

Т. IV, в. 4, 1940

**КРЫЛО ПОСТОЯННОЙ ХОРДЫ В АЭРОДИНАМИЧЕСКОЙ ТРУБЕ
ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ СО СВОБОДНЫМИ БОКОВЫМИ
ГРАНИЦАМИ**

М. Я. ГАФАНОВИЧ

(Москва)

На основании теории крыла в свободном потоке, развитой Прандтлем Штюпером^[1], была решена задача обтекания крыла бесконечного размаха с постоянной хордой, проходящего через свободные границы струи. При этом граничным условием служит постоянство давления, т. е. давление на границе всюду принимается равным внешнему давлению. В первом приближении это условие будет выполняться, если на свободной границе струи компоненты скорости возмущения, вызванные крылом, в направлении потока исчезают. Здесь рассматривается крыло постоянной хорды в аэродинамической трубе прямоугольного сечения со свободными боковыми границами, но с твердыми стенками сверху и снизу.

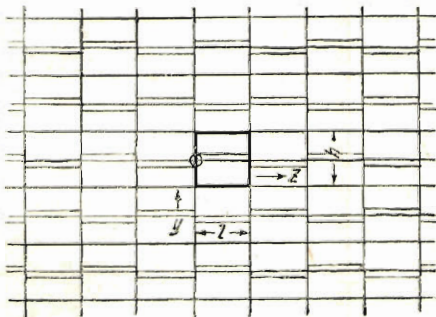
Постановка задачи

Крыло помещаем по середине прямоугольного сечения ширины l и высоты h и эту систему распространяем до бесконечности во все направления. Получается крыло с переменным-периодическим углом атаки, принимающим значения $+\alpha^*$ и $-\alpha^*$ в плоскости $x=0$ с периодом в $2l$.

Внезапное изменение угла атаки происходит в точках $x=0, \pm l, \pm 2l, \dots$

Двигаясь в вертикальном направлении, мы пересекаем твердые стенки, следовательно, угол атаки меняется от $+\alpha^*$ до $-\alpha^*$ с периодом в $2h$, и внезапное изменение угла атаки происходит в точках $y = \pm h/2, \pm 3h/2, \pm 5h/2, \dots$ (Фиг. 1).

При этой схеме действительно выполнены все краевые условия, а именно исчезают компоненты скорости в направлении потока в точках $x=nl$, т. е. продольные, а в точках $y=(2n+1)h/2$ — нормальные $n=0, \pm 1, \pm 2, \dots$ ¹.



Фиг. 1.

¹ В случае Штюпера в вертикальном направлении в точках $y=(2n+1)h/2$ исчезают горизонтальные компоненты скорости.

Согласно теории крыла по Прандтлю следует, что индуктивная скорость W выражается следующей формулой:

$$W(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} \frac{(-1)^m (z - z_1) dz_1}{(z - z_1)^2 + (mh)^2}, \quad (1)$$

или

$$W(z) = \frac{1}{4\pi} \int_{-\infty}^{+\infty} \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} \frac{(-1)^m (z - z_1)/h}{[(z - z_1)/h]^2 + m^2} \frac{dz_1}{h}.$$

Преобразуем подынтегральное выражение. Так как этот ряд знакочередующийся, то [2]

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{(-1)^m a}{a^2 + m^2} = -\operatorname{res} \left[\frac{\pi}{\sin \pi a} f(a) \right] \quad \left(a = \frac{z - z_1}{h} \right). \quad (2)$$

Тогда индуктивная скорость будет:

$$W(z) = \frac{1}{4h} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{d\Gamma(z_1)}{dz_1} \frac{dz_1}{\operatorname{sh} [\pi (z - z_1)/h]}. \quad (3)$$

Представим теперь циркуляцию в виде ряда Фурье. Так как на концах крыла $\Gamma(z)$ равняется нулю, то получим:

$$\Gamma(z) = \Gamma_{\infty} \sum_0^{\infty} a_{2n+1} \sin [(2n+1) \pi z/l]. \quad (4)$$

Дифференцируя этот ряд и подставив его в выражение для индуктивной скорости, получим:

$$W(z) = \sum_0^{\infty} \frac{a_{2n+1} \pi (2n+1)}{4hl} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos [(2n+1) \pi z_1/l]}{\operatorname{sh} [\pi (z - z_1)/h]} dz_1.$$

