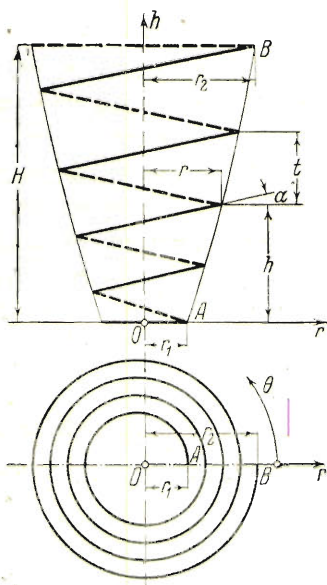


К ТЕОРИИ СПЕЦИАЛЬНЫХ ТИПОВ СПИРАЛЬНЫХ ПРУЖИН

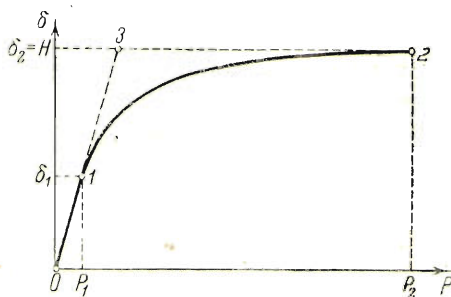
Е. П. ПОПОВ

(Москва)

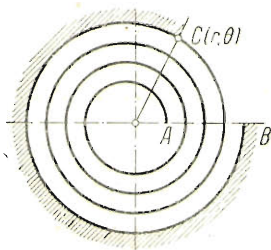
В нашей предыдущей работе¹ был исследован вопрос о расчете спиральных нецилиндрических пружин с учетом посадки витков на опорную плоскость. Сохраняя прежние основные предпосылки и обозначения, приведем те общие результаты из указанной работы, которые понадобятся для проводимого здесь исследования.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



Фиг. 3.

Общему случаю спиральной пружины (фиг. 1) соответствует график зависимости осадки от нагрузки $\delta = \delta(P)$, показанный на фиг. 2. Условием посадки произвольной точки спирали на опорную плоскость является равенство:

$$\Delta\alpha = \alpha, \tag{1}$$

¹ О расчете осадки нецилиндрических спиральных пружин. „Приклад. мат. и мех.“ 1940. Т. IV. Вып. 1.

причем

$$\Delta\alpha = \frac{Pr^2}{C} \quad (2)$$

и

$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{dh}{d\theta} \quad (3)$$

Прямолинейная часть 0—1 графика $\delta = \delta(P)$ (фиг. 2) до начала посадки витков подчиняется закону:

$$\delta_{0 \leq P \leq P_1} = \frac{P}{C} \int_0^{2\pi n} r^3 d\theta, \quad (4)$$

криволинейная же часть 1—2, сопровождающаяся посадкой, имеет уравнение:

$$\delta_{P_1 \leq P \leq P_2} = \frac{P}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta + H - h, \quad (5)$$

где h и верхний предел интеграла θ являются начальными координатами точки спирали, лежащей при данном значении нагрузки P на опорную плоскость. При этом первый член формулы (5) представляет осадку рабочей части пружины AC (фиг. 3), а именно:

$$\delta_{AC} = \frac{P}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta. \quad (6)$$

В связи с описанным свойством спиральных пружин давать нелинейную зависимость осадки δ от нагрузки P при работе материала в пределах пропорциональности возникает практически важный вопрос об использовании их в качестве особых упругих звеньев в механизмах специальных приборов, где требуется такая нелинейная зависимость. Возможности здесь довольно большие, но существует одно ограничение. Так как явление посадки сопровождается всегда увеличением общей жесткости пружины, то кривая $\delta = \delta(P)$ может отклоняться (фиг. 2) только вправо от прямой. Следовательно, непрерывно поднимаясь вверх, эта кривая может иметь лишь отрицательную кривизну, т. е. всегда

$$\frac{d\delta}{dP} > 0 \quad \text{и} \quad \frac{d^2\delta}{dP^2} \leq 0. \quad (7)$$

