(\bar{V}) = m \bar{V}_\infty / \sqrt{\bar{V}_\infty - \bar{V}}. \tag{9}$$

Могут иметь место и такие случаи, когда главная часть ряда Лорана (7) начнется с члена  $az^{-k}$ , где  $k > 1$ ; тогда в формуле (9) показатель радикала будет  $k + 1$ .

**4. Особенности комплексного потенциала потока для случая обтекания прямолинейной решетки.** В случае обтекания параллельноструйным потоком бесконечной прямолинейной решетки профилей (фиг. 2) поток может быть представлен как сумма двух: 1) потока с постоянной скоростью  $V_\infty$  и 2) потока, представляющего циркуляционное движение вокруг профилей. Для достаточно удаленных от решетки точек последний можно представить как поток, вызванный бесконечным рядом вихрей циркуляции  $\Gamma$ , отстоящих друг от друга на расстоянии  $t$ . Поэтому вдали от решетки комплексный потенциал суммарного потока принимает вид<sup>1</sup>:

$$w(z) = \bar{V}_\infty z + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi z}{t}, \quad (10)$$

а комплексная скорость

$$\bar{V}(z) = \bar{V}_\infty + \frac{i\Gamma}{2t} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{t}. \quad (11)$$

В отличие от изолированного крыла в решетке скорости на бесконечности неодинаковы: перед решеткой

$$|\bar{V}(z)|_{y \rightarrow +\infty} = \bar{V}_1 = \bar{V}_\infty + \Gamma/(2t), \quad (12)$$

а сзади решетки

$$|\bar{V}(z)|_{y \rightarrow -\infty} = \bar{V}_2 = \bar{V}_\infty - \Gamma/(2t). \quad (13)$$

Отметим, что

$$\bar{V}_\infty = (\bar{V}_1 + \bar{V}_2)/2. \quad (14)$$

Выражая по (11)  $z$  через  $\bar{V}$  и пользуясь (12) и (13), получим:

$$\begin{aligned} \operatorname{ctg} \frac{\pi z}{t} &= \frac{2t}{i\Gamma} (\bar{V} - \bar{V}_\infty), \\ \sin \frac{\pi z}{t} &= \pm \frac{1}{\sqrt{1 + \operatorname{ctg}^2 \frac{\pi z}{t}}} = \pm \frac{i\Gamma}{2t} \frac{1}{\sqrt{(\bar{V} - \bar{V}_1)(\bar{V} - \bar{V}_2)}}, \\ z &= \frac{t}{\pi} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{i\Gamma}{2t} \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_\infty}, \end{aligned}$$

или

$$z = \frac{t}{2\pi i} \ln \frac{1 - \Gamma/[2t(\bar{V} - \bar{V}_\infty)]}{1 + \Gamma/[2t(\bar{V} - \bar{V}_\infty)]} = \frac{t}{2\pi i} \ln \frac{\bar{V} - \bar{V}_1}{\bar{V} - \bar{V}_2},$$

так как

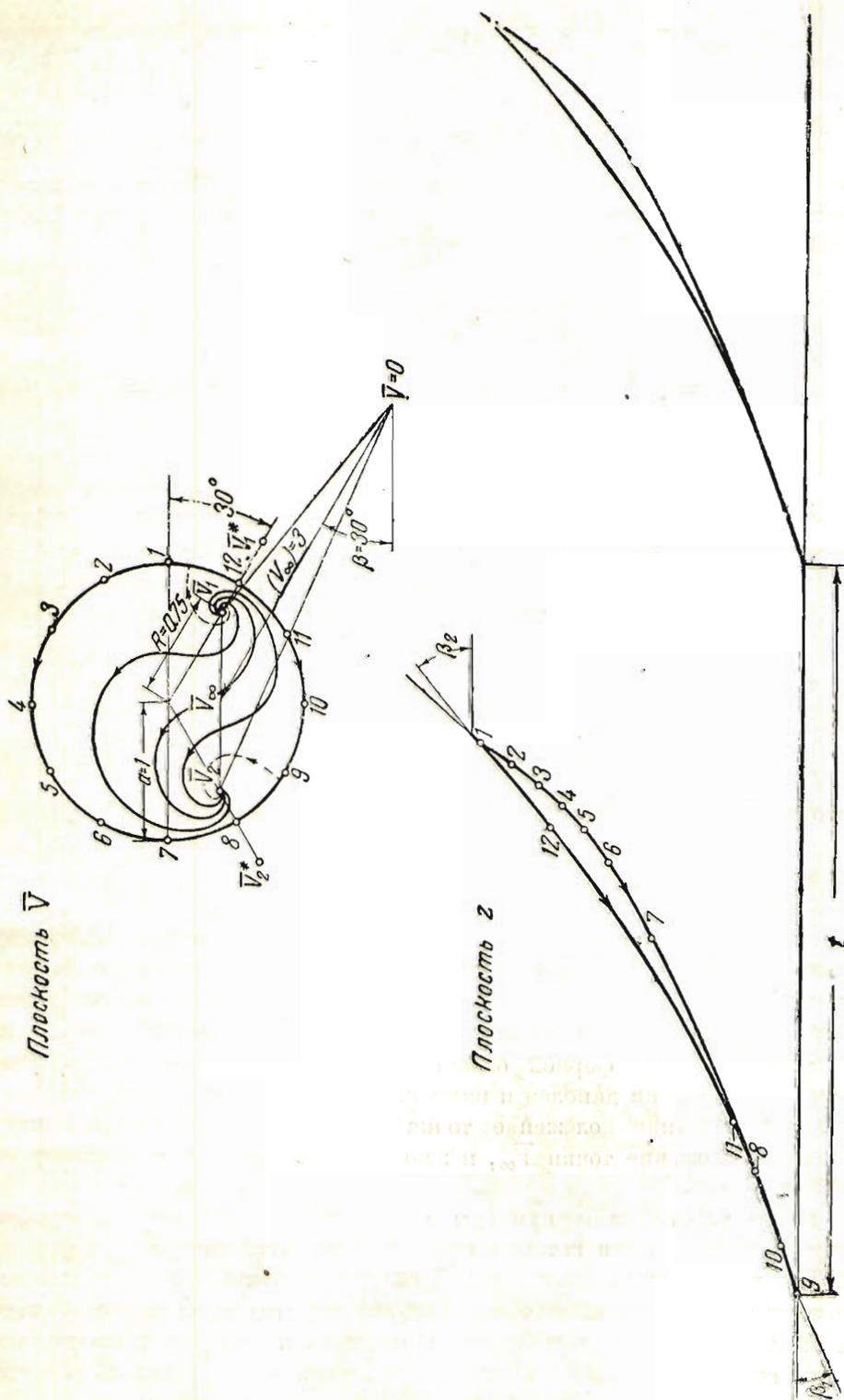
$$\operatorname{arc} \operatorname{tg} \zeta = \frac{1}{2i} \ln \frac{1 + i\zeta}{1 - i\zeta}.$$

Подставив полученные выражения для  $\sin(\pi z/t)$  и  $z$  в (10), получим:

$$w(\bar{V}) = \bar{V}_\infty \frac{t}{2\pi i} \ln \frac{\bar{V} - \bar{V}_1}{\bar{V} - \bar{V}_2} - \frac{i\Gamma}{4\pi} \ln [(\bar{V} - \bar{V}_1)(\bar{V} - \bar{V}_2)]$$

(несущественные постоянные при этом опущены).

<sup>1</sup> Потенциал потока, вызванного рядом вихрей; см., например, Кочин и Розе<sup>[1]</sup>.



Фиг. 2.