Обозначим $\pi (z - z_1)/h$ через v , тогда

$$(2n+1) \pi z_1/l = (2n+1) (\pi z/l - hv/l), \quad dz_1 = -(h/\pi) dv.$$

После этой подстановки и применения формулы для косинуса разности интеграл при индуктивной скорости примет вид:

$$\begin{aligned} Y &= \frac{h}{\pi} \cos \frac{(2n+1) \pi z}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\cos [(2n+1) hv/l]}{\operatorname{sh} v} dv + \\ &+ \frac{h}{\pi} \sin \frac{(2n+1) \pi z}{l} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin [(2n+1) hv/l]}{\operatorname{sh} v} dv. \end{aligned}$$

Первый несобственный интеграл равен нулю, так как подынтегральная функция — нечетная, второй дает [3]:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\sin [(2n+1) hv/l]}{\operatorname{sh} v} dv = \pi \operatorname{th} \frac{(2n+1) h\pi}{2l}. \quad (5)$$

Тогда

$$W(z) = \Gamma_{\infty} \sum_0^{\infty} \frac{a_{2n+1} \pi (2n+1)}{4l} \operatorname{th} \frac{(2n+1) h\pi}{2l} \sin \frac{(2n+1) \pi z}{l}. \quad (6)$$

Периодически изменяющийся угол атаки мы развернем в ряд Фурье:

$$\alpha(z) = \alpha^* \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\sin [(2n+1) \pi z / l]}{2n+1}. \quad (7)$$

Подставляя в уравнение

$$\Gamma(z) = \frac{cvt}{2} \left[\alpha(z) - \frac{W(z)}{v} \right],$$

где

$$c = (dC_y / da)_{\lambda=\infty},$$

ряды Фурье для $\alpha(z)$ и $W(z)$, сравнивая коэффициенты разложения с коэффициентами ряда

$$\Gamma(z) = \Gamma_{\infty} \sum_0^{\infty} a_{2n+1} \sin \frac{(2n+1) \pi z}{l}$$

и принимая во внимание, что

$$\Gamma_{\infty} = cvt \alpha^* / 2,$$

получим:

$$a_{2n+1} = 4 : \left\{ \pi (2n+1) \left[1 + \frac{ct \pi (2n+1)}{8l} \operatorname{th} \frac{(2n+1) h\pi}{2l} \right] \right\}. \quad (8)$$

Тогда

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_{\infty}} = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \sin \frac{(2n+1) \pi z}{l} : \left\{ (2n+1) \left[1 + \frac{ct \pi (2n+1)}{8l} \operatorname{th} \frac{(2n+1) h\pi}{2l} \right] \right\}. \quad (9)$$

Вводя обозначения

$$\frac{8l}{ct \pi} = \lambda,$$

перепишем выражение (9):

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_{\infty}} = \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \sin \frac{(2n+1) \pi z}{l} : \left[(2n+1) + \frac{1}{\lambda} (2n+1)^2 \operatorname{th} \frac{(2n+1) h\pi}{2l} \right].$$

Разлагая коэффициенты этого ряда методом частичных дробей и принимая во внимание, что

$$\sum_0^{\infty} \frac{\sin [(2n+1) \pi z / l]}{2n+1} = \frac{\pi}{4},$$

получим окончательно выражение для распределения циркуляции:

$$\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_{\infty}} = 1 - \frac{4}{\pi} \sum_0^{\infty} \frac{\operatorname{th} [(2n+1) h\pi / (2l)] \sin [(2n+1) \pi z / l]}{(2n+1) \operatorname{th} [(2n+1) h\pi / (2l)] + \lambda}. \quad (10)$$

Если $h \rightarrow \infty$, то

$$\operatorname{th} \frac{2(n+1)h\pi}{2l} = 1,$$

и мы приходим к одному из случаев Штюпера, а именно к случаю двух параллельных плоскостей как свободных границ.

