

К ПЛОСКОЙ ЗАДАЧЕ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ ДЛЯ БЕСКОНЕЧНОЙ ПОЛОСЫ

Б. А. БЕРГ

(Саратов)

В настоящей работе рассматривается плоская задача теории упругости для бесконечной полосы в предположении отсутствия массовых сил и при заданных на границах полосы перемещениях (задача I) или напряжениях (задача II).

Аналогичная пространственная задача для бесконечного слоя между двумя параллельными плоскостями решена Тедоне^[15], Даугал^[3] и рассматривалась также Лявом^[7].

Двухмерная задача для бесконечной полосы, насколько нам известно, в общем виде не рассматривалась, хотя некоторые частные случаи этой задачи решены различными авторами, главным образом при помощи функции напряжений, подбираемой специально для различных граничных условий. Ссылки на некоторые из этих решений и нахождение их из приводимых в этой работе общих формул помещены в ее тексте.

Метод, которому мы следуем, не отличается по существу от метода, развитого Тедоне для пространственной задачи, и полученные нами формулы (3.1.6) и (5.3.3), дающие решение задач I и II, являются двухмерными аналогами соответствующих формул Тедоне.

1. Основные уравнения

1.1. Полная система уравнений статики упругого тела в случае плоской задачи¹ и при отсутствии объемных сил состоит, как известно, из следующих уравнений:

$$\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \quad (1.1.1)$$

$$X_x = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu \frac{\partial v}{\partial y}, \quad X_y = \mu \left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y} \right), \quad (1.1.2)$$

где $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ и λ, μ — коэффициенты Ламе.

¹ Эти уравнения относятся как к случаю плоской деформации, так и к случаю плоского напряженного состояния, если в этом последнем случае под X_x, Y_y, X_y, u, v понимать средние (по толщине пластинки) значения компонентов напряжения и смещения и заменить λ на $2\lambda\mu / (\lambda + 2\mu)$. См., например, Мусхелишвили^[10].

К этим уравнениям присоединяются еще граничные условия, которые можно написать в следующем виде:

$$\begin{aligned} X_n &= \lambda \theta \cos(n, x) + 2\mu \left[\frac{du}{dn} - \omega \cos(n, y) \right], \\ Y_n &= \lambda \theta \cos(n, y) + 2\mu \left[\frac{dv}{dn} + \omega \cos(n, x) \right]. \end{aligned} \quad (1.1.3)$$

Здесь X_n , Y_n обозначают компоненты напряжения, действующего на площадку с нормалью n , и вращение

$$\omega = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right).$$

Формулы (1.1.3) получаются из известных равенств

$$X_n = X_x \cos(n, x) + X_y \cos(n, y), \quad Y_n = Y_x \cos(n, x) + Y_y \cos(n, y)$$

подстановкой в них выражений (1.1.2).

Если значения напряжений из (1.1.2) подставить в (1.1.1), то получится система уравнений, содержащая лишь смещения:

$$\Delta u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \Delta v + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (1.1.4)$$

где $\Delta = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$ обозначает оператор Лапласа.

Принимая во внимание, что плоскостное расширение является (при отсутствии объемных сил) функцией гармонической и что для любой гармонической функции $Q(x, y)$

$$\frac{\partial Q}{\partial x} = \frac{1}{2} \Delta(x, Q), \quad \frac{\partial Q}{\partial y} = \frac{1}{2} \Delta(y, Q),$$

в чем можно убедиться непосредственной проверкой, систему уравнений (1.1.4) можно написать в следующем виде:

$$\Delta \left(u + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta \right) = 0, \quad \Delta \left(v + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \theta \right) = 0. \quad (1.1.5)$$

Из этих уравнений видно, что функции

$$u + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x \theta, \quad v + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \theta$$

являются гармоническими.

2. Функция Грина

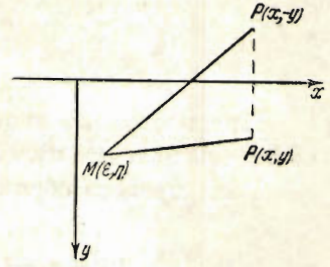
2.1. Известно¹, что для полуплоскости $y > 0$ функция Грина, относящаяся к точке $P(x, y)$ (полюсу),

$$g(x, y; \xi, \eta) = \frac{1}{2} \ln \frac{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, \quad \text{или } g = \ln r - \ln r_1,$$

где r обозначает расстояние от переменной точки $M(\xi, \eta)$ до полюса $P(x, y)$ и r_1 — расстояние от той же точки $M(\xi, \eta)$ до отражения $P_1(x, -y)$ полюса P от границы полуплоскости, как от зеркала (фиг. 1).

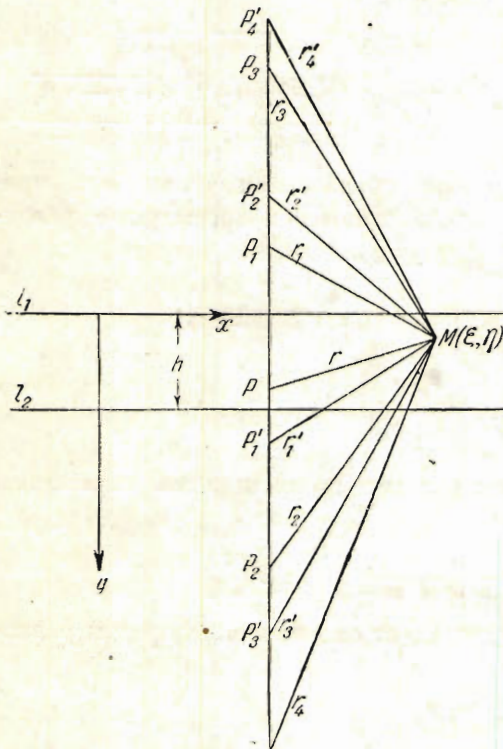
¹ См., например, Гурса^[4].

Эта функция g внутри области $y > 0$ равна сумме гармонической функции и $-\ln r$, т. е. является гармонической функцией в окрестности всякой точки M области, за исключением полюса P , где она обращается в логарифмическую бесконечность. Если точка M находится на границе области, то эта функция равна нулю; при неограниченном возрастании r функция g стремится к нулю.



Фиг. 1.

2.2. Для построения функции с такими же свойствами в области, ограниченной двумя параллельными прямыми l_1 и l_2 , т. е. в области бесконечной полосы, построим предварительно отражения точки (полюса) $P(x, y)$ от параллельных зеркал, расположенных вдоль прямых l_1, l_2 . Это будут показанные на фиг. 2 точки:



Фиг. 2.

- $P_1(x, -y),$
- $P_2(x, 2h + y),$
- $P_3(x, -2h - y),$
- $P_4(x, 4h + y),$
-
- $P_{2n-1}(x, -2(n-1)h - y),$
- $P_{2n}(x, 2nh + y),$
- $P_{2n+1}(x, -2nh - y),$
- $P'_1(x, 2h - y),$
- $P'_2(x, -2h + y),$
- $P'_3(x, 4h - y),$
- $P'_4(x, -4h + y),$
-
- $P'_{2n-1}(x, 2nh - y),$
- $P'_{2n}(x, -2nh + y),$
- $P'_{2n+1}(x, 2(n+1)h - y).$

Заметим, что если точка M находится на прямой l_1 , то

$$r = r_1, r_2 = r_3, \dots, r_{2n} = r_{2n+1};$$

$$r'_1 = r'_2, r'_3 = r'_4, \dots, r'_{2n-1} = r'_{2n}; \quad (a)$$

$$r = r'_1, r'_2 = r'_3, \dots, r'_{2n} = r'_{2n+1}. \quad (б)$$

если же точка M на прямой l_2 , то

$$r_1 = r_2, r_3 = r_4, \dots, r_{2n-1} = r_{2n};$$

2.3. Построим бесконечную последовательность функций σ_n , определенных рекуррентным соотношением:

$$\sigma_n = \sigma_{n-1} - (\ln r_{2n} - \ln r'_{2n-1}) - (\ln r'_{2n} - \ln r_{2n+1}) \quad (n = 1, 2, \dots),$$

причем

$$\sigma_0 = \ln r_1 - \ln r = g$$

есть функция Грина для полуплоскости.