После упрощений комплексный потенциал вблизи точек  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$  принимает вид:

$$w(\bar{V}) = \frac{it}{2\pi} \left[ -\left(\bar{V}_\infty + \frac{\Gamma}{2t}\right) \ln(\bar{V} - \bar{V}_1) + \left(\bar{V}_\infty - \frac{\Gamma}{2t}\right) \ln(\bar{V} - \bar{V}_2) \right], \quad (15)$$

или

$$w(\bar{V}) = -\frac{it\bar{V}_1}{2\pi} \ln(\bar{V} - \bar{V}_1) + \frac{it\bar{V}_2}{2\pi} \ln(\bar{V} - \bar{V}_2). \quad (15a)$$

Внутри области годографа скоростей, таким образом, будут два полюса. Легко показать, что формула (5) представляет частный случай формулы (15) при  $t \rightarrow \infty$ . В самом деле, при  $t \rightarrow \infty$

$$\begin{aligned} w(\bar{V}) &= \frac{it}{2\pi} \bar{V}_\infty \ln \frac{\bar{V} - \bar{V}_2}{\bar{V} - \bar{V}_1} - \frac{i\Gamma}{4\pi} \ln [(\bar{V} - \bar{V}_1)(\bar{V} - \bar{V}_2)] = \\ &= \frac{it}{2\pi} \bar{V}_\infty \ln \frac{1 + \Gamma/[2t(\bar{V} - \bar{V}_\infty)]}{1 - \Gamma/[2t(\bar{V} - \bar{V}_\infty)]} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\bar{V} - \bar{V}_\infty) = \\ &= \frac{it}{2\pi} \bar{V}_\infty 2 \frac{\Gamma}{2t(\bar{V} - \bar{V}_\infty)} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln(\bar{V} - \bar{V}_\infty). \end{aligned}$$

Профиль, вычисленный по (1), и в случае решетки получается замкнутый, так как подинтегральная функция вблизи точки  $\bar{V}_1$  будет:

$$\frac{1}{\bar{V}} \frac{dw}{d\bar{V}} = \frac{1}{\bar{V}_1} \left( -\frac{it\bar{V}_1}{2\pi} \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_1} \right) + \frac{1}{\bar{V}_1} \frac{it\bar{V}_2}{2\pi} \frac{1}{\bar{V}_1 - \bar{V}_2},$$

а вблизи точки  $\bar{V}_2$

$$\frac{1}{\bar{V}} \frac{dw}{d\bar{V}} = \frac{1}{\bar{V}_2} \left( -\frac{it\bar{V}_1}{2\pi} \frac{1}{\bar{V}_2 - \bar{V}_1} \right) + \frac{1}{\bar{V}_2} \frac{it\bar{V}_2}{2\pi} \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_2},$$

и, следовательно, сумма вычетов

$$-it/(2\pi) + it/(2\pi) = 0.$$

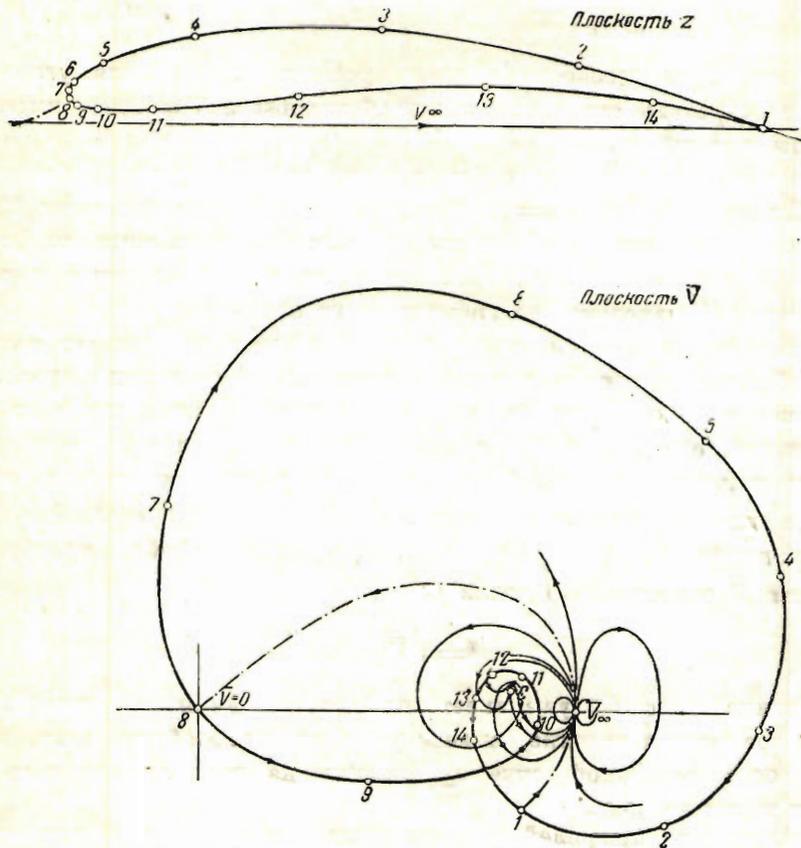
**5. Годограф для профиля с нулевыми углами на входной и выходной кромках.** Скорости на профиле с углами на входной и выходной кромках, равными нулю, нигде не обращаются в нуль или бесконечность, если точки разветвления лежат на остриях. Поэтому годограф скоростей для такого профиля может иметь вид простой замкнутой области с точкой  $\bar{V} = 0$ , лежащей вне ее. Задаваясь формой области, для которой легко решить задачу внутреннего обтекания диполем и вихрем, можно построить соответствующий ей профиль. Изменяя положение точки  $\bar{V} = 0$  по отношению к контуру области или положение точки  $\bar{V}_\infty$ , можно получить желаемую кривизну или толщину профиля.

В конце работы даны примеры построения изолированного профиля и решетки профилей, для которых годограф скоростей — круг.

**6. Годограф для профиля с тупой входной кромкой.** Для практического применения мало пригодны профили с нулевыми углами на выходной и, тем более, на входной кромках. Обычно на входной кромке профиль делается тупой, на выходной кромке профиль имеет конечный, не равный нулю угол.

На примере профиля Жуковского проследим характерные особенности годографа скоростей для профилей с тупой передней кромкой (фиг. 3).

Контуру профиля соответствует контур годографа, имеющий петлю. В точке  $V_\infty$  плоскости  $V$  находятся вихрь и диполь. Из этой точки выходят все линии тока. Линии тока, проходящей близко к выпуклой стороне профиля, соответствует простая замкнутая кривая. Линии тока, проходящей



Фиг. 3.

близко к вогнутой стороне профиля, соответствует кривая, делающая петлю. Для следующих линий тока петля постепенно сокращается, вырождаясь в точку возврата. Еще более удаленным от профиля линиям тока соответствуют простые замкнутые кривые, вблизи полюса переходящие в круги. Примерный вид линий тока в плоскости  $V$  дан на фиг. 3.

Вблизи точки возврата  $C$

$$w - w_c = a\sqrt{\bar{V} - \bar{V}_c}. \quad (16)$$

Откуда

$$\bar{V} - \bar{V}_c = (w - w_c)^2 / a,$$

или, по формуле Тэйлора:

$$\bar{V} - \bar{V}_c = (d\bar{V}/dw)_c(w - w_c) + \frac{1}{2} (d^2\bar{V}/dw^2)_c(w - w_c)^2 + \dots$$

Следовательно, в точке возврата  $(d\bar{V}/dw)_c = 0$ , а в соответствующей точке плоскости  $z$

$$\left(\frac{d\bar{V}}{dz}\right)_c \left(\frac{dz}{dw}\right)_c = 0, \quad \left(\frac{d\bar{V}}{dz}\right)_c = \left(\frac{d^2w}{dz^2}\right)_c = 0. \quad (17)$$

В точке  $C$  на плоскости  $z$  линии равных величин или углов наклона скоростей образуют седловину; линии  $\Phi = \text{const}$  и  $\Psi = \text{const}$  имеют радиус кривизны, равный  $\infty$ .

В потоке, обтекающем профиль с тупой входной кромкой, обычно имеется точка  $C$ , в которой  $dw^2/dz^2 = 0$ , потому что линии тока под нижней стороной профиля (фиг. 3) сперва обращены выпуклостью вниз, согласно форме профиля, а потом постепенно переходят в линии, обращенные выпуклостью вверх; точка  $C$  находится на границе этого перехода.

Если в точке схода на профиле угол отличен от нуля, то скорость  $V_c$  в ней обращается в нуль, и тогда контур годографа дважды проходит через нуль, имея в точке  $B$  тот же угол между касательными, как и на профиле. В остальном годограф не будет отличаться от предыдущего примера.