Определение подъемной силы

Из теории крыла известно, что элементарная подъемная сила

$$dP = \rho \Gamma(z) V dz.$$

Если заменить Γ_∞ через $\frac{cVt\alpha^*}{2}$, то

$$dP = \frac{c\rho V^2 t\alpha^*}{2} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} dz$$

и, следовательно,

$$P = \frac{c\rho V^2 t\alpha^*}{2} \int_0^l \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} dz. \quad (11)$$

Делая подстановку согласно (10) и интегрируя почленно, получим:

$$\int_0^l \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} dz = l - \frac{8l}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{\operatorname{th} [(2n+1)h\pi/(2l)]}{(2n+1)^2 \operatorname{th} [(2n+1)h\pi/(2l)] + \lambda(2n+1)},$$

или

$$\int_0^l \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} dz = l - \frac{8l}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2 + \lambda(2n+1) \operatorname{cth} [(2n+1)h\pi/(2l)]}.$$

Таким образом полная подъемная сила будет:

$$P = \frac{\rho V^2 l t c \alpha^*}{2} \left[1 - \frac{8}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2 + \lambda(2n+1) \operatorname{cth} [(2n+1)h\pi/(2l)]} \right]. \quad (12)$$

Заменяя c теоретическим равным 2π и вводя обозначение

$$f(\lambda) = \frac{8}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2 + \lambda(2n+1) \operatorname{cth} [(2n+1)h\pi/(2l)]}, \quad (13)$$

для коэффициента подъемной силы получим формулу:

$$C_y = 2\pi x^* [1 - f(\lambda)]. \quad (14)$$

Определение индуктивного сопротивления

Из теории крыла известно, что элементарное индуктивное сопротивление

$$dW = \rho \Gamma(z) W(z) dz,$$

а индуктивную скорость можно представить в виде:

$$W(z) = V \left(\alpha^* - \frac{2\Gamma(z)}{cVt} \right).$$

Так как $\Gamma(z) = C_y t V$ и $\Gamma_\infty = c V t \alpha^* l$, то легко получим:

$$W(z) = \frac{c V^2 t \alpha^{*2}}{2} \frac{1 - \Gamma(z)/\Gamma_\infty}{\Gamma_\infty}.$$

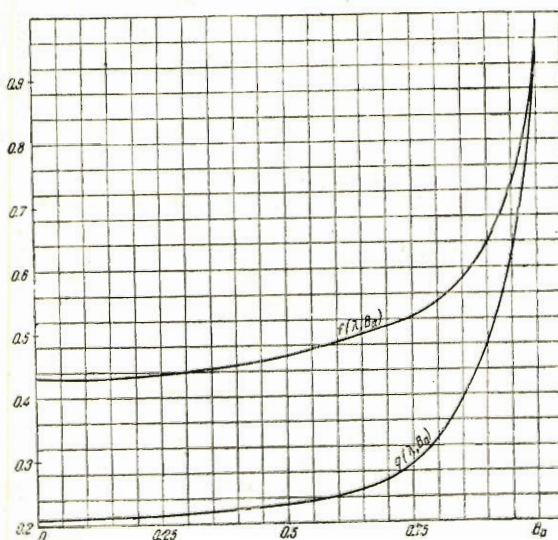
Поставим $W(z)$ в выражение для индуктивного сопротивления:

$$dW = \frac{\rho c V^2 t \alpha^{*2}}{2} \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} \left(1 - \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty}\right) dz, \quad (15)$$

тогда, интегрируя,

$$W = \frac{\rho c V^2 t \alpha^{*2}}{2} \left\{ \int_0^l \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} dz - \int_0^l \left[\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} \right]^2 dz \right\}.$$

Первый интеграл уже взят при определении подъемной силы.



Фиг. 2.

Второй интеграл равен:

$$\int_0^l \left[\frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} \right]^2 dz = \int_0^l \left[1 - \frac{4}{\pi} \sum_0^\infty \frac{\sin [(2n+1) \pi z / l]}{(2n+1) + \lambda \operatorname{cth} [(2n+1) h \pi / (2l)]} \right]^2 dz =$$

$$= \frac{8l}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{1}{\{(2n+1) + \lambda \operatorname{cth} [(2n+1) h \pi / (2l)]\}^2}.$$

Тогда

$$\int_0^l \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty} \left(1 - \frac{\Gamma(z)}{\Gamma_\infty}\right) dz = \frac{8l}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{1}{(2n+1)^2 + \lambda \operatorname{cth} [(2n+1) h \pi / (2l)]}$$

$$- \frac{8l}{\pi^2} \sum_0^\infty \frac{1}{\{(2n+1) + \lambda \operatorname{cth} [(2n+1) h \pi / (2l)]\}^2} \quad (16)$$