Кроме того, здесь важно отметить и некоторые другие общие свойства кривой 1—2 (фиг. 2). Найдем производную $\frac{d\delta}{dP}$. Для этого продифференцируем (5) по θ , что дает:

$$\frac{d\delta}{dP} \frac{dP}{d\theta} = \frac{1}{C} \frac{dP}{d\theta} \int_0^{\theta} r^3 d\theta + \frac{Pr^3}{C} - \frac{dh}{d\theta}.$$

Последние два члена взаимно уничтожаются, так как из (1)—(3)

$$\frac{Pr^2}{C} = \frac{1}{r} \frac{dh}{d\theta}.$$

Замечая далее, что $\frac{dP}{d\theta} \neq 0$, после сокращения имеем:

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{1}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta. \quad (8)$$

Сравнивая (8) с (6), находим:

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta_{AC}}{P}. \quad (9)$$

Отсюда следует, что, проведя в произвольной точке на кривой 1—2 (фиг. 4) касательную DE , а затем горизонталь EF , мы разбиваем отрезок $DK = \delta$ на две части:

$$DF = \delta_{AC} = \frac{P}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta \quad \text{и} \quad FK = \delta_{BC} = H - h,$$

которые равны соответственно осадкам рабочей и нерабочей частей пружины при данном значении нагрузки P (фиг. 3).

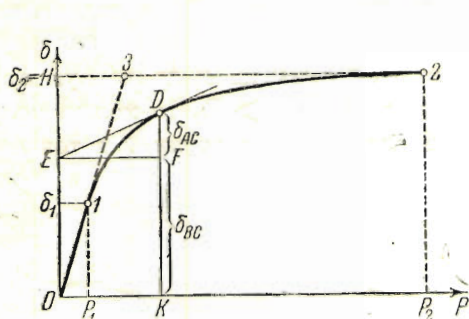
Кроме того, из (9) следует также, что в точке 1 (фиг. 4) при начале посадки

$$\left(\frac{d\delta}{dP}\right)_1 = \frac{\delta_1}{P_1}, \quad (10)$$

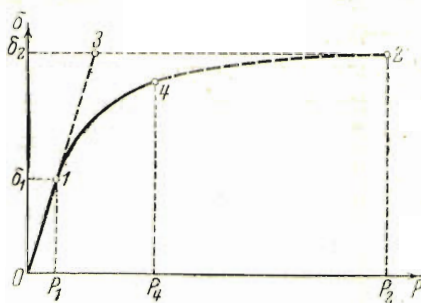
а в точке 2 при сжатии всей пружины в одну плоскость

$$\left(\frac{d\delta}{dP}\right)_2 = 0. \quad (11)$$

Из этих двух соотношений вытекает, что кривая 1—2 касается прямых 1—3 и 2—3 в точках 1 и 2.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Учет всех этих свойств (7), (9), (10) и (11) необходим при проектировании специальной пружины, удовлетворяющей заданному закону $\delta = \delta(P)$. Последний безусловно должен быть ограничен условиями (7). Однако соблюдение других условий (10) и (11), обязательное для графика осадки отдельной пружины, может быть обойдено конструктивным путем.

1) Для получения закона $\delta = \delta(P)$ в виде кривой 0—1—4 (фиг. 5) с произвольным положительным углом наклона касательной на конце 4 достаточно лишь не доводить до конца сжатие пружины при ее работе.

2) Для получения закона $\delta = \delta(P)$ в виде кривой 0'—1—4 (фиг. 6) с произвольным положительным наклоном касательной в точке 1, не совпадающим с наклоном прямолинейного участка 0'—1, нужно к нашей специальной пружине добавить обычную цилиндрическую, как показано на фиг. 6. График сжатия последней выражается прямой 0'А. Специальная же пружина должна деформироваться по закону 0—1—2. При этом прямая 0—1—3, касательная

к кривой 1—2, отсекая на оси δ отрезок OO' , задает тем самым необходимую высоту цилиндрической пружины:

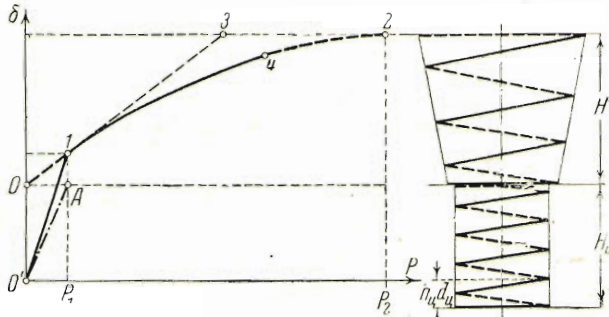
$$H_u = OO' + n_u d_u \tag{12}$$

где n_u и d_u — число витков и диаметр проволоки цилиндрической пружины, а произведение $n_u d_u$ представляет высоту ее в сжатом до отказа состоянии.