Для получения профилей обычной формы следует задаваться годографом  $\bar{V}$  в виде петлеобразной кривой, но наличие петли в области  $\bar{V}$  усложняет вычисление потока. Эту трудность можно обойти преобразованием плоскости  $\bar{V}$  относительно точки  $C$ :

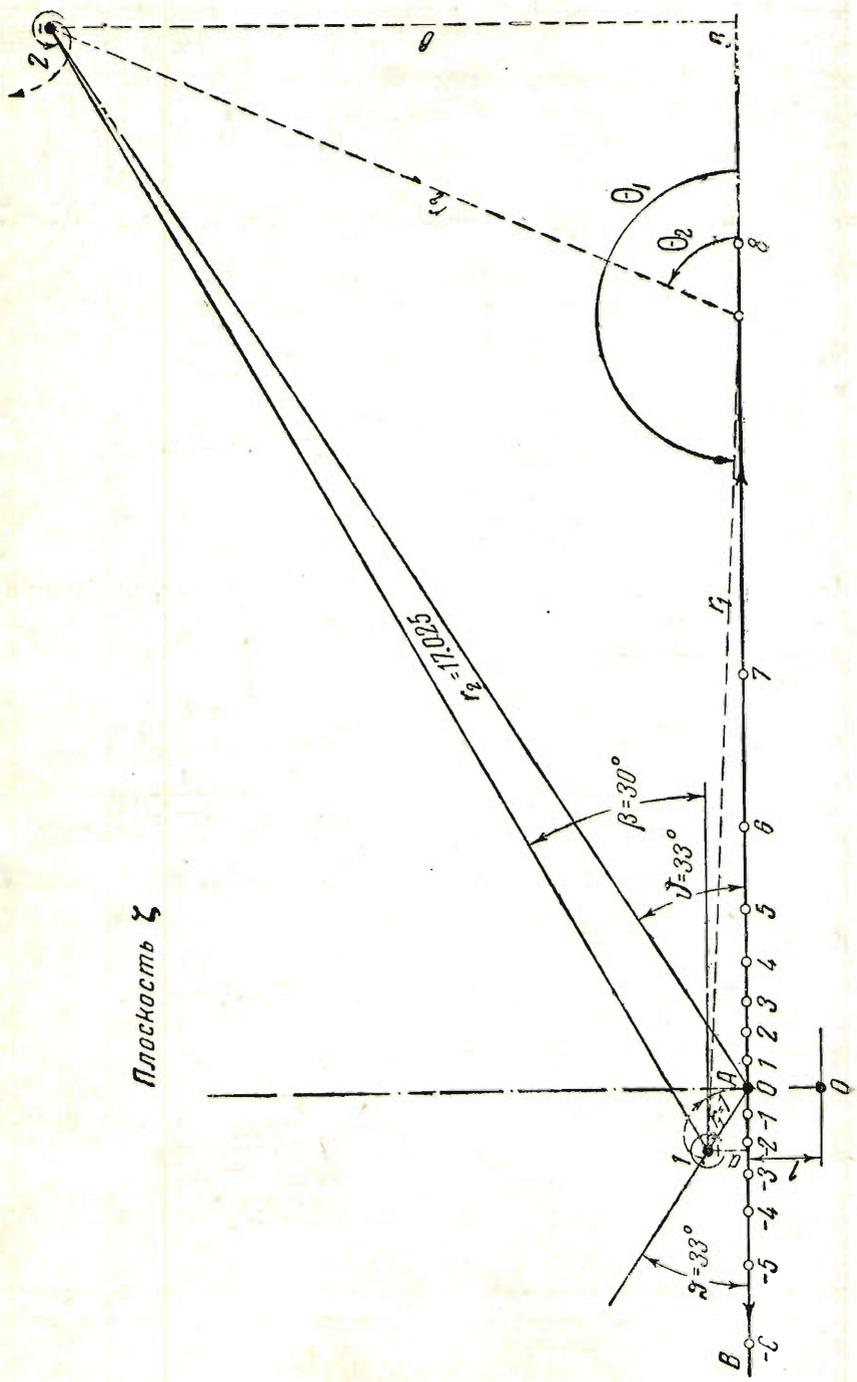
$$u = \sqrt{\bar{V} - \bar{V}_c}. \quad (18)$$

Граница области  $u$  уже имеет вид простой замкнутой кривой; при этом поток переходит в течение, вызванное теми же особенностями, находящимися в соответственной точке  $u_\infty$ , причем на всех линиях тока исчезают петли и точки возврата.

Для решетки профилей отличие заключается только в том, что вихрь-диполь расщепляется на вихрь-источник и вихрь-сток.

**7. Отображение решетки на вещественную ось и определение скоростей для различных углов атаки.** Годограф скоростей, по которому построен профиль, непосредственно дает представление о скоростях на профиле только для одного направления потока на бесконечности (для одного угла атаки). Покажем, как можно определить скорости на полученном профиле при любом другом угле атаки.

Внешнюю область профилей или отдельного профиля можно отобразить на верхнюю полуплоскость так, чтобы профиль перешел в вещественную ось. В верхней полуплоскости не трудно вычислить скорости на вещественной оси, соответствующие обтеканиям профиля с различными углами атаки. Отношение между скоростями при различных углах атаки должно быть одинаковым и в верхней полуплоскости и в плоскости профиля. Поэтому вычисления потоков в верхней полуплоскости позволят найти скорости на профиле



Фиг. 4.

для всевозможных углов атаки, если они известны хотя бы для одного из углов атаки.

Назовем  $\zeta$  комплексную координату верхней полуплоскости.

Одна полоса решетки профилей при отображении на верхнюю полуплоскость<sup>1</sup> дает две точки 1 и 2, соответствующие бесконечно удаленным точкам перед решеткой и за ней (фиг. 4), в которых будут особенности такие же, как и в плоскости годографа сопряженных скоростей (см. формулу 15а). Для того чтобы получить обтекание вещественной оси, остается добавить зеркально отраженные особенности в нижней полуплоскости. Тогда комплексный потенциал в плоскости  $\zeta$  будет равен:

$$w(\zeta) = -\frac{it\bar{V}_1}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_1) + \frac{it\bar{V}_2}{2\pi} \ln(\zeta - \zeta_2) + \frac{itV_1}{2\pi} \ln(\zeta - \bar{\zeta}_1) - \frac{itV_2}{2\pi} \ln(\zeta - \bar{\zeta}_2). \quad (19)$$

Заменяя

$$\begin{aligned} V_1 &= -V_\infty \cos \beta_\infty - iV_\infty \sin \beta_\infty + \Gamma / (2t), \\ V_2 &= -V_\infty \cos \beta_\infty - iV_\infty \sin \beta_\infty - \Gamma / (2t), \end{aligned} \quad (20)$$

получим:

$$\begin{aligned} w(\zeta) &= \frac{itV_\infty \sin \beta_\infty}{2\pi} \ln \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \bar{\zeta}_1)}{(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \bar{\zeta}_2)} + \frac{itV_\infty \cos \beta_\infty}{2\pi} \ln \frac{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \bar{\zeta}_2)}{(\zeta - \bar{\zeta}_1)(\zeta - \zeta_2)} + \\ &+ \frac{i\Gamma}{4\pi} \ln \frac{(\zeta - \bar{\zeta}_1)(\zeta - \bar{\zeta}_2)}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)}. \end{aligned} \quad (21)$$

Положение точек  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  произвольно. Выберем его так, чтобы при  $\Gamma = 0$  одна из точек разветвления оказалась в  $\zeta = \infty$ .