Принимая во внимание (13) и обозначая через

$$g(\lambda) = \frac{8}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\{(2n+1) + \lambda \operatorname{cth} [(2n+1)h\pi / (2l)]\}^2}, \quad (17)$$

для коэффициента индуктивного сопротивления получим формулу:

$$C_i = 2\pi\alpha^{*2} [f(\lambda) - g(\lambda)]. \quad (18)$$

Парабола индуктивного сопротивления примет вид:

$$\frac{C_i}{C_y^2} = \frac{1}{2\pi} \frac{f(\lambda) - g(\lambda)}{[1 - f(\lambda)]^2}. \quad (19)$$

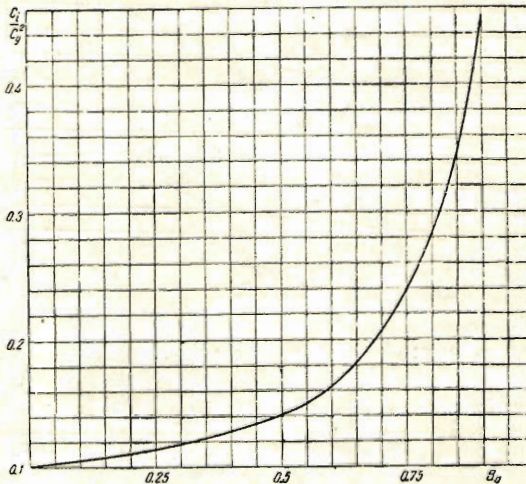
Величина

$$\eta = 2 \frac{f(\lambda) - g(\lambda)}{[1 - f(\lambda)]^2} \quad (20)$$

дает поправку на сопротивление крыла при прохождении им свободных границ.

Влияние сжимаемости

Из газовой динамики известно, что поток сжимаемого газа, обтекающий крыло, может быть приближенно заменен потоком несжимаемой жидкости, протекающим через трубу, суженную согласно соотношений [4]:



Фиг. 3.

$$x' = x, \quad y' = y \sqrt{1 - B_a^2}, \quad z' = z \sqrt{1 - B_a^2}, \quad (21)$$

обтекаемое крыло должно быть растянуто в направлении оси y и сжато в направлении оси z согласно соотношений:

$$x' = x, \quad y' = y / \sqrt{1 - B_a^2}, \quad z' = z \sqrt{1 - B_a^2}. \quad (22)$$

Отсюда следует, что

$$\alpha' = \alpha^* / \sqrt{1 - B_a^2}, \quad \lambda' = \lambda \sqrt{1 - B_a^2}, \quad C_i = C_i' / \sqrt{1 - B_a^2}, \quad C_y' = C_y. \quad (23)$$

Учитывая это, формулы (13), (14), (17), (18) и (19) можно представить в виде:

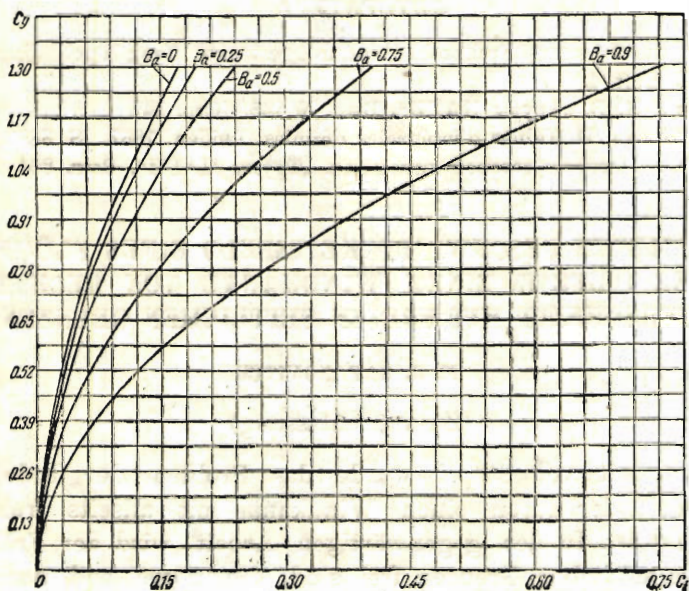
$$f(\lambda, B_a) = \frac{8}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{(2n+1)^2 + \lambda \sqrt{1-B_a^2} (2n+1) \operatorname{cth} [(2n+1)h\pi/(2l)]}, \quad (24)$$