В силу (а) и (б) функция σ_n на прямой l_1 равна нулю, а на прямой l_2 она равна $\ln r_{2(n+1)} - \ln r'_{2n+1}$. С увеличением n функция σ_n отличается от нуля сколь угодно мало, так как, очевидно,

$$\lim_{n \rightarrow \infty} (\ln r_{2(n+1)} - \ln r'_{2n+1}) = 0.$$

При неограниченном возрастании r каждая из функций последовательности стремится к нулю.

Если процесс образования функций сходящийся, то выражение

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \sigma_n = \ln r_1 - \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{r'_{2n-1}}{r_{2n}} + \ln \frac{r_{2n+1}}{r'_{2n}} \right) \quad (c)$$

представит для бесконечной полосы функцию, обладающую вышеупомянутыми свойствами функции Грина (см. 2.1). Здесь

$$\begin{aligned} r &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}, & r_1 &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (y + \eta)^2}, \\ r'_{2n-1} &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (2nh - y - \eta)^2}, & r_{2n} &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (2nh + y - \eta)^2}, \\ r_{2n+1} &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (2nh + y + \eta)^2}, & r'_{2n} &= \sqrt{(x - \xi)^2 + (-2nh + y - \eta)^2}. \end{aligned}$$

2.4. Доказательство сходимости процесса образования функций σ_n приводится к доказательству сходимости ряда, входящего в предыдущее равенство (с). Заметив, что

$$\ln \frac{r'_{2n-1}}{r_{2n}} = - \frac{y}{nh \left[1 + \left(\frac{x - \xi}{2nh} \right)^2 \right]} + O \left(\frac{1}{4n^2 h^2 + (x - \xi)^2} \right), \quad (d)$$

$$\ln \frac{r_{2n+1}}{r'_{2n}} = \frac{y}{nh \left[1 + \left(\frac{x - \xi}{2nh} \right)^2 \right]} + O \left(\frac{1}{4n^2 h^2 + (x - \xi)^2} \right), \quad (e)$$

где $O(\quad)$ означает члены, порядок коих равен и выше порядка выражения, стоящего в скобках, получим:

$$\ln \frac{r'_{2n-1}}{r_{2n}} + \ln \frac{r_{2n+1}}{r'_{2n}} = O \left(\frac{1}{4n^2 h^2 + (x - \xi)^2} \right) = O \left(\frac{1}{n^2} \right)$$

независимо от величины $x - \xi$, откуда и следует сходимость, и притом равномерная, ряда¹:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{r'_{2n-1}}{r_{2n}} + \ln \frac{r_{2n+1}}{r'_{2n}} \right).$$

Итак, для бесконечной полосы функция Грина может быть взята в следующем виде:

$$G = \ln r_1 - \ln r + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\ln \frac{r'_{2n-1}}{r_{2n}} + \ln \frac{r_{2n+1}}{r'_{2n}} \right). \quad (2.4.1)$$

¹ Из тех же равенств (d) и (e) следует расходимость рядов.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{r'_{2n-1}}{r_{2n}} \quad \text{и} \quad \sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{r_{2n+1}}{r'_{2n}}.$$

2.5. Нормальные производные функции Грина на границах l_1 и l_2 полосы:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_{\eta=0} &= 2 \left[\frac{y}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{2nh+y}{r_{2n}^2} - \frac{2nh-y}{r_{2n-1}^2} \right) \right], \\ \left(-\frac{\partial G}{\partial \eta}\right)_{\eta=h} &= 2 \left[\frac{h-y}{r^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{(2n+1)h-y}{r_{2n}^2} - \frac{(2n-1)h+y}{r_{2n-1}^2} \right) \right]. \end{aligned} \quad (2.5.1)$$

Заметим, что при $\eta=0$

$$\frac{y}{r^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r}, \quad \frac{2nh+y}{r_{2n}^2} = -\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{2n}}, \quad \frac{2nh-y}{r_{2n}^2} = \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{2n-1}}$$

и при $\eta=h$

$$\begin{aligned} \frac{h-y}{r^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r}, & \frac{(2n+1)h-y}{r_{2n}^2} &= \frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{2n}}, \\ \frac{(2n-1)h+y}{r_{2n-1}^2} &= -\frac{\partial}{\partial y} \ln \frac{1}{r_{2n-1}}. \end{aligned} \quad (2.5.2)$$

Подобно ряду, входящему в выражение G , ряды, входящие в $\partial G/\partial \eta$, $\partial G/\partial \xi$, $\partial G/\partial y$, $\partial G/\partial x$, при соответствующей группировке членов также равномерно сходятся в полосе. Например,

$$\begin{aligned} \frac{\partial G}{\partial \eta} &= \frac{y+\eta}{r_1^2} + \frac{y-\eta}{r^2} + \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{-(2nh-y-\eta)}{r_{2n-1}^2} - \frac{-(2nh+y-\eta)}{r_{2n}^2} + \frac{2nh+y+\eta}{r_{2n+1}^2} - \frac{2nh-y+\eta}{r_{2n}^2} \right). \end{aligned}$$

Деля числитель и знаменатель каждой дроби на $(2nh)^2 + (x-\xi)^2$ и разлагая затем полученные выражения в ряды, можно удостовериться, что при указанной группировке каждая группа членов есть

$$O\left(\frac{1}{(2nh)^2 + (x-\xi)^2}\right),$$

т. е. $O\left(\frac{1}{n^2}\right)$ равномерно, каково бы ни было $x-\xi$.

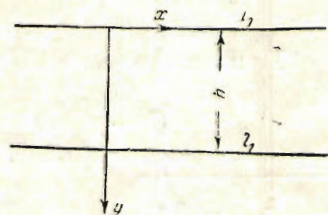
3. Первая основная задача

3.1. На границах l_1 и l_2 бесконечной полосы (фиг. 3) заданы смещения u_0 и v_0 . Для отличия от точек, лежащих внутри полосы, координаты точек на границах l_1 и l_2 будут обозначаться буквами ξ и η ; причем $\eta=0$ на l_1 и $\eta=h$ на l_2 .

Предполагая, что функции

$$u \rightarrow [(\lambda + \mu)/(2\mu)] x\theta, \quad v \rightarrow [(\lambda + \mu)/(2\mu)] y\theta$$

и θ и их производные по y удовлетворяют всем условиям, необходимым для представимости гармонической функции формулой Грина в нашей области, т. е. в бесконечной полосе, и применяя теорему Грина, получим:



Фиг. 3.

$$u + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} u_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{1}{2\pi} \int_{l_2} u_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \int_{l_1} \xi\theta \frac{dG}{dn} dl + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \int_{l_2} \xi\theta \frac{dG}{dn} dl,$$

$$v + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} v_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{1}{2\pi} \int_{l_2} v_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} h \int_{l_2} \theta \frac{dG}{dn} dl.$$

По той же теореме Грина гармоническая функция

$$\theta = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} \theta \frac{dG}{dn} dl + \frac{1}{2\pi} \int_{l_2} \theta \frac{dG}{dn} dl.$$

Подставляя это выражение вместо θ в левые части двух предыдущих равенств, находим:

$$u = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} u_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{1}{2\pi} \int_{l_2} u_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \int_{l_1} (\xi - x) \theta \frac{dG}{dn} dl + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \int_{l_2} (\xi - x) \theta \frac{dG}{dn} dl, \quad (3.1)$$

$$v = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} v_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{1}{2\pi} \int_{l_2} v_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} (h - y) \int_{l_2} \theta \frac{dG}{dn} dl - \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} y \int_{l_1} \theta \frac{dG}{dn} dl.$$