Комплексная скорость равна:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} &= \frac{itV_\infty \sin \beta_\infty}{2\pi} \left( \frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_1} - \frac{1}{\zeta - \zeta_2} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_2} \right) + \\ &+ \frac{itV_\infty \cos \beta_\infty}{2\pi} \left( \frac{1}{\zeta - \zeta_1} + \frac{1}{\zeta - \zeta_2} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_1} - \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_2} \right) + \\ &+ \frac{i\Gamma}{4\pi} \left( \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_1} + \frac{1}{\zeta - \bar{\zeta}_2} - \frac{1}{\zeta - \zeta_1} - \frac{1}{\zeta - \zeta_2} \right). \end{aligned} \quad (22)$$

Обозначая для краткости

$$\zeta_1 - \bar{\zeta}_1 = 2ai, \quad \zeta_2 - \bar{\zeta}_2 = 2bi, \quad \zeta_2 - \zeta_1 = de^{i\beta}, \quad (23)$$

для скоростей на вещественной оси будем иметь:

$$\begin{aligned} \frac{dw}{d\zeta} &= -\frac{itV_\infty d}{2\pi} \left[ \frac{e^{i(\beta - \infty)}}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)} - \frac{e^{-i(\beta - \beta_\infty)}}{(\zeta - \bar{\zeta}_1)(\zeta - \bar{\zeta}_2)} \right] + \\ &+ \frac{\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{a}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \bar{\zeta}_1)} + \frac{b}{(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \bar{\zeta}_2)} \right]. \end{aligned} \quad (24)$$

<sup>1</sup> Мы пользуемся преобразованием Кенига<sup>[2]</sup> решетки пластин на верхнюю полуплоскость. Решетка с любой другой формой профилей при отображении на верхнюю полуплоскость дает такой же поток.

В точке разветвления  $dw/d\zeta = 0$ . Полагая  $\Gamma = 0$  в (24), получим:

$$\frac{e^{i(\beta - \beta_\infty)}}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \zeta_2)} = \frac{e^{-i(\beta - \beta_\infty)}}{(\zeta - \bar{\zeta}_1)(\zeta - \bar{\zeta}_2)}. \quad (25)$$

Полагая для одной критической точки  $\zeta_B = \infty$ , будем иметь из (25):

$$\beta = \beta_\infty, \quad (26)$$

а для второй критической точки  $dw/d\zeta = 0$  дает:

$$1/[(\zeta_A - \zeta_1)(\zeta_A - \zeta_2)] = 1/[(\zeta_A - \bar{\zeta}_1)(\zeta_A - \bar{\zeta}_2)], \quad \arg[(\zeta_A - \zeta_1)(\zeta_A - \zeta_2)] = \pi. \quad (27)$$

Отсюда видно, что лучи  $A1$  и  $A2$  симметричны относительно вертикальной оси (фиг. 4).

В дальнейшем критическую точку  $A$  будем принимать за начало координат плоскости  $\zeta$ .

Вещественная ось является линией тока, на ней  $\Psi = 0$  согласно (22), а потенциал

$$\Phi = \frac{tV_\infty}{\pi} \left[ \sin \beta_\infty \ln \frac{r_1}{r_2} - (\theta_1 - \theta_2) \cos \beta_\infty \right] + \frac{\Gamma}{2\pi} (\theta_1 + \theta_2), \quad (28)$$

причем

$$r_1 e^{i\theta_1} = \zeta_1 - \zeta, \quad r_2 e^{i\theta_2} = \zeta_2 - \zeta.$$

Разность потенциалов между точками разветвления  $A$  и  $B$  для бесциркуляционного потока ( $\Gamma = 0$ ) равна:

$$\begin{aligned} \Phi_B - \Phi_A &= \frac{tV_\infty}{\pi} \left[ (\theta_1 - \theta_2) \cos \beta - \sin \beta \ln \frac{r_1}{r_2} \right]_{\zeta=0} = \\ &= \frac{t}{\pi} V_\infty \left[ (\pi - 2\vartheta) \cos \beta - \sin \beta \ln \frac{\sin(\vartheta - \beta)}{\sin(\vartheta + \beta)} \right]. \end{aligned} \quad (29)$$

В решетке, состоящей из пластин,

$$\Phi_B - \Phi_A = V_\infty l. \quad (30)$$

Сопоставление (29) и (30) позволяет найти связь между  $\vartheta$ ,  $\beta$  и  $l/t$ :

$$\frac{\pi l}{t} = (\pi - 2\vartheta) \cos \beta - \sin \beta \ln \frac{\sin(\vartheta - \beta)}{\sin(\vartheta + \beta)}. \quad (31)$$

Для профилей другой формы соотношение (31) остается верным приблизительно.

Соотношение (26) верно только для бесциркуляционного потока ( $\Gamma = 0$ ). Пусть скорость на бесконечности составляет с бесциркуляционным направлением угол

$$\alpha = \beta_\infty - \beta, \quad (32)$$

который назовем углом атаки. Найдем, чему будет равна циркуляция  $\Gamma$ , при которой точка схода  $B$  будет оставаться в  $\zeta = \infty$ . Это условие соответствует гипотезе Жуковского, гласящей, что вокруг профиля устанавливается такая циркуляция, при которой точка схода находится на острие задней кромки  $B$ .

При  $\alpha \neq 0$  уравнение (24) дает:

$$\Gamma \left[ \frac{a}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \bar{\zeta}_1)} + \frac{b}{(\zeta - \zeta_2)(\zeta - \bar{\zeta}_2)} \right] = itV_\infty d \left[ \frac{e^{-i\alpha}}{(\zeta - \zeta_1)(\zeta - \bar{\zeta}_2)} - \frac{e^{i\alpha}}{(\zeta - \bar{\zeta}_1)(\zeta - \zeta_2)} \right],$$

$$\Gamma [ar_2^2 + br_1^2] = 2tV_\infty dr_1 r_2 \sin(\alpha + \theta_1 + \theta_2).$$

Требуя, чтобы одна из точек разветвления была в  $\zeta = \infty$ , получим:

$$\theta_1 = \theta_2 = 0, \quad r_1/r_2 = 1,$$

$$\Gamma = \frac{2tV_\infty d \sin \alpha}{a+b} = \frac{2tV_\infty \sin \alpha}{\cos \beta \operatorname{tg} \vartheta}. \quad (33)$$

Вторая критическая точка  $A$  при этом перемещается из начала координат в

$$\zeta_A = - \left( \frac{2ab}{a+b} - \frac{2ab(a+b) \operatorname{tg} \beta \cos(\alpha+\beta)}{(a-b)^2 \sin \alpha \cos \beta + (a+b)^2 \cos \alpha \sin \beta} \right) \operatorname{ctg} \beta. \quad (34)$$

Скорость на вещественной оси равна, по (24):

$$V = - \frac{tV_\infty d}{\pi r_1 r_2} \sin(\theta_1 + \theta_2 + \alpha) + \frac{\Gamma}{2\pi} \left( \frac{a}{r_1^2} + \frac{b}{r_2^2} \right). \quad (35)$$

Для бесциркуляционного потока ( $\alpha = 0$  и  $\Gamma = 0$ )

$$V_{\parallel} = - \frac{tV_\infty d}{\pi r_1 r_2} \sin(\theta_1 + \theta_2). \quad (36)$$

Для потока с наибольшей циркуляцией ( $\alpha = \pi/2$ )

$$V_{\perp} = - \frac{tV_\infty d}{\pi r_1 r_2} \cos(\theta_1 + \theta_2) + \frac{tV_\infty}{\pi \cos \beta \operatorname{tg} \vartheta} \left( \frac{a}{r_1^2} + \frac{b}{r_2^2} \right). \quad (37)$$

Отсюда искомое соотношение между  $V_{\parallel}$  и  $V_{\perp}$  будет таково<sup>1</sup>:

$$\frac{V_{\perp}}{V_{\parallel}} \operatorname{ctg}(\theta_1 + \theta_2) = \frac{ar_2/r_1 + br_1/r_2}{d \cos \beta \operatorname{tg} \vartheta \sin(\theta_1 + \theta_2)}. \quad (38)$$

После того как найдено  $V_{\perp}/V_{\parallel}$ , не представляет труда найти скорости на профиле для произвольного угла атаки  $\alpha$ , если известно, например,  $V_{\parallel}$ :

$$V = V_{\parallel} \cos \alpha + V_{\perp} \sin \alpha. \quad (39)$$

**8. Отображение изолированного профиля на вещественную ось и определение скоростей для различных углов атаки.** Отображение изолированного крыла на верхнюю полуплоскость можно рассматривать как предельный случай для решетки при  $l/t = 0$  и произвольном  $\beta$  (фиг. 5). Из формулы (31) видно, что при этом  $\vartheta \rightarrow \pi/2$ . Пусть  $\vartheta = \pi/2 - \varepsilon$ ; тогда

$$\left( \frac{r_1}{r_2} \right)_{\zeta=0} = \frac{\sin(\vartheta - \beta)}{\sin(\vartheta + \beta)} = \frac{1 - \varepsilon \operatorname{tg} \beta}{1 + \varepsilon \operatorname{tg} \beta} = 1 - 2\varepsilon \operatorname{tg} \beta, \quad \left( \ln \frac{r_1}{r_2} \right)_{\zeta=0} = - 2\varepsilon \operatorname{tg} \beta;$$

$$\pi l/t = 2\varepsilon \cos \beta + 2\varepsilon \operatorname{tg} \beta \sin \beta = 2\varepsilon / \cos \beta. \quad (40)$$