$$g(\lambda, B_a) = \frac{8}{\pi^2} \sum_0^{\infty} \frac{1}{\{(2n+1) + \lambda \sqrt{1-B_a^2} \operatorname{cth} [(2n+1)h\pi/(2l)]\}^2}, \quad (25)$$

$$C_y = 2\pi\alpha^* [1 - f(\lambda, B_a)], \quad (26)$$

$$C_i = \frac{2\pi}{\sqrt{1-B_a^2}} \alpha^{*2} [f(\lambda, B_a) - g(\lambda, B_a)], \quad (27)$$

$$\frac{C_i}{C_y^2} = \frac{1}{2\pi \sqrt{1-B_a^2}} \frac{f(\lambda, B_a) - g(\lambda, B_a)}{[1 - f(\lambda, B_a)]^2}. \quad (28)$$



Фиг. 4.

В формулах (24) и (25) величина $\operatorname{cth} [(2n+1)h\pi/(2l)]$ влияет на первые члены разложений функций $f(\lambda, B_a)$ и $g(\lambda, B_a)$, так как практически $\operatorname{cth} [(2n+1)h\pi/(2l)]$ почти не отличается от единицы даже при $n=1$.

Для вычисления функций $f(\lambda, B_a)$ и $g(\lambda, B_a)$ мы брали в разложениях¹ (24) и (25) n от 0 до 25 и вычислили их для $B_a=0, 0,25, 0,5, 0,75, 1$ при $\lambda=l/t=4$ (фиг. 2).

¹ Ряды, представляющие функции $f(\lambda, B_a)$ и $g(\lambda, B_a)$, очевидно, сходятся быстрее, чем ряд $A \sum_0^{\infty} \frac{1}{n^2}$, который равен $\frac{\pi}{6}$. Задав требуемую точность, мы получим необходимое число членов ряда для вычисления наших функций.

На фиг. 3 дана величина C_i/C_y^2 в зависимости от B_a для $h/l=1$. На фиг. 5 даны параболы индуктивного сопротивления для B_a , равных 0, 0.25, 0.5, 0.75 и 0.9. Таким образом мы имеем возможность теоретически определить распределение циркуляции, индуктивное сопротивление, подъемную силу для крыла, проходящего через свободные границы струи при различных B_a .

Необходимо сделать следующие замечания: 1) так как задача решена по линеализированной теории, то решение тем более точно, чем больше удлинение. Ошибка возрастает при увеличении B_a ; 2) для практического использования формул, т. е. при пересчетах на бесконечный размах аэродинамических коэффициентов крыльев, необходима экспериментальная проверка.

Поступила в редакцию 9 I 1940

Центральный
аэродинамический институт
им. Н. Е. Жуковского

ЛИТЕРАТУРА

1. Stüper. Der durch einen Freistrahл hindurchgesteckte Tragflügel. „Ingen. Archiv“. 1932. Bd. III. Heft 4.
2. Зволинский Н. В. „Труды ЦАГИ“. Вып. № 245. [Стр. 14].
3. Bierens de Haan D. Tables d'intégrales définies. Leiden. 1867. [S. 988].
4. Франкель Ф. И. Основы газовой динамики. „Труды ЦАГИ“. Вып. 864. [Стр. 57].

DAS INDUZIERTES GESCHWINDIGKEITSFELD EINES FLÜGELS MIT KONSTANTER TIEFE IN EINEM WINDKANAL VON RECHTECKIGEM QUERSCHNITT MIT FREIEN SEITLICHEN GRENZEN

M. J. GAFANOVITSCH

(Zusammenfassung)

In einer Arbeit von Stüper wurde das Problem der Induktion eines Flügels behandelt, der durch einen Windkanal mit allseits freien Grenzen hindurchgesteckt ist. In der gegenwärtigen Arbeit wird der Fall behandelt, in dem nur die seitlichen Grenzen frei sind, die obere und untere Grenze des Luftstroms aber von festen Wänden gebildet wird.

Die benutzte Methode ist der von Stüper analog. In der Arbeit wird auch der Einfluss der Kompressibilität der Luft behandelt.

Der Arbeit sind Kurven zur Bestimmung des Auftriebs und induzierten Widerstands beigelegt.