При подстановке в первое из этих равенств dG/dn (см. 2.5) надо заметить, что

$$x - \xi = r^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln r = r_{2n}^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln r_{2n} = r_{2n-1}^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln r_{2n-1} = r_{2n}'^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln r_{2n}' = r_{2n-1}'^2 \frac{\partial}{\partial x} \ln r_{2n-1}'.$$

Тогда, предполагая, что θ удовлетворяет условиям, необходимым для возможности почленного интегрирования ряда $\int \theta \frac{dG}{dn} dl$, получим:

$$u = U + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \left\{ y \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_1} \theta \ln \frac{1}{r} dl + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2nh + y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_1} \theta \ln \frac{1}{r_{2n}} dl - \right. \right.$$

$$\left. - (2nh - y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_1} \theta \ln \frac{1}{r_{2n-1}} dl \right] + (h - y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_2} \theta \ln \frac{1}{r} dl +$$

$$\left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2n + 1)h - y \right) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_2} \theta \ln \frac{1}{r_{2n}'} dl - ((2n - 1)h + y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_2} \theta \ln \frac{1}{r_{2n-1}'} dl \right] \right\}; \quad (3.12)$$

при этом U обозначает гармоническую функцию¹, принимающую на l_1 и l_2 данные значения u_0 :

$$U = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} u_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{1}{2\pi} \int_{l_2} u_0 \frac{dG}{dn} dl. \quad (3.13)$$

При подстановке dG/dn во второе равенство (3.1.1) надо заметить, что

$$(h - y) \int_{l_2} \theta \frac{dG}{dn} dl - y \int_{l_1} \theta \frac{dG}{dn} dl = -y2\pi\theta + h \int_{l_2} \theta \frac{dG}{dn} dl,$$

¹ Вопрос о единственности определяемой таким образом функции U или V , т. е. вопрос о единственности решения задачи Дирихле для рассматриваемой бесконечной полосы, решается положительно в случае ограниченного решения, каковое мы и имеем в виду, при помощи рассуждений, аналогичных примененным Р. О. Кузьминым при доказательстве предположения Осгуда о единственности ограниченного решения задачи Дирихле внутри бесконечного цилиндра. См. Осгуд^[12] и Кузьмин^[6].

и принять во внимание вторую и третью строки равенств (2.5.2).

Тогда

$$v = V - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \theta + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} h \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{l_1} \theta \ln \frac{1}{r} dl + \right. \\ \left. + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{l_2} \theta \ln \frac{1}{r'_{2n}} dl + \frac{\partial}{\partial y} \int_{l_2} \theta \ln \frac{1}{r_{2n-1}} dl \right] \right\}; \quad (3.1.4)$$

при этом V обозначает гармоническую функцию (см. сноску на стр. 42), принимающую на l_1 и l_2 данные значения v_0 :

$$V = \frac{1}{2\pi} \int_{l_1} v_0 \frac{dG}{dn} dl + \frac{1}{2\pi} \int_{l_2} v_0 \frac{dG}{dn} dl. \quad (3.1.5)$$

Если ввести обозначения:

$$\varphi_0 = \int_{l_1} \theta \ln \frac{1}{r} dl, \quad \varphi_n = \int_{l_1} \theta \ln \frac{1}{r_{2n}} dl, \quad \varphi_{-n} = \int_{l_1} \theta \ln \frac{1}{r'_{2n-1}} dl, \\ \varphi'_0 = \int_{l_2} \theta \ln \frac{1}{r} dl, \quad \varphi'_n = \int_{l_2} \theta \ln \frac{1}{r'_{2n}} dl, \quad \varphi'_{-n} = \int_{l_2} \theta \ln \frac{1}{r_{2n-1}} dl,$$

то формулы (3.1.2) и (3.1.4) примут следующий вид:

$$u = U + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \left\{ y \frac{\partial \varphi_0}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2nh + y) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} - (2nh - y) \frac{\partial \varphi_{-n}}{\partial x} \right] + \right. \\ \left. + (h - y) \frac{\partial \varphi'_0}{\partial x} + \sum_{n=1}^{\infty} \left[((2n + 1)h - y) \frac{\partial \varphi'_n}{\partial x} - ((2n - 1)h + y) \frac{\partial \varphi'_{-n}}{\partial x} \right] \right\}, \quad (3.1.2')$$

$$v = V - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \theta + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} h \left[\frac{\partial \varphi'_0}{\partial y} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\varphi'_n - \varphi'_{-n}) \right]. \quad (3.1.4')$$

Эти формулы можно написать короче:

$$u = U + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(2nh + y) \frac{\partial \varphi_n}{\partial x} + (2nh + h - y) \frac{\partial \varphi'_n}{\partial x} \right], \quad (3.1.6)$$

$$v = V - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \theta + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \varphi'_n}{\partial y};$$

при этом, однако, в общем случае надо группировать члены рядов в последних формулах, как показано в (3.1.2') и (3.1.4'), т. е., развертывая ряды, полагать:

$$n = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (f)$$

объединяя в один член ряда выражения, содержащие φ_n , φ'_n , φ_{-n} , φ'_{-n} .

Заметим здесь же, что и в дальнейшем изложении везде, где будет встречаться $\sum_{n=-\infty}^{+\infty}$, она понимается при условии (f). Формулы (3.1.6) предста-

вводят двухмерный аналог формул Тедоне для соответствующей пространственной задачи, когда рассматривается не бесконечная полоса, но бесконечный слой толщиной h между двумя параллельными плоскостями^[15, б].

Применяя теорему Грина к функции θ и принимая во внимание равенства (2.5.2), получим выражение плоскостного расширения через функции φ :

$$\theta = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\varphi'_n - \varphi_n). \quad (3.1.7)$$

Так как U и V определяются граничными значениями перемещений u_0 и v_0 (см. 3.1.3) и (3.1.5), то, как видно из (3.1.6), решение задачи определения u и v сводится к нахождению функций φ .

3.2. Функции φ должны удовлетворять следующим условиям¹:

1. Они должны быть гармоническими и регулярными в полосе.
2. На границах они и их первые производные должны быть конечны.
3. При $y=0$ должно быть:

$$\varphi_0 = \varphi'_{-1}, \quad \varphi_1 = \varphi_{-1}, \quad \varphi'_{-2} = \varphi'_{1'}, \dots, \quad \varphi_n = \varphi_{-n}, \quad \varphi'_{-n} = \varphi'_{n-1},$$

при $y=h$ должно быть:

$$\varphi_0 = \varphi_{-1}, \quad \varphi'_1 = \varphi'_{-1}, \quad \varphi_{-2} = \varphi_1, \dots, \quad \varphi'_n = \varphi'_{-n}, \quad \varphi_{-n} = \varphi_{n-1}.$$

Действительно, при $y=0$, т. е. когда полюс P находится на l_1 :

$$r = r_1, \quad r_2 = r'_1, \quad r_3 = r'_2, \dots, \quad r_n = r'_{n-1}$$

при $y=h$, т. е. когда полюс P находится на l_2 :

$$r = r'_1, \quad r'_2 = r_1, \quad r'_3 = r_2, \dots, \quad r'_n = r_{n-1}$$

откуда и следуют написанные выше соотношения между функциями φ .

4. Ряды, входящие в (3.1.6), должны быть сходящимися и дифференцируемыми² в полосе.

5. Функции φ должны быть таковы, чтобы $\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}$ тождественно.

Последнее условие для функций φ выражается следующим равенством, получаемым на основании (3.1.6) и (3.1.7) (промежуточные выкладки опускаем):

$$\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{\lambda + 3\mu}{2\pi\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\varphi'_n - \varphi_n) + \frac{\lambda + \mu}{\pi\mu} h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} n \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\varphi'_n + \varphi_n). \quad (3.2.1)$$

¹ Ср. Тедоне^[15, б].

² При условии, чтобы компоненты X_x , Y_y , X_y были однозначными и непрерывными функциями, имеющими непрерывные производные до второго порядка и удовлетворяющими (1.1.1) и условию совместности $\Delta(X_x + Y_y) = 0$; функции u и v , в силу (1.1.2), должны быть однозначны, непрерывны и иметь непрерывные производные до третьего порядка.