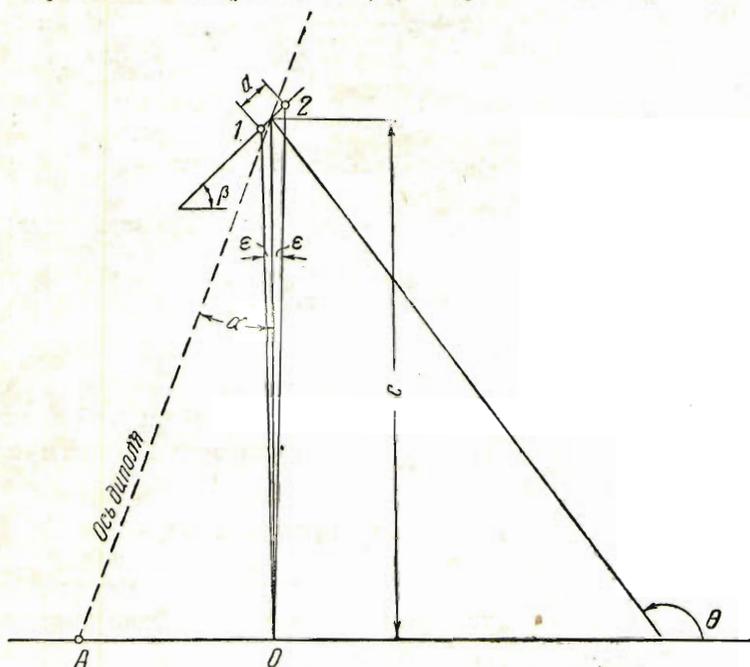
<sup>1</sup> Аналогично поступает Вейниг (Weinig) [3] при исследовании различных потоков в решетке, пользуясь отображением решетки на круг.

Расстояние  $d$  между точками 1 и 2, при  $|\zeta_1| = c$ , будет:

$$d = [(r_1 - r_2) / \sin \beta]_{\zeta=c} = 2c\varepsilon / \cos \beta. \quad (41)$$

В точках 1 и 2 находятся вихри и источники с интенсивностями равной величины:

$$\Gamma_0 = \pm tV_\infty \cos(\beta + \alpha) + \Gamma/2, \quad Q_0 = \pm tV_\infty \sin(\beta + \alpha).$$



Фиг. 5.

Когда  $l/t \rightarrow 0$ , точки 1 и 2 сближаются и эти особенности переходят в диполь и вихрь.

Момент диполя  $m$  равен:

$$m = \sqrt{\left[ \frac{tV_\infty \sin(\beta + \alpha)}{2\pi} \frac{2c\varepsilon}{\cos \beta} \right]^2 + \left[ \frac{tV_\infty \cos(\beta + \alpha)}{2\pi} \frac{2c\varepsilon}{\cos \beta} \right]^2} = \frac{tV_\infty}{\pi} \frac{c\varepsilon}{\cos \beta},$$

а ось его наклонена к вертикальной оси под углом  $\alpha$  (фиг. 5).

Циркуляция вихря  $\Gamma$ , согласно (33), будет:

$$\Gamma = 2tV_\infty \sin(\alpha\varepsilon) / \cos \beta. \quad (42)$$

Отсюда можно найти соотношение между  $m$  и  $\Gamma$ :

$$m = c\Gamma / (\pi \sin \alpha). \quad (43)$$

Точка разветвления  $B$  попержнему будет находиться в  $\zeta = \infty$ , а точка  $A$ , согласно (34), в

$$\zeta_A = -\operatorname{ctg} \alpha, \quad (44)$$

т. е. на продолжении оси диполя.

Потенциал на вещественной оси для отдельного профиля получим, вычисляя предельные значения (28) при  $l/t \rightarrow 0$ :

$$\ln(r_1/r_2) = \ln[1 + (r_1 - r_2)/r_2] = (r_1 - r_2)/r_2 = (d/c) \cos(\pi + \beta - \theta) \sin \theta, \\ \theta_1 - \theta_2 = (d/c) \sin(\pi + \beta - \theta) \sin \theta,$$

$$\Phi = (tV_\infty/\pi) [\sin \beta_\infty (d/c) \sin \theta \cos(\pi + \beta - \theta) - \cos \beta_\infty (d/c) \sin \theta \sin(\pi + \beta - \theta)] + \\ + \Gamma\theta/\pi = (t/\pi) V_\infty (d/c) \sin \theta \sin(\alpha + \theta - \pi) + \Gamma\theta/\pi.$$

Принимая во внимание (41) и (42), окончательно будем иметь:

$$\Phi = -(\Gamma/\pi) \sin \theta \sin(\theta + \alpha) / \sin \alpha + \Gamma\theta/\pi. \quad (45)$$

Если профиль есть пластинка, то ее длину  $l$  можно найти из (43), принимая  $\alpha \rightarrow 0$ . Для пластинки

$$\Gamma = \pi l V_\infty \sin \alpha,$$

поэтому

$$m = cl V_\infty. \quad (46)$$

Эта формула приближенно верна и для профилей другой формы.

Отношение скорости  $V_\perp$  (при  $\alpha = \pi/2$ ) к скорости  $V_\parallel$  (при  $\alpha = 0$ ) при одинаковом  $V_\infty$  равно, согласно (38):

$$V_\perp / V_\parallel = \operatorname{ctg} 2\theta - 1 / \sin 2\theta = -\operatorname{tg} \theta. \quad (47)$$

Далее, по формуле (39) легко можно вычислить скорости на профиле для любого угла атаки, если известны скорости для одного какого-нибудь угла атаки (например,  $V_\parallel$  при  $\alpha = 0$ ).

Для решетки отношение  $V_\perp / V_\parallel$  является функцией от потенциала, и ее вид зависит от параметров  $l/t$  и  $\beta$ . Для отдельного крыла эта функция единственная и может быть найдена исключением  $\theta$  из (47) и (45) при  $\Gamma = 0$  (или  $\alpha = 0$ ).

Так как  $\Gamma$  пропорциональна  $\sin \alpha$  (см. формулу 42), то при  $\alpha \rightarrow 0$

$$\Phi = -k \sin^2 \theta, \quad \Phi_B = 0, \quad \Phi_A = -k,$$

а значение  $\Phi$  в произвольной точке  $S$

$$\Phi_S = -k \sin^2 \theta_S.$$

Величину  $\sin \theta_S$  можно теперь выразить через  $\Phi_A$ ,  $\Phi_B$  и  $\Phi_S$ :

$$\sin^2 \theta_S = (\Phi_B - \Phi_S) / (\Phi_B - \Phi_A).$$

Теперь, согласно (47):

$$V_\perp / V_\parallel = -\operatorname{tg} \theta = \pm \sqrt{1 / \sin^2 \theta - 1} = \pm \sqrt{(\Phi_B - \Phi_S) / (\Phi_S - \Phi_A)}. \quad (48)$$

К такому же результату приходит Вейниг<sup>13)</sup>.