Полное сжатие ее должно наступить при нагрузке $P = P_1$, соответствующей началу посадки витков у специальной пружины. Так как при этом

$$\delta_u = H_u - n_u d_u,$$

то по формуле для осадки цилиндрической пружины имеем:

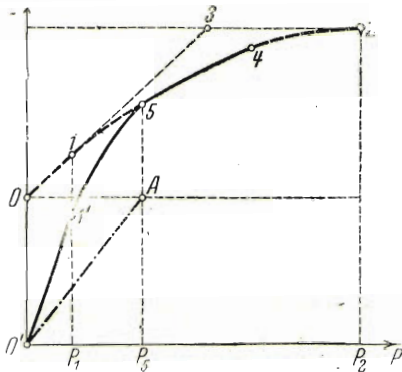


Фиг. 6.

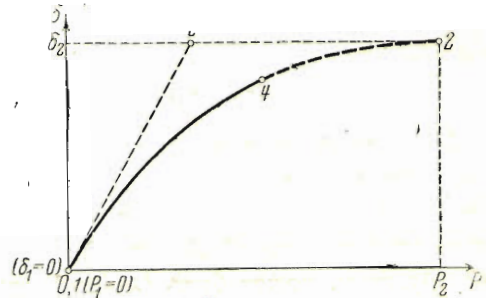
$$\frac{64P_1 r_u^3 n_u}{G d_u^4} = H_u - n_u d_u. \tag{13}$$

Уравнения (12) и (13) служат для подбора цилиндрической пружины. Проектирование же специальной пружины сводится к той же задаче, как и на фиг. 5.

3) Если в предыдущей конструкции взять другую цилиндрическую пружину, которая сжималась бы до отказа при нагрузке $P > P_1$, то можно получить график $\delta = \delta(P)$ в виде фиг. 7 с переломом выше точки 1 в точке 5,



Фиг. 7.



Фиг. 8.

которая соответствует нагрузке полного сжатия цилиндрической пружины P_5 . Графиком сжатия последней является прямая $O'A$, а графиком сжатия специальной пружины — кривая $O-1-5-4-2$. Аналогично предыдущему здесь:

$$H_u = OO' + n_u d_u, \tag{14}$$

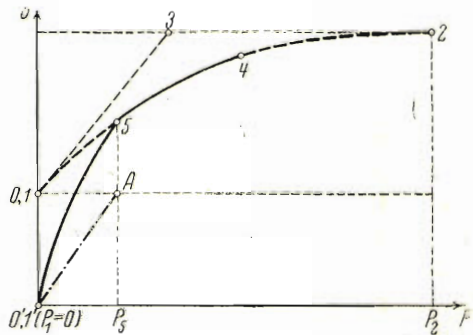
$$\frac{64P_5 r_u^3 n_u}{G d_u^4} = H_u - n_u d_u. \tag{15}$$

Кроме того, наличие точки $1'$ накладывает дополнительное условие:

$$\frac{64P_1 r_4^3 n_4}{Gd_4^4} = \delta_1' - \delta_1, \tag{16}$$

где δ_1' — суммарная осадка при $P=P_1$, а δ_1 — осадка специальной пружины при начале посадки витков. По (15) и (16) подбирается цилиндрическая пружина, а проектирование специальной снова сводится к той же задаче, что и на фиг. 5.

4) Заметим, что как на фиг. 5, так и на фиг. 7 прямолинейный участок $0-1$ и соответственно $0'-1'$ может отсутствовать, когда посадка витков начинается сразу, давая с самого начала сжатия криволинейную зависимость $\delta = \delta(P)$. При этом фиг. 5 и 7 примут вид соответственно фиг. 8 и 9. Очевидно, что оба эти случая в отношении проектирования специальной пружины являются частными случаями фиг. 5 при $P_1 = 0$.