4. Случай периодических граничных условий

4.1. Применим решение основной задачи I к тому случаю, когда заданные на границах полосы перемещения представимы рядами Фурье:

$$\left. \begin{aligned} u_0 &= \sum (A_m \cos mx + B_m \sin mx) \\ v_0 &= \sum (A'_m \cos mx + B'_m \sin mx) \end{aligned} \right\} \text{ на } l_1,$$

$$\left. \begin{aligned} \bar{u}_0 &= \sum (\bar{A}_m \cos mx + \bar{B}_m \sin mx) \\ \bar{v}_0 &= \sum (\bar{A}'_m \cos mx + \bar{B}'_m \sin mx) \end{aligned} \right\} \text{ на } l_2,$$
(4.1.1)

где, $m = 1, 2, \dots$ и

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0 \cos mt \, dt, & B_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} u_0 \sin mt \, dt, \\ A'_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \cos mt \, dt, & B'_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} v_0 \sin mt \, dt, \\ \bar{A}_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}_0 \cos mt \, dt, & \bar{B}_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{u}_0 \sin mt \, dt, \\ \bar{A}'_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{v}_0 \cos mt \, dt, & \bar{B}'_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{v}_0 \sin mt \, dt. \end{aligned}$$
(4.1.2)

Эти значения перемещений являются граничными значениями гармонических функций U и V .

Эти последние возьмем в виде:

$$\begin{aligned} U &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(h-y)} (\bar{\alpha}_m \cos mx + \bar{\beta}_m \sin mx), \\ V &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} (\alpha'_m \cos mx + \beta'_m \sin mx) + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(h-y)} (\bar{\alpha}'_m \cos mx + \bar{\beta}'_m \sin mx). \end{aligned}$$
(4.1.3)

Коэффициенты $\alpha_m, \beta_m, \alpha'_m, \beta'_m, \bar{\alpha}_m, \beta_m, \bar{\alpha}'_m, \bar{\beta}'_m$ выражаются через коэффициенты Фурье (4.1.2) заданных на границах перемещений из условий:

$$U_{y=0} = u_0, \quad U_{y=h} = \bar{u}_0; \quad V_{y=0} = v_0, \quad V_{y=h} = \bar{v}_0.$$

Откуда

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\bar{A}_m - A_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, & \alpha'_m &= \frac{\bar{A}'_m - A'_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, \\ \beta_m &= \frac{\bar{B}_m - B_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, & \beta'_m &= \frac{\bar{B}'_m - B'_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, \\ \bar{\alpha}_m &= \frac{A_m - \bar{A}_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, & \bar{\alpha}'_m &= \frac{A'_m - \bar{A}'_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, \\ \bar{\beta}_m &= \frac{B_m - \bar{B}_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, & \bar{\beta}'_m &= \frac{B'_m - \bar{B}'_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}. \end{aligned}$$
(4.1.4)

4.2. Заметив, что $\frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y}$ является функцией гармонической, положим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial U}{\partial x} + \frac{\partial V}{\partial y} &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} (\mathfrak{A}_m \cos mx + \mathfrak{B}_m \sin mx) + \\ &+ \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(h-y)} (\bar{\mathfrak{A}}_m \cos mx + \bar{\mathfrak{B}}_m \sin mx). \end{aligned} \quad (4.2.1)$$

Коэффициенты $\mathfrak{A}_m, \bar{\mathfrak{A}}_m, \mathfrak{B}_m, \bar{\mathfrak{B}}_m$ связаны простыми зависимостями с коэффициентами $\alpha_m, \beta_m, \alpha'_m, \beta'_m, \bar{\alpha}_m, \bar{\beta}_m, \bar{\alpha}'_m, \bar{\beta}'_m$ функций U и V .

Действительно, подставляя в левую часть (4.2.1) производные от правых частей (4.1.3) и сравнивая коэффициенты при

$$e^{-my} \cos mx, \quad e^{-my} \sin mx, \quad e^{-m(h-y)} \cos mx, \quad e^{-m(h-y)} \sin mx,$$

имеем:

$$\begin{aligned} \mathfrak{A}_m &= m(\beta_m - \alpha'_m), & \mathfrak{B}_m &= -m(\alpha_m + \beta'_m), \\ \bar{\mathfrak{A}}_m &= m(\bar{\beta}_m + \bar{\alpha}'_m), & \bar{\mathfrak{B}}_m &= m(\bar{\beta}'_m - \bar{\alpha}_m). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

4.3. Если функции φ взять в виде

$$\begin{aligned} \varphi_0 &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ \varphi_0' &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(h-y)} (\bar{a}_m \cos mx + \bar{b}_m \sin mx), \\ \varphi_n &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(2nh+y)} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ \varphi_n' &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(2nh+h-y)} (\bar{a}_m \cos mx + \bar{b}_m \sin mx), \\ \varphi_{-n} &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(2nh-y)} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ \varphi'_{-n} &= \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(2nh-h+y)} (\bar{a}_m \cos mx + \bar{b}_m \sin mx) \end{aligned} \quad (4.3.1)$$

и коэффициенты $a_m, b_m, \bar{a}_m, \bar{b}_m$, которые будем называть коэффициентами функций φ , выразить через коэффициенты Фурье заданных на границах перемещений так, чтобы было удовлетворено (3.2.1), то функции φ будут удовлетворять вышеперечисленным для них условиям¹ (см. 3.2), и (3.1.6) дадут решение задачи.

¹ При этом необходимо, чтобы при любых x имела место сходимость следующих тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial x} \right)_{y=0} &= \sum (-ma_m \sin mx + mb_m \cos mx), \\ \left(\frac{\partial \varphi_0}{\partial y} \right)_{y=0} &= - \sum (ma_m \cos mx + mb_m \sin mx), \end{aligned}$$

4.4. Найдем предварительно, для упрощения выкладок, выражение коэффициентов функций φ через коэффициенты $\mathfrak{A}_m, \bar{\mathfrak{A}}_m, \mathfrak{B}_m, \bar{\mathfrak{B}}_m$, которые связаны простыми зависимостями (4.2.2) с коэффициентами функций U и V , а следовательно, по (4.1.4) и с коэффициентами Фурье заданных на границах полосы перемещений.

Для этого в левую часть (3.2.1) надо подставить ее выражение (4.2.1), а в правую часть (3.2.1) — производные от функций φ по (4.3.1) и приравнять в полученном равенстве коэффициенты при

$$e^{-my} \cos mx, \quad e^{-my} \sin mx, \quad e^{-m(h-y)} \cos mx, \quad e^{-m(h-y)} \sin mx.$$

Решая полученные уравнения относительно $a_m, \bar{a}_m, b_m, \bar{b}_m$ и принимая во внимание, что

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{-2mnh} = \frac{1}{e^{2hm} - 1}, \quad \sum_{n=1}^{\infty} ne^{-2mnh} = \frac{e^{2hm}}{(e^{2hm} - 1)^2},$$

найдем:

$$\begin{aligned} \delta a_m &= [(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1)e^{hm} + 2(\lambda + \mu)hme^{2hm}] \mathfrak{A}_m + \\ &+ [(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1) + 2(\lambda + \mu)hme^{2hm}] \bar{\mathfrak{A}}_m \\ \delta b_m &= [(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1)e^{hm} + 2(\lambda + \mu)hme^{2hm}] \mathfrak{B}_m + \\ &+ [(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1) + 2(\lambda + \mu)hme^{2hm}] \bar{\mathfrak{B}}_m \\ \delta \bar{a}_m &= [(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1) + 2(\lambda + \mu)hme^{2hm}] \mathfrak{A}_m + \\ &+ [(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1)e^{hm} + 2(\lambda + \mu)hme^{2hm}] \bar{\mathfrak{A}}_m \\ \delta \bar{b}_m &= [(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1) + 2(\lambda + \mu)hme^{2hm}] \mathfrak{B}_m + \\ &+ [(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1)e^{hm} + 2(\lambda + \mu)hme^{2hm}] \bar{\mathfrak{B}}_m \end{aligned} \tag{4.4.1}$$