**9. Выбор годографа для решетки профилей.** Выбирая произвольно вид годографа скоростей для решетки (или для отдельного крыла), мы наталкиваемся на большие трудности, так как надо одновременно удовлетворить

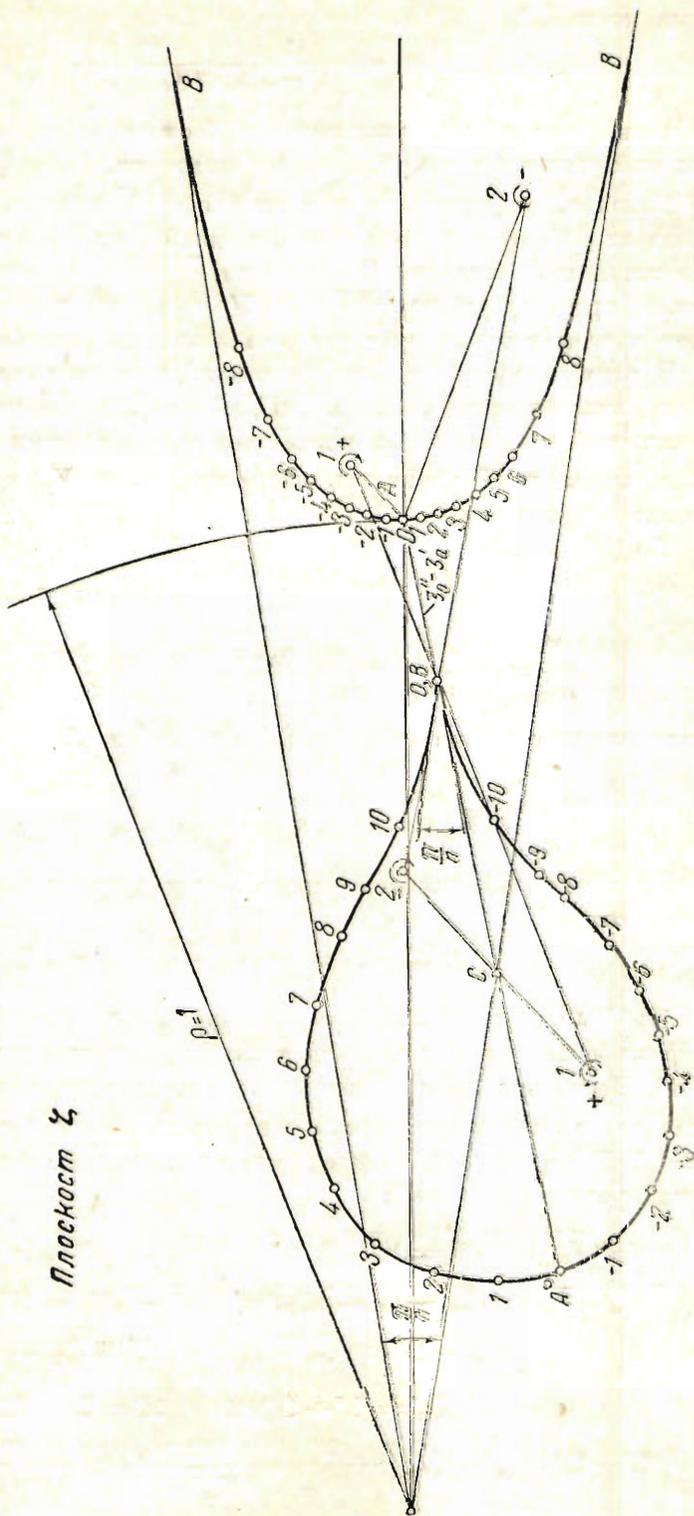
ряду условий: вычеты в особенных точках должны быть пропорциональны координатам особенных точек (см. формулу 1ба), а точки разветвления потока должны быть в  $\bar{V}=0$  (если углы на краях не равны нулю). Поэтому в дальнейшем годограф скоростей будем получать путем применения различных конформных преобразований плоскости  $\zeta$  в плоскость  $\bar{V}$ .

Остановимся на одном из способов подбора годографа скоростей для решетки профилей.

В нижней половине плоскости  $\zeta$  выбираем точку  $O$  в качестве начала координат новой переменной  $\zeta'$  и делаем преобразование:

$$\zeta'' = \sqrt{\zeta'} \quad (49)$$

При этом верхняя полуплоскость переходит в область внутри кривой вида гиперболы с асимптотами, составляющими угол  $\pi/n$  (фиг. 6); особенности переходят в соответствующие точки  $\zeta_1''$  и  $\zeta_2''$ , одна точка разветвления будет в  $\zeta_A''$ , другая в бесконечности.



Фиг. 6.

Далее, от плоскости  $\zeta''$  перейдем к плоскости  $u$  путем инверсии относительно точки  $\zeta_0''$ :

$$u = \frac{1}{\zeta'' - \zeta_0''} - \frac{1}{2(\zeta_A'' - \zeta_0'')} \quad (50)$$

Ветви гиперболы, уходящие в бесконечность, при этом переходят в острый угол с вершиной в полюсе инверсии.

Наконец, от плоскости  $u$  к плоскости  $\bar{V}$  годографа перейдем, возводя в квадрат (18) относительно точки, средней между  $u_A$  и  $u_B$  (чтобы в плоскости  $\bar{V}$  точки  $A$  и  $B$  совпали). В плоскости  $\bar{V}$  мы получаем замкнутую кривую, дважды проходящую через  $\bar{V} = 0$ . Угол между касательными в точке  $B$  равен  $\pi/n$  и соответствует углу на выходной кромке будущего профиля.

В этих конформных преобразованиях произвольным является только выбор начала координат плоскости  $\zeta'$ . Точку  $\zeta_0''$  выбирать произвольно нельзя, ее надо выбрать так, чтобы после всех преобразований координаты точек 1 и 2 в плоскости  $\bar{V}$  равнялись скоростям  $\bar{V}_1$  и  $\bar{V}_2$ , которым соответствует течение в плоскости  $z$ .

По (18) и (50)

$$V_A = 0 = \bar{V}_C + u_A^2, \quad u_A = 1 / [2(\zeta_A'' - \zeta_0'')],$$

$$\frac{\bar{V}_1}{\bar{V}_2} = \frac{\bar{V}_C + u_1^2}{\bar{V}_C + u_2^2} = \frac{(u_1 + u_A)(u_1 - u_A)}{(u_2 + u_A)(u_2 - u_A)} = \frac{(\zeta_2'' - \zeta_0'')^2 (\zeta_A'' - \zeta_1'')}{(\zeta_1'' - \zeta_0'')^2 (\zeta_A'' - \zeta_2'')};$$

откуда находим единственное положение точки  $\zeta_0''$ :

$$\zeta_0'' - \zeta_A'' = \sqrt{(\zeta_1'' - \zeta_A'')(\zeta_2'' - \zeta_A'')} \frac{\sqrt{\bar{V}_2(\zeta_2'' - \zeta_A'')} - \sqrt{\bar{V}_1(\zeta_1'' - \zeta_A'')}}{\sqrt{\bar{V}_2(\zeta_1'' - \zeta_A'')} - \sqrt{\bar{V}_1(\zeta_2'' - \zeta_A'')}} \quad (51)$$

Выражение (51) особенно просто, если поток в решетке бесциркуляционный; тогда

$$\zeta_0'' - \zeta_A'' = -\sqrt{(\zeta_1'' - \zeta_A'')(\zeta_2'' - \zeta_A'')}.$$

**10. Выбор годографа для изолированного профиля.** Для отдельного профиля может быть применена такая же система конформных преобразований. Несколько иным будет лишь определение точки  $\zeta_0''$ . Формула (51) в случае изолированного крыла дает неопределенный ответ, так как  $\bar{V}_1 = \bar{V}_2$ ,  $\zeta_1'' = \zeta_2''$ . Раскроем эту неопределенность, представляя крыло как частный случай решетки с  $l/t \rightarrow 0$ :

$$\sqrt{\bar{V}_1} = \sqrt{\bar{V}_\infty + \Gamma / (2t)} = \sqrt{\bar{V}_\infty} [1 + \Gamma / (4t\bar{V}_\infty)], \quad \sqrt{\bar{V}_2} = \sqrt{\bar{V}_\infty} [1 - \Gamma / (4t\bar{V}_\infty)],$$

$$\sqrt{\zeta_1'' - \zeta_A''} = \sqrt{\zeta_\infty'' - \zeta_A'' - \Delta\zeta'' / 2} = \sqrt{\zeta_\infty'' - \zeta_A''} \{1 - \Delta\zeta'' / [4(\zeta_\infty'' - \zeta_A'')]\},$$

$$\sqrt{\zeta_2'' - \zeta_A''} = \sqrt{\zeta_\infty'' - \zeta_A''} \{1 + \Delta\zeta'' / [4(\zeta_\infty'' - \zeta_A'')]\},$$