Фиг. 9.

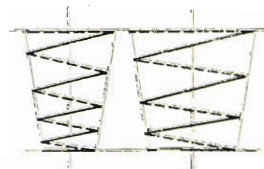
5) Другим частным случаем фиг. 5 будет создание пружины с сохранением линейности $\delta = \delta(P)$ на весь процесс сжатия, что было разобрано в указанной в начале работе при решении случая $b = 1$.

6) Дальнейшие возможности в получении произвольного закона $\delta = \delta(P)$ дают комбинации специальных пружин в виде двух или нескольких последовательных (фиг. 10) или параллельных (фиг. 11) пружин. Во всех случаях из заданных суммарных графиков $\delta = \delta(P)$ можно выделить задание на каждую специальную пружину в том виде, в каком оно дано на фиг. 5.

Итак, решим следующую задачу: найти геометрические элементы пружины, процесс деформации которой при сжатии удовлетворял бы определенному наперед заданному закону $\delta = \delta(P)$ (фиг. 5).



Фиг. 10.



Фиг. 11.

Принимаем, что посадка витков пружины начинается с крайней точки наибольшего радиуса $r=r_2$, что соответствует более простым формам спирали. Посадка витков происходит с увеличением нагрузки P постепенно в непрерывной последовательности от крайней точки $r=r_2$ до $r=r_1$, когда наступает полное сжатие пружины в одну плоскость.

Из (1), (2) и (3) при посадке на опорную плоскость произвольной точки пружины (r, θ, h) имеем:

$$\frac{Pr^2}{C} = \frac{1}{r} \frac{dh}{d\theta},$$

откуда

$$P = \frac{C}{r^3} \frac{dh}{d\theta}. \quad (17)$$

Следовательно, каждому значению P на кривой 1—2 (фиг. 5) соответствует определенная точка (r, θ, h) спирали, лежащая при этом значении P на опорную плоскость. Далее, согласно (5)

$$\delta = \frac{P}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta + H - h, \quad (18)$$

где $\delta = \delta(P)$ — заданная функция, а P имеет выражение (17) и играет здесь роль переменного параметра. Таким образом (18) и (17) являются уравнением, связывающим все геометрические элементы пружины. Оно имеет бесчисленное количество решений, если не наложить какое-то дополнительное условие. Например, задавшись из конструктивных или производственных соображений тем или иным видом пружины в плане $r = r(\theta)$, можно из (18) и (17) найти форму тела вращения $h = h(r)$, по которому надо выполнить пружину, или, наоборот, задавшись функцией $h = h(r)$, найти вид в плане $r = r(\theta)$.

Рассмотрим три общих случая.

1°. Задан закон $\delta = \delta(P)$ (фиг. 5) с параметрами P_1, P_2, δ_1 и δ_2 (граница использования пружины — точка 4 — может быть поставлена на заданной кривой 1—2 произвольно по условиям ее работы), задан также вид пружины в плане $r = r(\theta)$, требуется найти уравнение спирали по высоте $h = h(r)$.

Согласно (8) имеем уравнение:

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{1}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta. \quad (19)$$

Заметим, что при заданном законе $\delta = \delta(P)$ будет известной и $\frac{d\delta}{dP} = f(P)$. Поэтому, обозначив

$$\int_0^{\theta} r^3 d\theta = x, \quad (20)$$

из (19) можно выразить P как

$$P = \varphi(x), \quad (21)$$

или согласно (17)

$$\frac{C}{r^3} \frac{dh}{d\theta} = \varphi(x),$$

откуда

$$dh = \frac{r^3}{C} \varphi(x) d\theta. \quad (22)$$

Но, так как по (20)

$$\frac{dx}{d\theta} = r^3,$$

то

$$dh = \frac{1}{C} \varphi(x) dx.$$

Замечая, что при $h=0$ будет $\theta=0$ и $x=0$, получаем:

$$h = \frac{1}{C} \int_0^x \varphi(x) dx, \tag{23}$$

где

$$x = \int_0^{\theta} r^3 d\theta,$$

а $\varphi(x)$ определяется из (19) в соответствии с (21). Это и есть искомое уравнение спирали.