причем

$$\delta = \frac{me^{hm}}{2\pi\mu(e^{2hm} - 1)} [(\lambda + 3\mu)^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4(\lambda + \mu)^2 h^2 m^2 e^{2hm}].$$

4.5. Подставляя в предыдущие формулы вместо $\mathfrak{A}_m, \bar{\mathfrak{A}}_m, \mathfrak{B}_m, \bar{\mathfrak{B}}_m$ их выражения (4.2.2), найдем:

$$a_m = \frac{2\pi\mu}{\lambda + \mu} [k_{1m}(\beta_m - \alpha'_m) + k_{2m}(\bar{\beta}_m - \bar{\alpha}'_m)],$$

$$b_m = \frac{2\pi\mu}{\lambda + \mu} [-k_{1m}(\alpha_m + \beta'_m) + k_{2m}(\bar{\beta}'_m - \bar{\alpha}_m)],$$

а также

$$\left(\frac{\partial \varphi'_0}{\partial x}\right)_{x=h}, \quad \left(\frac{\partial \varphi'_0}{\partial y}\right)_{y=h}.$$

Сходимость этих рядов будет обеспечена, если абсолютно сходятся ряды:

$$\sum m a_m, \quad \sum m b_m, \quad \sum m \bar{a}_m, \quad \sum m \bar{b}_m.$$

$$\bar{\alpha}_m = \frac{2\pi\mu}{\lambda + \mu} [k_{2m} (\beta_m - \alpha'_m) + k_{1m} (\bar{\beta}'_m - \bar{\alpha}'_m)], \quad (4.5.1)$$

$$\bar{\beta}_m = \frac{2\pi\mu}{\lambda + \mu} [-k_{2m} (\alpha_m - \beta'_m) + k_{1m} (\bar{\beta}'_m - \bar{\alpha}_m)],$$

где

$$k_{1m} = \frac{[(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1) + 2(\lambda + \mu)mh](e^{2hm} - 1)(\lambda + \mu)}{[(\lambda + 3\mu)^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4(\lambda + \mu)^2h^2m^2e^{2hm}]},$$

$$k_{2m} = \frac{[(\lambda + 3\mu)(e^{2hm} - 1) + 2(\lambda + \mu)mhe^{2hm}](e^{2hm} - 1)(\lambda + \mu)}{[(\lambda + 3\mu)^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4(\lambda + \mu)^2h^2m^2e^{2hm}]e^{hm}}. \quad (4.5.2)$$

Заметим, что эти коэффициенты k_{1m} и k_{2m} могут быть выражены через один коэффициент Пуассона σ , а именно:

$$k_{1m} = \frac{[(3 - 4\sigma)(e^{2hm} - 1) + 2hm](e^{2hm} - 1)}{[(3 - 4\sigma)^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2m^2e^{2hm}]},$$

$$k_{2m} = \frac{[(3 - 4\sigma)(e^{2hm} - 1) + 2hmce^{2hm}](e^{2hm} - 1)}{[(3 - 4\sigma)^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2m^2e^{2hm}]e^{hm}}. \quad (4.5.3)$$

4.6. Подставляя последовательно в (3.16) и (3.17) формулы (4.3.1), (4.5.1), (4.1.4), (4.1.2) и вводя обозначения:

$$3 - 4\sigma = \kappa,$$

$$J = \int_0^{2\pi} (u_0 - e^{mh} \bar{u}_0) \cos m(t - x) dt - \int_0^{2\pi} (v_0 - e^{mh} \bar{v}_0) \sin m(t - x) dt,$$

$$\bar{J} = \int_0^{2\pi} (\bar{u}_0 - e^{mh} u_0) \cos m(t - x) dt + \int_0^{2\pi} (\bar{v}_0 - e^{mh} v_0) \sin m(t - x) dt,$$

$$J' = \int_0^{2\pi} (u_0 - e^{mh} \bar{u}_0) \sin m(t - x) dt + \int_0^{2\pi} (v_0 - e^{mh} \bar{v}_0) \cos m(t - x) dt,$$

$$\bar{J}' = \int_0^{2\pi} (\bar{u}_0 - e^{mh} u_0) \sin m(t - x) dt - \int_0^{2\pi} (\bar{v}_0 - e^{mh} v_0) \cos m(t - x) dt,$$

получим окончательные формулы:

$$u = \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{2\pi} (\bar{u}_0 - e^{mh} u_0) \cos m(t - x) dt +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m(h-y)}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{2\pi} (u_0 - e^{mh} \bar{u}_0) \cos m(t - x) dt -$$

$$- \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\{2hm^2 [he^{2hm} - y(e^{2hm} - 1)] - xhm(e^{2hm} - 1)\} e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2m^2e^{2hm}]} \right.$$

$$\left. - \frac{\{2h^2m^2e^{2hm} - xm(e^{2hm} - 1)[y(e^{2hm} - 1) + h]\} e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2m^2e^{2hm}]} \right\} \bar{J} +$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\{2h^2 m^2 e^{2hm} + xm(e^{2hm} - 1)[y(e^{2hm} - 1) - he^{2hm}]\} e^{my}}{emh(e^{-mh} - emh) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \\
 & \left. - \frac{\{2hm^2 e^{2hm} [y(e^{2hm} - 1) + h] - xmh e^{2hm} (e^{2hm} - 1)\} e^{-my}}{emh(e^{-mh} - emh) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right\} J, \\
 v = & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{e^{-mh} - emh} \int_0^{2\pi} (\bar{v}_0 - e^{mh} v_0) \cos m(t - x) dt + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m(h-y)}}{e^{-mh} - emh} \int_0^{2\pi} (v_0 - e^{mh} \bar{v}_0) \cos m(t - x) dt + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\{2hm^2 [he^{2hm} - y(e^{2hm} - 1)] + xmh(e^{2hm} - 1)\} e^{my}}{(e^{-mh} - emh) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \\
 & \left. - \frac{\{2h^2 m^2 e^{2hm} + xm(e^{2hm} - 1)[y(e^{2hm} - 1) + h]\} e^{-my}}{(e^{-mh} - emh) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right\} \bar{J}' + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\{2h^2 m^2 e^{2hm} + xm(e^{2hm} - 1)[he^{2hm} - y(e^{2hm} - 1)]\} e^{my}}{emh(e^{-mh} - emh) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \\
 & \left. - \frac{\{2hm^2 e^{2hm} [y(e^{2hm} - 1) + h] + xmh e^{2hm} (e^{2hm} - 1)\} e^{-my}}{emh(e^{-mh} - emh) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right\} J', \\
 \theta = & \frac{2(1 - 2\sigma)}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2hm^2 (e^{2hm} - 1) e^{my} + xm(e^{2hm} - 1)^2 e^{-my}}{(e^{-mh} - emh) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \bar{J}' + \\
 & + \frac{2(1 - 2\sigma)}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{xm(e^{2hm} - 1)^2 e^{my} + 2hm^2 e^{2hm} (e^{2hm} - 1) e^{-my}}{emh(e^{-mh} - emh) [x^2(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} J'.
 \end{aligned} \tag{4.6.1}$$

4.7. Если в формулах предыдущего параграфа перейти к пределу при $h \rightarrow \infty$, полагая $\bar{v}_0 = \bar{v}_0 = 0$, то получим соответствующие формулы для полуплоскости ($y > 0$):

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} \left\{ \int_0^{2\pi} u_0 \cos m(t - x) dt - \right. \\
 & \left. - \frac{my}{8 - 4\sigma} \int_0^{2\pi} [u_0 \cos m(t - x) + v_0 \sin m(t - x)] dt \right\}, \\
 v = & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} \left\{ \int_0^{2\pi} v_0 \cos m(t - x) dt + \right. \\
 & \left. + \frac{my}{8 - 4\sigma} \int_0^{2\pi} [v_0 \cos m(t - x) - u_0 \sin m(t - x)] dt \right\}.
 \end{aligned} \tag{4.7.1}$$

Эти формулы совпадают с формулами, полученными совершенно иным путем Садовским^[4], если в этих последних формулах отбросить решение,

дающее в бесконечности бесконечно большие перемещения. Различие в знаках объясняется тем, что Саловский рассматривает не „верхнюю“, как мы, но „нижнюю“ полуплоскость ($y < 0$).