где

$$\zeta_\infty'' = (\zeta_1'' + \zeta_2'') / 2, \quad \Delta\zeta'' = \zeta_2'' - \zeta_1'',$$

$$\zeta_0'' - \zeta_A'' = (\zeta_0'' - \zeta_A'') \left\{ -\frac{2\Gamma}{4t\bar{V}_\infty} + \frac{2\Delta\zeta''}{4(\zeta_\infty'' - \zeta_A'')} \right\} : \left\{ -\frac{2\Gamma}{4t\bar{V}_\infty} - \frac{2\Delta\zeta''}{4(\zeta_\infty'' - \zeta_A'')} \right\}.$$

Замечая, что

$$\Delta \zeta'' = \Delta \zeta' \left| \frac{d\zeta''}{d\zeta'} \right|_{\zeta=\infty} = de^{i\beta} \frac{1}{n} \frac{\sqrt{\zeta_{\infty}'}}{\zeta_{\infty}'} = \frac{c\Gamma e^{i\beta}}{iV_{\infty} \sin \alpha} \frac{\sqrt{\zeta_{\infty}'}}{n\zeta_{\infty}'}, \quad \bar{V}_{\infty} = V_{\infty} e^{-i(\beta+\alpha)},$$

получим:

$$\zeta_0'' - \zeta_A'' = -(\zeta_{\infty}'' - \zeta_A'') \left\{ 1 - \frac{c \sqrt{\zeta_{\infty}'} e^{-i\alpha}}{n\zeta_{\infty}' (\zeta_{\infty}'' - \zeta_A'') \sin \alpha} \right\} : \left\{ 1 + \frac{c \sqrt{\zeta_{\infty}'} e^{-i\alpha}}{n\zeta_{\infty}' (\zeta_{\infty}'' - \zeta_A'') \sin \alpha} \right\}. \quad (52)$$

Выражение (52) проще всего вычислять графически.

## 11. Численные примеры построения профилей по годографу скорости.

### а) Дужка конечной толщины

Пусть годограф скоростей имеет вид круга (фиг. 1), причем точка  $\bar{V}=0$  лежит вне его. Зададим величины:

$$V_{\infty} = 2, \quad a = 1, \quad R = 1/2.$$

Внутри круга в точке  $\bar{V}_{\infty}$  будут, согласно (6), диполь и вихрь. Для того чтобы получить обтекание круга, надо вне его, во взаимной к  $\bar{V}_{\infty}$  точке  $\bar{V}_{\infty}^*$ , поместить аналогичные особенности: вихрь с циркуляцией той же величины и обратного знака и диполь с одинаковыми циркуляциями составляющих его вихрей (диполь можно рассматривать как предельный случай пары вихрей). Плечо диполя в точке  $\bar{V}_{\infty}^*$  при этом, согласно обозначениям фиг. 1, будет равно:

$$\left| \frac{a^2}{R - \varepsilon/2} - \frac{a^2}{R + \varepsilon/2} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \left| \frac{a^2 \varepsilon}{R^2 - \varepsilon^2/4} \right|_{\varepsilon \rightarrow 0} = \frac{a^2 \varepsilon}{R^2}.$$

Поэтому момент диполя в точке  $\bar{V}_{\infty}^*$  будет больше, чем момент диполя в точке  $\bar{V}_{\infty}$ :

$$m_{\infty}^* / m_{\infty} = a^2 / R. \quad (53)$$

Комплексный потенциал течения в плоскости  $\bar{V}$  будет равен:

$$w = \frac{i\Gamma \bar{V}_{\infty}}{2\pi(\bar{V} - \bar{V}_{\infty})} + \frac{i\Gamma \bar{V}_{\infty} a^2}{2\pi R^2 (\bar{V} - \bar{V}_{\infty}^*)} + \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_{\infty}} - \frac{i\Gamma}{2\pi} \ln \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_{\infty}^*}, \quad (54)$$

$$\frac{1}{\bar{V}} \frac{dw}{d\bar{V}} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[ -\frac{\bar{V}_{\infty}}{\bar{V}(\bar{V} - \bar{V}_{\infty})^2} - \frac{a^2 \bar{V}_{\infty}}{R^2 \bar{V}(\bar{V} - \bar{V}_{\infty}^*)^2} + \frac{1}{\bar{V}(\bar{V} - \bar{V}_{\infty}^*)} - \frac{1}{\bar{V}(\bar{V} - \bar{V}_{\infty})} \right],$$

$$z = \int \frac{1}{\bar{V}} \frac{dw}{d\bar{V}} d\bar{V} = \frac{i\Gamma}{2\pi} \left[ \frac{1}{\bar{V} - \bar{V}_{\infty}} + \frac{a^2 \bar{V}_{\infty}}{R^2 \bar{V}_{\infty}^* \bar{V} - \bar{V}_{\infty}^*} + \left( \frac{1}{\bar{V}_{\infty}^*} + \frac{a^2 \bar{V}_{\infty}}{R^2 \bar{V}_{\infty}^*} \right) \ln \frac{\bar{V} - \bar{V}_{\infty}^*}{\bar{V}} \right]. \quad (55)$$

На фиг. 1 дан профиль, построенный по этой формуле. Размеры его выражены в зависимости от  $\Gamma$ . Меняя параметры  $V_{\infty}$ ,  $a$ ,  $R$ , можно получить дужки различной кривизны и толщины. Если точку  $\bar{V}=0$  расположить не на прямой  $\bar{V}_{\infty}$ ,  $\bar{V}^*$ , то получится дужка, стоящая под углом атаки к  $V_{\infty}$ .

Аналогичным путем могут быть построены дужки другой формы, если воспользоваться внутренним обтеканием какой-либо другой замкнутой кривой.

### б) Решетка дужек конечной толщины

Для того чтобы упростить вычисления, выберем годограф тоже в виде круга и зададим расположение точек  $\bar{V}_1$ ,  $\bar{V}_2$ ,  $\bar{V}_0$  по отношению к кругу, как

указано на фиг. 2. Внутри круга, согласно формуле (15а), будут две особенности. Обтекание этими особенностями можно получить, если поместить аналогичные особенности во взаимных точках  $\bar{V}_1^*$  и  $\bar{V}_2^*$  (циркуляции вихрей должны быть равны и обратны по знаку, расходы источников равны и одинаковы по знаку). Комплексный потенциал в плоскости  $\bar{V}$  при этом окажется равным:

$$w = -\frac{i\bar{V}_1}{2\pi} \ln(\bar{V} - \bar{V}_1) + \frac{i\bar{V}_2}{2\pi} \ln(\bar{V} - \bar{V}_2) + \frac{iV_1}{2\pi} \ln(\bar{V} - \bar{V}_1^*) - \frac{iV_2}{2\pi} \ln(\bar{V} - \bar{V}_2^*). \quad (56)$$

Комплексная координата профиля  $z$  отсюда равна:

$$z = \int \frac{1}{\bar{V}} \frac{dw}{d\bar{V}} d\bar{V} = \frac{it}{2\pi} \left[ \ln \frac{\bar{V} - \bar{V}_2}{\bar{V} - \bar{V}_1} + \frac{V_1}{V_1^*} \ln \frac{\bar{V} - \bar{V}_1^*}{\bar{V}} - \frac{V_2}{V_2^*} \ln \frac{\bar{V} - \bar{V}_2^*}{\bar{V}} \right]. \quad (57)$$

Вычисленные по этой формуле профили в решетке представлены на фиг. 2. Профили с более благоприятным распределением толщин можно было бы получить из годографов овальной формы.

### в) Решетка профилей

Построим решетку профилей, для простоты пользуясь годографом бесциркуляционного обтекания. Пусть

$$\beta_\infty = \beta = 30^\circ, \quad l/t \approx 1.$$

По формуле (31) путем подбора находим, что для решетки пластинок следует взять  $\vartheta = 33^\circ$ ; чтобы получить  $l/t = 1$ , сохраняем  $\vartheta = 33^\circ$  и для решетки профилей. Углов  $\beta$  и  $\vartheta$  достаточно, чтобы расположить точки  $\zeta_1$  и  $\zeta_2$  на верхней полуплоскости относительно начала координат (фиг. 4), которое в данном случае совпадает с точкой разветвления. Выбираем ряд точек на вещественной оси и вычисляем в них значение потенциала по формуле (28), полагая  $\Gamma = 0$ .