Полная высота пружины будет:

$$H = \frac{1}{C} \int_0^l \varphi(x) dx, \tag{24}$$

так как при изменении θ в интервале $0 \leq \theta \leq 2\pi n$ величина x (20) меняется в пределах $0 \leq x \leq l$, где

$$l = \int_0^{2\pi n} r^3 d\theta. \tag{25}$$

При этом должны удовлетворяться четыре граничные условия, соответствующие заданным P_1, P_2, δ_1 и δ_2 .

Из (21) при $\theta=2\pi n, r=r_2$ и $h=H$ имеем:

$$\varphi(l) = P_1, \tag{26}$$

где l определяется по формуле (25). Из того же уравнения при $\theta=0, r=r_1$ и $h=0$ получим:

$$\varphi(0) = P_2. \tag{27}$$

Из (18) и (25) при $\theta=2\pi n, r=r_2$ и $h=H$

$$\frac{P_1 l}{C} = \delta_1, \tag{28}$$

где l определяется по формуле (25).

Из (18) при $\theta=0, r=r_1$ и $h=0$

$$H = \delta_2, \tag{29}$$

где H определяется формулой (24).

Углы наклона витков спирали согласно (22) определяются по формуле:

$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{dh}{d\theta} = \frac{r^2}{C} \varphi(x). \tag{30}$$

В крайних точках $r=r_1$ и $r=r_2$ будет:

$$\alpha_1 = \frac{P_2 r_1^2}{C} \quad \text{и} \quad \alpha_2 = \frac{P_1 r_2^2}{C}. \tag{31}$$

2°. Как и раньше, задан закон $\delta = \delta(P)$, а кроме того, функция $h = h(r)$. Требуется найти вид пружины в плане $r = r(\theta)$.

Выразим из (18) величину:

$$\frac{1}{C} \int_0^{\theta} r^3 d\theta = \frac{\delta - (H-h)}{P}.$$

Тогда согласно (19) имеем:

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta - (H-h)}{P},$$

или

$$\delta - P \frac{d\delta}{dP} = H - h. \quad (32)$$

Здесь левая часть представляет некоторую известную функцию от P . Поэтому из (32) мы всегда можем выразить величину P , как

$$P = \psi(H-h), \quad (33)$$

или в соответствии с (17)

$$\frac{C}{r^3} \frac{dh}{d\theta} = \psi(H-h), \quad (34)$$

откуда, используя условие $\theta=0$ при $h=0$, получаем уравнение спирали:

$$\theta = C \int_0^h \frac{dh}{r^3 \psi(H-h)}, \quad (35)$$

где $r=r(h)$ — заданная функция, а $\psi(H-h)$ определяется из (32) согласно (33). В некоторых случаях уравнение (35) удобнее представлять в виде:

$$\theta = C \int_{r_1}^r \frac{\frac{dh}{dr} dr}{r^3 \psi(H-h)}, \quad (36)$$

где $\psi(H-h)$ имеет то же значение, а h и $\frac{dh}{dr}$ являются заданными функциями от r .

Граничные условия будут следующие: при $\theta=2\pi n$, $r=r_2$ и $h=H$ из (35) и (33)

$$C \int_0^H \frac{dh}{r^3 \psi(H-h)} = 2\pi n, \quad (37)$$

$$\psi(0) = P_1, \quad (38)$$

а из (18), заменяя согласно (34)

$$r^3 d\theta = \frac{C dh}{\psi(H-h)},$$

имеем:

$$P_1 \int_0^H \frac{dh}{\psi(H-h)} = \delta_1. \quad (39)$$

При $\theta=0$, $r=r_1$ и $h=0$ из (33) и (18)

$$\psi(H) = P_2, \quad (40)$$

$$H = \delta_2. \quad (41)$$

Угол наклона витков согласно (34) будет:

$$\alpha = \frac{1}{r} \frac{dh}{d\theta} = \frac{r^2}{C} \psi(H-h), \quad (42)$$

причем α_1 и α_2 определяются по формуле (31).

3°. Задан закон $\delta = \delta(P)$, как в первом случае, а также функция $h = h(\theta)$. Требуется найти вид пружины в плане $r = r(\theta)$.