4.8. Пользуясь формулами (4.6.1), можно найти напряжения по обычным формулам (1.1.2). При коэффициентах упругости μ и σ ($\chi = 3 - 4\sigma$) получим (опуская промежуточные вычисления) формулы для напряжений:

$$\begin{aligned}
 X_x = & \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{me^{-my}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{2\pi} (\bar{u}_0 - e^{mh} u_0) \sin m(t-x) dt + \\
 & + \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{me^{-m(h-y)}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{2\pi} (u_0 - e^{mh} \bar{u}_0) \sin m(t-x) dt - \\
 & - \frac{4\mu\sigma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{mh} 2hm^2 e^{my} + \chi m (e^{2hm} - 1) e^{-my}}{[x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \bar{J}' - \\
 & - \frac{4\mu\sigma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi m (e^{2hm} - 1) e^{my} + 2hm^2 e^{2hm} e^{-my}}{[x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} J' - \\
 & - \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{m \{ 2hm^2 [he^{2hm} - y(e^{2hm} - 1)] - \chi hm (e^{2hm} - 1) \} e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \\
 & \left. - \frac{m \{ 2h^2 m^2 e^{2hm} - \chi m (e^{2hm} - 1) [y (e^{2hm} - 1) + h] \} e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right\} \bar{J}' + \\
 & + \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{m \{ 2h^2 m^2 e^{2hm} + \chi m (e^{2hm} - 1) [y (e^{2hm} - 1) - he^{2hm}] \} e^{my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \\
 & \left. - \frac{m \{ 2hm^2 e^{2hm} [y (e^{2hm} - 1) + h] - \chi m h e^{2hm} (e^{2hm} - 1) \} e^{-my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right\} J', \\
 Y_y = & \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-me^{-my}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{2\pi} (\bar{v}_0 - e^{mh} v_0) \cos m(t-x) dt + \\
 & + \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{me^{-m(h-y)}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{2\pi} (v_0 - e^{mh} \bar{v}_0) \cos m(t-x) dt - \\
 & - \frac{4\mu\sigma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{mh} 2hm^2 e^{my} + \chi m (e^{2hm} - 1) e^{-my}}{[x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \bar{J}' - \\
 & - \frac{4\mu\sigma}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{\chi m (e^{2hm} - 1) e^{my} + 2hm^2 e^{2hm} e^{-my}}{[x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} J' + \\
 & + \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{hm^2 [2hme^{2hm} - 2 (e^{2hm} - 1) (my + 1) + \chi (e^{2hm} - 1)] e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \\
 & \left. + \frac{m \{ 2h^2 m^2 e^{2hm} + \chi (e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1) (my - 1) + mh] \} e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [x^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right\} \bar{J}' +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & + \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m \{2h^2 m^2 e^{2hm} + \chi (e^{2hm} - 1) [m h e^{2hm} - (e^{2hm} - 1)(my + 1)]\} e^{my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [\chi^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \\
 & + \frac{hm^2 e^{2hm} [2hm + 2 (e^{2hm} - 1)(my - 1) + \chi (e^{2hm} - 1)] e^{-my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [\chi^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} J', \quad (4.8.1)
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_y = & \frac{\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{me^{-my}}{e^{-mh} - e^{mh}} \left[\int_0^{2\pi} (\bar{u}_0 - e^{mh} u_0) \cos m(t-x) dt - \right. \\
 & \left. - \int_0^{2\pi} (\bar{v}_0 - e^{mh} v_0) \sin m(t-x) dt \right] + \\
 & + \frac{\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{me^{-m(h-y)}}{e^{-mh} - e^{mh}} \left[\int_0^{2\pi} (u_0 - e^{mh} \bar{u}_0) \cos m(t-x) dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^{2\pi} (v_0 - e^{mh} \bar{v}_0) \sin m(t-x) dt \right] - \\
 & - \frac{\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{2hm^2 [2m h e^{2hm} - (e^{2hm} - 1)(1 + 2my)] e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [\chi^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \\
 & \left. + \frac{\chi m (e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1)(1 - 2my) - 2mh] e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [\chi^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right\} \bar{J} + \\
 & + \frac{\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{\chi m (e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1)(1 + 2my) - 2h m e^{2hm}] e^{my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [\chi^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \\
 & \left. + \frac{2hm^2 e^{2hm} [2hm - (e^{2hm} - 1)(1 - 2my)] e^{-my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [\chi^2 (e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right\} J.
 \end{aligned}$$

4.9. В частном случае, при $h \rightarrow \infty$ и $\bar{u}_0 = \bar{v}_0 = 0$, формулы (4.8.1) дадут напряжения в полуплоскости. Опуская промежуточные выкладки, получим:

$$\begin{aligned}
 X_x = & \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{2\pi} u_0 \sin m(t-x) dt + \\
 & + \frac{4\mu\sigma}{\chi\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{2\pi} [u_0 \sin m(t-x) - v_0 \cos m(t-x)] dt - \\
 & - \frac{2\mu}{\chi\pi} y \sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-my} \int_0^{2\pi} [u_0 \sin m(t-x) - v_0 \cos m(t-x)] dt, \\
 Y_y = & - \frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{2\pi} v_0 \cos m(t-x) dt + \\
 & + \frac{4\mu\sigma}{\chi\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{2\pi} [u_0 \sin m(t-x) - v_0 \cos m(t-x)] dt +
 \end{aligned}$$

$$+ \frac{2\mu}{\chi\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m(my-1) e^{-my} \int_0^{2\pi} [u_0 \sin m(t-x) - v_0 \cos m(t-x)] dt, \quad (4.9.1)$$

$$X_y = -\frac{\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{2\pi} [u_0 \cos m(t-x) - v_0 \sin m(t-x)] dt - \\ - \frac{\mu}{\chi\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m(1-2my) e^{-my} \int_0^{2\pi} [u_0 \cos m(t-x) + v_0 \sin m(t-x)] dt.$$

Если $u_0 = 0$ и v_0 — функция четная, то

$$X_x = -\frac{8\mu\sigma}{\chi\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{\pi} v_0 \cos mt \cos mx dt + \frac{4\mu}{\chi\pi} y \sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-my} \int_0^{\pi} v_0 \cos mt \cos mx dt, \\ Y_y = -\frac{8\mu\sigma}{\chi\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{\pi} v_0 \cos mt \cos mx dt - \frac{4\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{\pi} v_0 \cos mt \cos mx dt - \\ - \frac{4\mu}{\chi\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m(my-1) e^{-my} \int_0^{\pi} v_0 \cos mt \cos mx dt, \quad (4.9.2)$$

$$X_y = -\frac{2\mu}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{\pi} v_0 \cos mt \sin mx dt + \frac{2\mu}{\chi\pi} \sum_{m=1}^{\infty} m(1-2my) \int_0^{\pi} v_0 \cos mt \sin mx dt.$$

4.10. В предыдущем при рассмотрении случая периодических граничных условий период принимался равным 2π . При периоде $2l$ в формулах (4.6.1) и (4.8.1) надо заменить везде m на $m\pi/l$ и множитель $1/\pi$ перед знаком Σ на $1/l$.

К этому заключению можно прийти, проделав, начиная с 4.1, все выкладки при периоде $2l$ вместо 2π .

4.11. Для примера выразим нормальные напряжения на границе полуплоскости через перемещения точек этой границы¹.