После этого задаемся положением точки  $O$  в нижней полуплоскости, относительно которой будем вести преобразование (49) — извлечение корня степени  $n$ . Показатель корня принимаем равным  $n = 10$ . На фиг. 4 показано расположение ряда произвольных точек вещественной оси — точек 1, 2 и А; точка В находится в бесконечности.

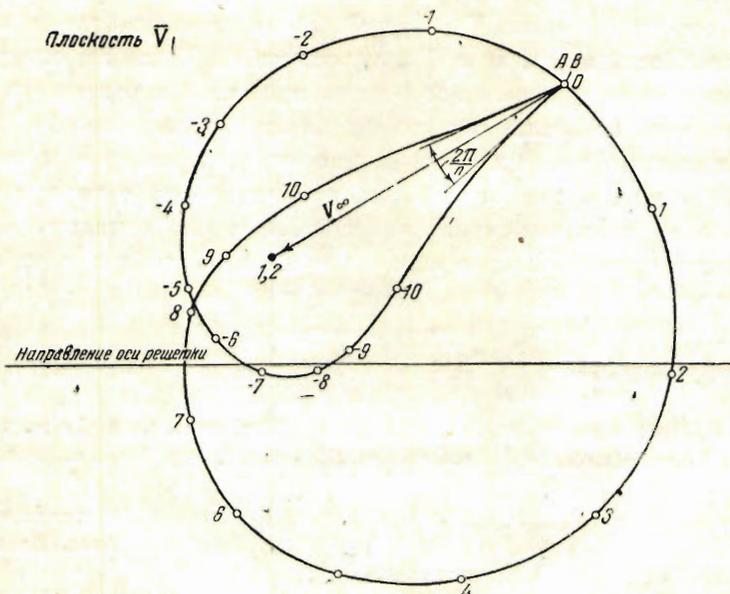
По формуле (51а) вычисляем положение полюса инверсии  $O$  (фиг. 5). Вычисление может быть заменено простым графическим построением — точка  $O$  лежит на биссектрисе угла  $1A2$ , причем расстояние  $OA$  равно среднему геометрическому отрезков  $1A$  и  $2A$ .

Теперь надо найти положение выбранных точек вещественной оси плоскости  $\zeta$  в плоскости  $\zeta''$ , для чего надо произвести инверсию, но проще произвести сопряженное преобразование на продолжении лучей, соединяющих точки  $\zeta'$  с полюсом  $O$  и откладывать отрезки, равные по длине  $1/|\zeta' - \zeta_0|$ . В плоскости  $\zeta''$  получается замкнутая кривая (фиг. 5) В точке В (соответствующей задней кромке профиля) касательные образуют угол  $\pi/n$ .

Деля отрезок  $AB$  пополам, находим точку  $C$ , относительно которой надо произвести возведение в квадрат плоскости  $\zeta''$ , чтобы перейти к годографу скоростей. Точка  $C$  для нашего примера (бесциркуляционный поток) одновременно является серединой отрезка 1, 2.

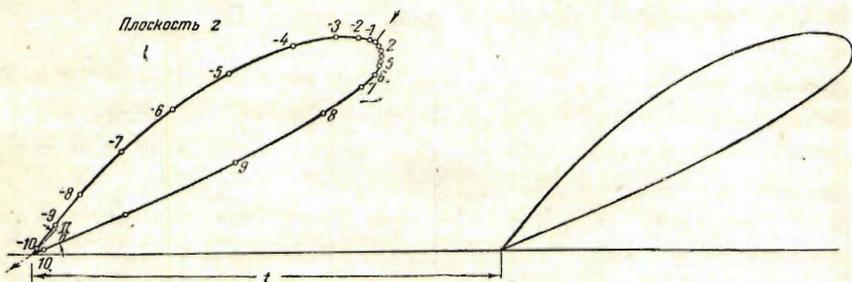
Так как мы возводим в квадрат не плоскость  $\zeta''$ , а плоскость  $\bar{\zeta}''$ , то в резуль-

тате получаем годограф действительных скоростей  $V$  (фиг. 7), а не сопряженных. В силу того, что точки 1 и 2 диаметрально противоположны, в плоскости  $V$  они сливаются в одну  $V_\infty$ , как и должно быть при бесциркуляци-



Фиг. 7.

онном обтекании ( $V_1 = V_2 = V_\infty$ ). Если бы мы взяли пример, в котором  $V_1 \neq V_2$ , т. е.  $\Gamma \neq 0$ , то в плоскости  $\zeta''$  точки 1 и 2 были бы расположены относи-



Фиг. 8.

тельно  $C$  по-иному, а в плоскости  $V$  они, по величине и направлению, соответствовали бы векторам скоростей  $V_1$  и  $V_2$ .

Профиль, соответствующий полученному годографу скоростей, построен как огибающая ломаной линии, состоящей из отрезков  $\Delta s$ . Длина отрезка  $\Delta s$  вычисляется по формуле (2), а его направление — по средней скорости на соответствующем участке годографа.

На фиг. 8 представлена решетка профилей для рассматриваемого примера.

Применяя те же конформные преобразования, можно построить отдельный профиль; несколько отлично будет лишь определение полюса инверсии по формуле (52).

Нами был взят пример построения профиля по голографу скоростей для бесциркуляционного потока. Скорости для обтекания другим потоком могут быть легко подсчитаны по формулам (39), (38) и (28): строя по (28) и (38) кривые зависимости  $\Phi$  и  $V_{\perp} / V_{\parallel}$  от координаты вещественной оси плоскости  $\zeta$ , можно графически определить связь  $V_{\perp} / V_{\parallel}$  и  $\Phi$ . Такая же связь будет и на полученном профиле. После этого, зная  $V_{\parallel}$ , можно найти  $V$  для любого угла атаки.

Многочисленные примеры построения профилей в решетке и профилей, отдельно стоящих, показали, что по избранному нами способу получаются слабо искривленные профили независимо от того, построены ли профили по голографу бесциркуляционного потока или потока с циркуляцией. Для профилей, более сильно искривленных, необходимо отыскать конформные преобразования другого типа, в каком направлении сейчас и продолжается настоящая работа.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Кочин Н. Е. и Розе Н. В. Введение в теоретическую гидромеханику. ГТТИ. 1932. Стр. 190.
2. Weing F. Die Strömung um die Schaufeln von Turbomaschinen. Leipzig. 1935. [S. 78].
3. König E. Potentialströmung durch Gitter. „Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech.“ 1922. Bd. 2. S. 422.

Поступила в редакцию 13 I 1940.

Институт механики  
Акад. Наук СССР.

## CONSTRUCTION OF SHAPES BY MEANS OF HODOGRAPHS OF VELOCITIES

L. A. SIMONOV

(Summary)

The work deals with the procedure for constructing a shape by means of a given hodograph of velocities of plane parallel flow at points of contour of the shape.

This procedure is based on a conformal representation of the domain outside the shape on the domain inside the hodograph of velocities.

In the work the peculiarities of flow in the domain of the hodograph or an isolated shape are considered, as well as the peculiarities of current in cases of flow around a lattice of shapes for various relationships of velocity  $V_1$  at infinity in front of the lattice, and velocity  $V_2$  at infinity behind the lattice. The general properties of hodographs of velocities for shapes with acute and obtuse edges are established.

The velocities at points on the shape constructed by means of hodographs of velocities for a direction of the velocity at infinity  $V_{\infty}$  can easily be calculated for a flow with any other direction  $V_{\infty}$ . For this purpose the author employs the representation of the domain outside of the shape or the lattice of shapes on the upper half-plane.

The procedure of selection of hodographs of velocities is worked out, based on the sequential conformal representation of the upper half-plane, for the lattice of shapes. This procedure is developed for an isolated wing as a particular case of a lattice. Examples of constructions of lattices of shapes as well as isolated shapes are given in the work.