Определим функцию $\psi(H-h)$ совершенно так же, как во втором случае, — из уравнения (32) в соответствии с (33).

Тогда из (34)

$$r^3 = \frac{C}{\psi(H-h)} \frac{dh}{d\theta},$$

что дает искомое уравнение спирали:

$$r = \sqrt[3]{\frac{C}{\psi(H-h)} \frac{dh}{d\theta}}, \quad (43)$$

где h и $\frac{dh}{d\theta}$ суть известные функции от θ . Крайние значения радиусов будут:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{C}{\psi(H)} \left(\frac{dh}{d\theta}\right)_{\theta=0}} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt[3]{\frac{C}{\psi(0)} \left(\frac{dh}{d\theta}\right)_{\theta=2\pi n}}. \quad (44)$$

При этом должны быть удовлетворены граничные условия (38)—(41). Угол наклона витков спирали определяется с помощью формулы (42).

Примеры. Решим три примера соответственно трем рассмотренным выше общим случаям.

1. Найдем пружину, удовлетворяющую синусоидальному закону $\delta = \delta(P)$ без прямолинейного участка в начале, т. е. $P_1 = 0$ и $\delta_1 = 0$ (фиг. 8).

Уравнение $\delta = \delta(P)$ в этом случае, очевидно, запишется в виде:

$$\delta = \delta_2 \sin\left(\frac{P}{P_2} \frac{\pi}{2}\right), \quad (45)$$

что удовлетворяет граничным условиям $\delta = 0$ при $P = 0$ и $\delta = \delta_2$ при $P = P_2$, а также условиям (7) и (11). При этом используемый участок сжатия пружины при ее работе может быть выбран до произвольной точки A (фиг. 8). Производная от (45) будет:

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\pi}{2} \frac{\delta_2}{P_2} \cos\left(\frac{P}{P_2} \frac{\pi}{2}\right). \quad (46)$$

Пользуясь свойством (9), из (46) можно найти между прочим осадку рабочей части пружины AC (фиг. 3) при любом значении нагрузки. Она равна:

$$\delta_{AC} = P \frac{d\delta}{dP} = \frac{\pi}{2} \frac{\delta_2}{P_2} P \cos\left(\frac{P}{P_2} \frac{\pi}{2}\right).$$

Решим поставленную задачу по первому из рассмотренных выше трех вариантов. Пусть пружина имеет в плане вид архимедовой спирали:

$$r = \frac{r_2 - r_1}{2\pi n} \theta + r_1. \quad (47)$$

Из (46) в соответствии с (19), (20) и (21) имеем:

$$\frac{\pi}{2} \frac{\delta_2}{P_2} \cos \left(\frac{P}{P_2} \frac{\pi}{2} \right) = \frac{1}{C} x;$$

откуда

$$P = \varphi(x) = \frac{2P_2}{\pi} \arccos \frac{2P_2 x}{\pi \delta_2 C}, \quad (48)$$

где

$$x = \int_0^{\theta} r^3 d\theta = \int_{r_1}^r r^3 \frac{d\theta}{dr} dr;$$

но так как из (47)

$$\frac{d\theta}{dr} = \frac{2\pi n}{r_2 - r_1},$$

то

$$x = \frac{\pi n (r^4 - r_1^4)}{2(r_2 - r_1)}. \quad (49)$$

Параметр l , как значение x при $r = r_2$, согласно (25) будет:

$$l = \frac{1}{2} \pi n (r_2^2 + r_1^2) (r_2 + r_1). \quad (50)$$

Из (23) и (48) имеем:

$$h = \frac{2P_2}{\pi C} \int_0^x \arccos \frac{2P_2 x}{\pi \delta_2 C} dx = \delta_2 \left[\frac{2P_2 x}{\pi \delta_2 C} \arccos \frac{2P_2 x}{\pi \delta_2 C} - \sqrt{1 - \left(\frac{2P_2 x}{\pi \delta_2 C} \right)^2} + 1 \right]. \quad (51)$$