Если перейти к коэффициентам Ламе, принимая во внимание, что

$$\chi = 3 - 4\sigma, \quad \sigma = \frac{\lambda}{2(\lambda + \mu)},$$

то формула (4.9.1) для Y_y напишется так:

$$Y_y = -\frac{2\mu(\lambda + 2\mu)}{\pi(\lambda + 3\mu)} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{2\pi} v_0 \cos m(t-x) dt - \\ - \frac{2\mu(\lambda + \mu)}{\pi(\lambda + 3\mu)} y \sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-my} \int_0^{2\pi} v_0 \cos m(t-x) dt -$$

¹ Такую задачу решает Л. С. Гильман [2].

$$-\frac{2\mu^2}{\pi(\lambda+3\mu)} \sum_{m=1}^{\infty} m e^{-my} \int_0^{2\pi} u_0 \sin m(t-x) dt +$$

$$+\frac{2\mu(\lambda+\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)} y \sum_{m=1}^{\infty} m^2 e^{-my} \int_0^{2\pi} u_0 \sin m(t-x) dt.$$

При $y=0$ второй и четвертый члены правой части исчезают. Первый член, если перейти к интегралу Фурье, будет:

$$-\frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)} \int_0^{\infty} q e^{-qy} dq \int_{-\infty}^{+\infty} v_0 \cos q(t-x) dt = A,$$

где $v_0(t)$ предполагается уже не периодической, но абсолютно интегрируемой функцией.

Заметив, что

$$\int_0^{\infty} e^{-qy} \cos q(t-x) dq = \frac{y}{(t-x)^2 + y^2}$$

и что

$$-\int_0^{\infty} q e^{-qy} \cos q(t-x) dt = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{y}{(t-x)^2 + y^2} \right] = \frac{(t-x)^2 - y^2}{[(t-x)^2 + y^2]^2},$$

получим¹:

$$A = \frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} v_0 \frac{(t-x)^2 - y^2}{[(t-x)^2 + y^2]^2} dt.$$

При $y=0$

$$A = A_0 = \frac{2\mu(\lambda+2\mu)}{\pi(\lambda+3\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_0}{(t-x)^2} dt.$$

Интегрируя по частям, получим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_0}{(t-x)^2} dt = \left[-\frac{v_0}{t-x} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_0'}{t-x} dt.$$

Вследствие предположенной абсолютной интегрируемости функции $v_0(t)$ первый член правой части предыдущего равенства исчезает.

Введя обозначение:

$$t-x = \xi, \quad t = x + \xi,$$

найдем (см. [5]):

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_0'}{t-x} dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{v_0'}{\xi} d\xi = \int_{-\infty}^0 \frac{v_0'}{\xi} d\xi + \int_0^{+\infty} \frac{v_0'}{\xi} d\xi =$$

$$= -\int_0^{\infty} \frac{v_0'(x-\xi)}{\xi} d\xi + \int_0^{\infty} \frac{v_0'(x+\xi)}{\xi} d\xi = \int_0^{\infty} \frac{v_0'(x+\xi) - v_0'(x-\xi)}{\xi} d\xi,$$

¹ Интегралы с бесконечными пределами понимаются в смысле их главных значений по Коши.

причем $v_0'(x + \xi)$, $v_0'(x - \xi)$ суть значения производной v_0' при $t = x + \xi$ и при $t = x - \xi$.

Итак, при $y = 0$

$$A = A_0 = \frac{2\mu(\lambda + 2\mu)}{\pi(\lambda + 3\mu)} \int_0^{\infty} \frac{v_0'(x + \xi) - v_0'(x - \xi)}{\xi} d\xi.$$

Третий член в выражении для Y_y , если перейти к интегралу Фурье, предполагая $u_0(t)$ уже не периодической, но абсолютно интегрируемой функцией, будет:

$$-\frac{2\mu^2}{\pi(\lambda + 3\mu)} \int_0^{\infty} q e^{-qy} dq \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 \sin q(t - x) dt = B.$$

Заметив, что

$$\int_0^{\infty} e^{-qy} \sin q(t - x) dq = \frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2}$$

и что

$$-\int_0^{\infty} q e^{-qy} \sin q(t - x) dq = \frac{\partial}{\partial y} \left[\frac{t - x}{(t - x)^2 + y^2} \right] = -\frac{2(t - x)y}{[(t - x)^2 + y^2]^2},$$

получим:

$$B = -\frac{2\mu^2}{\pi(\lambda + 3\mu)} \int_{-\infty}^{+\infty} u_0 \frac{2(t - x)y}{[(t - x)^2 + y^2]^2} dt.$$

Интегрируя по частям, находим:

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{2u_0(t - x)y}{[(t - x)^2 + y^2]^2} dt = \left[-\frac{y u_0}{(t - x)^2 + y^2} \right]_{-\infty}^{+\infty} + \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{u_0' y}{(t - x)^2 + y^2} dt.$$

При $y = 0$ первый член правой части исчезает, второй же член, как известно, будет равен $\pi u_0'(x)$, где $u_0'(x)$ есть значение производной u_0' в точке границы с абсциссой x (см., например, [17]).

Итак, при $y = 0$

$$B = B_0 = -\frac{2\mu^2}{\lambda + 3\mu} u_0'(x).$$

Следовательно, при $y = 0$

$$Y_y = A_0 + B_0 = \frac{2\mu(\lambda + 2\mu)}{\pi(\lambda + 3\mu)} \int_0^{\infty} \frac{v_0'(x + \xi) - v_0'(x - \xi)}{\xi} d\xi - \frac{2\mu^2}{\lambda + 3\mu} u_0'(x).$$

Эта формула дает значение нормального напряжения на границе полуплоскости в точке с абсциссой x .

К такому же результату пришел и Л. С. Гильмаев^[6] иным путем.

5. Вторая основная задача

5.1. На границах l_1 и l_2 бесконечной полосы (фиг. 3) заданы внешние напряжения: касательное T_0 и нормальное N_0 .

Дифференцируя по y (1.1.4), получим:

$$\Delta \frac{du}{dy} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad \Delta \frac{dv}{dy} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial}{\partial y} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0. \quad (5.1.1)$$

Из сравнения этих уравнений с (1.1.4) следует, что для du/dy и dv/dy могут быть написаны формулы, аналогичные формулам (3.1.2) и (3.1.4) для u и v . Для этого в этих последних формулах надо вместо u , v , θ поставить соответственно du/dy , dv/dy , $\partial \theta / \partial y$ и вместо U и V гармонические функции, принимающие на l_1 и l_2 значения $du/d\eta$ и $dv/d\eta$, которые можно выразить через заданные на границах внешние напряжения.

Действительно, из (1.1.3), замечая, что

$$\frac{du}{dn} = - \frac{du}{d\eta}, \quad \frac{dv}{dn} = - \frac{dv}{d\eta} \quad \text{на } l_1, \quad \frac{du}{dn} = \frac{du}{d\eta}, \quad \frac{dv}{dn} = \frac{dv}{d\eta} \quad \text{на } l_2,$$

находим, что

$$\begin{aligned} \frac{du}{d\eta} &= - \frac{T_0}{2\mu} + \omega, & \frac{dv}{d\eta} &= - \frac{N_0}{2\mu} - \frac{\lambda\theta}{2\mu} \quad \text{на } l_1, \\ \frac{du}{d\eta} &= \frac{T_0}{2\mu} + \omega, & \frac{dv}{d\eta} &= \frac{N_0}{2\mu} - \frac{\lambda\theta}{2\mu} \quad \text{на } l_2. \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

Поэтому, если обозначить \mathfrak{X} и \mathfrak{N} гармонические функции, которые на l_1 принимают значения, соответственно равные $-T_0$ и $-N_0$, а на l_2 значения \bar{T}_0 и \bar{N}_0 , то вместо U и V надо будет в (3.1.2) и (3.1.4) поставить соответственно:

$$\frac{\mathfrak{X}}{2\mu} + \omega, \quad \frac{\mathfrak{N}}{2\mu} - \frac{\lambda\theta}{2\mu}$$

(напомним, что ω и θ являются в нашем случае, т. е. при отсутствии массовых сил, функциями гармоническими).