Обозначим:

$$\frac{2P_2 x}{\pi \delta_2 C} = y. \quad (52)$$

Подставляя сюда x (49) и δ_2 (29), имеем:

$$y = \frac{P_2 n (r^4 - r_1^4)}{CH (r_2 - r_1)}. \quad (53)$$

Обозначая через q значение y при $x = l$ согласно (50) получим:

$$q = \frac{P_2 n}{CH} (r_2^2 + r_1^2) (r_2 + r_1). \quad (54)$$

Но, используя условие (26) и значение $P_1 = 0$, из (48), (52) и (54) находим:

$$\frac{2P_2}{\pi} \arccos q = 0,$$

что дает $q = 1$. Поэтому из (53) и (54)

$$y = \frac{r^4 - r_1^4}{r_2^4 - r_1^4}. \quad (55)$$

При изменении вдоль спирали $r_1 \leq r \leq r_2$ значение y меняется в интервале $0 \leq y \leq 1$.

Теперь уравнение (51) согласно (52) и (29) примет вид:

$$h = H(y \arccos y + 1 - \sqrt{1 - y^2}), \quad (56)$$

где y имеет значение (55). Это и есть искомое уравнение спирали $h = h(r)$, которое вместе с (47) определяет форму пружины, дающей при сжатии осадку по синусоидальному закону (45).

Из шести условий (24)—(29) нами были использованы три (25), (26) и (29). Не трудно видеть, что удовлетворяются и остальные три, превращаясь в тождества:

Углы наклона витков спирали по (30), (48) и (52):

$$\alpha = \frac{2P_2 r^2}{\pi C} \arccos y, \tag{57}$$

где y имеет значение (55). При этом

$$\alpha_2 = 0.$$

2. Требуется спроектировать пружину, при сжатии которой величина осадки подчинялась бы гиперболическому закону:

$$\delta = \delta_1 \left(2 - \frac{P_1}{P} \right), \tag{58}$$

представленному графически на фиг. 12. Здесь

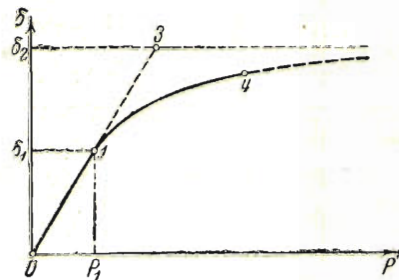
$$\delta_2 = 2\delta_1 \tag{59}$$

и нагрузка полного сжатия пружины $P_2 = \infty$. Естественно, что такую пружину до полного сжатия довести нельзя. Можно использовать часть кривой до произвольной точки 4 (фиг. 12). Производная от (58) будет:

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{\delta_1 P_1}{P^2}. \tag{60}$$

Легко видеть, что условия (7), (10) и (11) здесь выполняются. Осадка рабочей части пружины по (9) и (60) будет:

$$\delta_{Ac} = \frac{\delta_1 P_1}{P}.$$



Фиг. 12.

Пусть соответственно второму из разобранных общих случаев задано, что пружина должна быть коническая, т. е.

$$h = H \frac{r - r_1}{r_2 - r_1}. \tag{61}$$

Согласно (32), (58) и (60)

$$\delta_1 \left(2 - \frac{P_1}{P} \right) - \frac{\delta_1 P_1}{P} = H - h.$$

Используя (59), имеем:

$$\delta_2 \left(1 - \frac{P_1}{P} \right) = H - h.$$

Отсюда в соответствии с (33)

$$P = \psi (H - h) = \frac{\delta_2 P_1}{\delta_2 - (H - h)}.$$

Здесь уместно применить условие (41), что дает:

$$\psi(H-h) = \frac{HP_1}{h}. \quad (62)$$

Далее, по формулам (36) и (61) находим:

$$\theta = C \int_{r_1}^r \frac{\frac{H}{r_2-r_1} dr}{r^3 \frac{HP_1(r_2-r_1)}{r-r_1}} = \frac{C}{2(1-a)^2 P_1 r_1 r_2^2} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)^2,$$

где

$$a = \frac{r_1}{r_2}. \quad (63)$$

Но из условия (37)

$$P_1 = \frac{C}{4\pi n r_1 r_2^2}. \quad (64)$$

Поэтому окончательно уравнение спирали примет вид:

$$\theta = \frac{2\pi n}{(1-a)^2} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)^2, \quad (65)$$

или

$$r = \frac{r_1}{1 - (1-a) \sqrt{\frac{\theta}{2\pi n}}}. \quad (66)$$

Здесь были использованы условия (37) и (41), а остальные (38)–(40), как легко проверить, удовлетворяются тождественно, что служит подтверждением правильности полученного решения.

Угол наклона витков спирали по (42) и (62) будет:

$$\alpha = \frac{r^2}{C} \frac{HP_1}{h},$$

что после подстановки (64) и (61) дает:

$$\alpha = \frac{1-a}{4\pi n r_2 \frac{r_1}{r} \left(1 - \frac{r_1}{r}\right)}.$$

Таким образом пружина, дающая осадку по гиперболическому закону (58), определена.

3. Спроектировать пружину, удовлетворяющую квадратичному закону $\delta = \delta(P)$ с прямолинейным участком вначале (фиг. 5).

Если задать квадратичный закон осадки в виде:

$$\delta = aP^2 + bP + c,$$

то коэффициенты a , b и c должны удовлетворять условиям:

$$\delta_1 = aP_1^2 + bP_1 + c, \quad \delta_2 = aP_2^2 + bP_2 + c,$$

а кроме того, по (10) и (11)

$$\left(\frac{d\delta}{dP}\right)_1 = 2aP_1 + b = \frac{\delta_1}{P_1}, \quad \left(\frac{d\delta}{dP}\right)_2 = 2aP_2 + b = 0.$$

Все это приводит к следующей зависимости:

$$\delta = \frac{\delta_2}{P_2^2 - P_1^2} (2P_2 P - P^2 - P_1^2), \quad (67)$$

причем

$$\delta_1 = \frac{2P_1 \delta_2}{P_2 + P_1}. \quad (68)$$

Дифференцирование (67) дает:

$$\frac{d\delta}{dP} = \frac{2\delta_2 (P_2 - P)}{P_2^2 - P_1^2}. \quad (69)$$

Легко видеть, что условие (7) выполняется.

Пусть задана зависимость:

$$h = \frac{H}{2\pi n}. \quad (70)$$

Тогда согласно третьему общему случаю из (32), (67) и (69) находим:

$$\delta_2 \frac{P^2 - P_1^2}{P_2^2 - P_1^2} = H - h,$$

откуда в соответствии с (33)

$$P = \psi(H - h) = \sqrt{\frac{P_2^2 - P_1^2}{\delta_2} (H - h) + P_1^2}. \quad (71)$$

По (43), (70) и (41)

$$r^3 = \frac{CH}{2\pi n \sqrt{P_2^2 - (P_2^2 - P_1^2) \frac{\theta}{2\pi n}}}. \quad (72)$$

Краевые значения r будут:

$$r_1 = \sqrt[3]{\frac{CH}{2\pi n P_2}} \quad \text{и} \quad r_2 = \sqrt[3]{\frac{CH}{2\pi n P_1}}. \quad (73)$$

На основании этого, пользуясь обозначением (63), имеем:

$$\frac{CH}{2\pi n} = r_1^3 P_2, \quad \frac{P_1}{P_2} = a^3, \quad (74)$$

подстановка которых в (72) дает искомое уравнение спирали:

$$r = \frac{r_1}{\sqrt[3]{1 - (1 - a^3) \frac{\theta}{2\pi n}}}, \quad (75)$$

или

$$\theta = \frac{2\pi n}{1 - a^3} \left[1 - \left(\frac{r_1}{r} \right)^3 \right], \quad (76)$$

где $a = r_1/r_2$.

Таким образом задача получения квадратичного закона осадки (37) решена. Легко видеть, что не использованные при решении условия (38) — (40) тождественно удовлетворяются.

Поступила в редакцию 12 X 1939.

THEORY OF SPECIAL TYPES OF SPIRAL SPRINGS**E. P. POPOV**

(Summary)

On the basis of the preceding work, the author finds the geometric elements of spiral springs satisfying a given non-linear relationship between spring relaxation and load. The springs are assumed to be shaped spirally on the surface of an arbitrary solid of revolution.

The solution of this problem may have practical applications. Such springs may be employed as parts of devices in which it is necessary to have a non-linear relationship between the load and the displacements due to the action of the load.