При этих обозначениях и предполагая, что $\partial \theta / \partial \eta$ удовлетворяет условиям, необходимым для возможности почленного интегрирования ряда $\int \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \frac{dG}{dn} dl$, получим:

$$\begin{aligned} \frac{du}{dy} &= \frac{\mathfrak{X}}{2\mu} + \omega + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \left\{ y \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r} dl + (h - y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r} dl + \right. \\ &+ \sum_{n=1}^{\infty} \left[(2nh + y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n}} dl - (2nh - y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n-1}} dl \right] + \\ &+ \left. \sum_{n=1}^{\infty} \left[((2n + 1)h - y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n}} dl - ((2n - 1)h + y) \frac{\partial}{\partial x} \int_{l_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n-1}} dl \right] \right\}, \quad (5.1.3) \\ \frac{dv}{dy} &= \frac{\mathfrak{N}}{2\mu} - \frac{\lambda\theta}{2\mu} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \\ &+ \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} h \left\{ \frac{\partial}{\partial y} \int_{l_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r} dl + \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\partial}{\partial y} \int_{l_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n}} dl + \frac{\partial}{\partial y} \int_{l_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n-1}} dl \right] \right\}. \end{aligned}$$

Если ввести обозначения:

$$\begin{aligned}\psi_0 &= \int_{l_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r} dl, & \psi_n &= \int_{l_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n}} dl, & \psi_{-n} &= \int_{l_1} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n-1}} dl, \\ \psi'_0 &= \int_{l_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r} dl, & \psi'_n &= \int_{l_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n}} dl, & \psi'_{-n} &= \int_{l_2} \frac{\partial \theta}{\partial \eta} \ln \frac{1}{r_{2n-1}} dl,\end{aligned}\quad (5.1.4)$$

то предыдущие формулы примут такой вид¹:

$$\begin{aligned}\frac{\partial u}{\partial y} &= \frac{\Im}{2\mu} + \omega + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(2nh + y) \frac{\partial \psi_n}{\partial x} + (2nh + h - y) \frac{\partial \psi'_n}{\partial x} \right], \\ \frac{\partial v}{\partial y} &= \frac{\Re}{2\mu} - \frac{\lambda \theta}{2\mu} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \frac{\partial \theta}{\partial y} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial \psi'_n}{\partial y}.\end{aligned}\quad (5.1.5)$$

Из этих уравнений u и v могут быть найдены с помощью квадратур, если известны ω и ψ .

Но ω может быть выражено через функции ψ , как будет показано далее, так что задача сводится к нахождению функций ψ .

Действительно, дифференцируя первое из равенств (5.1.5) по y , а второе по x и вычитая из первого результата второй, получим:

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial y} \left(\frac{\partial u}{\partial y} - \frac{\partial v}{\partial x} \right) &= \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \Im}{\partial y} - \frac{\partial \Re}{\partial x} \right) + \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} - \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} h \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \frac{\partial \psi'_n}{\partial y} + \\ &+ \frac{\partial \omega}{\partial y} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \frac{\partial}{\partial y} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[(2nh + y) \frac{\partial \psi_n}{\partial x} + (2nh + h - y) \frac{\partial \psi'_n}{\partial x} \right].\end{aligned}$$

Замечая, что

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\psi'_n - \psi_n), \quad (5.1.6)$$

что получается из (3.1.7) заменой θ на $\partial \theta / \partial y$, и что поэтому

$$\frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \frac{\partial^2 \theta}{\partial x \partial y} = \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \frac{\partial}{\partial x} \left[\frac{1}{\pi} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\psi'_n - \psi_n) \right] = \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial x} \left(y \frac{\partial \psi'_n}{\partial y} - y \frac{\partial \psi_n}{\partial x} \right),$$

получим для выражения ω через функции ψ следующее равенство:

$$\begin{aligned}\frac{\partial \omega}{\partial y} &= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{\partial \Im}{\partial y} - \frac{\partial \Re}{\partial x} \right) + \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} \left(2nh \frac{\partial \psi_n}{\partial y} + \psi_n \right) + \right. \\ &\left. + \frac{\partial}{\partial x} \left(2nh \frac{\partial \psi'_n}{\partial y} - \psi'_n \right) \right];\end{aligned}\quad (5.1.7)$$

откуда, если известны функции ψ , находим ω с помощью квадратуры.

¹ См. 3.1, замечание по поводу формул (3.1.6).

5.2. Что касается функций ψ , к нахождению которых и сводится таким образом решение задачи, то, подобно функциям φ в первой основной задаче (см. 3.2), они должны удовлетворять следующим требованиям:

1. Они должны быть гармоническими и регулярными в полосе.
2. На границах они и их первые производные должны быть конечны.
3. При $y=0$ должно быть:

$$\psi'_0 = \psi'_{-1}, \quad \psi_1 = \psi_{-1}, \quad \psi_{-2} = -\psi'_1, \dots, \quad \psi_n = \psi_{-n}, \quad \psi'_{-n} = \psi_{n-1};$$

при $y=h$ должно быть:

$$\psi_0 = \psi_{-1}, \quad \psi'_1 = \psi'_{-1}, \quad \psi_{-2} = \psi_1, \dots, \quad \psi'_n = \psi'_{-n}, \quad \psi_{-n} = \psi_{n-1}.$$

4. Ряды, заключающие их, должны быть сходящимися и дифференцируемыми в полосе.

5. Функции ψ должны удовлетворять равенству:

$$\sum_{-\infty}^{+\infty} \frac{\partial}{\partial y} (\psi'_n - \psi_n) + 2h \sum_{-\infty}^{+\infty} n \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\psi'_n + \psi'_n) = \frac{\pi}{\lambda + \mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} \right). \quad (5.2.1)$$

Действительно, дифференцируя равенства (5.1.5), первое по x , второе по y , и складывая результаты, получим после некоторых преобразований, которые опускаем:

$$\frac{\partial \theta}{\partial y} = \frac{1}{\lambda + \mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} \right) - \frac{2h}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} n \frac{\partial^2}{\partial y^2} (\psi_n + \psi'_n). \quad (5.2.2)$$

Подставив сюда $\partial \theta / \partial y$ по (5.1.6), мы и приходим к (5.2.1).

5.3. Введем следующее обозначение: буквой с волнистой линией (или двумя) сверху будем обозначать функцию, первая (или вторая) производная которой по y обозначается той же буквой без этой (или этих) линий сверху¹.

Тогда, интегрируя (5.2.2) и (5.1.6) по y , найдем:

$$\theta = \frac{1}{\lambda + \mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} \right) - \frac{2h}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} n \frac{\partial}{\partial y} (\psi_n + \psi'_n) = \frac{1}{\pi} \sum_{-\infty}^{+\infty} (\psi'_n - \psi_n). \quad (5.3.1)$$

Интегрируя (5.1.7) по y , получим:

$$\omega = \frac{1}{2\mu} \left(\frac{\partial \mathfrak{E}}{\partial y} - \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial x} \right) + \frac{\lambda}{2\mu} \frac{\partial \bar{\theta}}{\partial x} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[\frac{\partial}{\partial x} (2nh\psi_n + \bar{\psi}_n) + \frac{\partial}{\partial x} (2nh\psi'_n + \bar{\psi}'_n) \right]. \quad (5.3.2)$$

Наконец, интегрируя по y (5.1.5), найдем:

$$u = \frac{\mathfrak{E}}{2\mu} + \bar{\omega} + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} \sum_{-\infty}^{+\infty} \left[(2nh + y) \frac{\partial \bar{\psi}_n}{\partial x} + (2nh + h - y) \frac{\partial \bar{\psi}'_n}{\partial x} - \frac{\partial}{\partial x} (\bar{\psi}_n - \bar{\psi}'_n) \right],$$

$$v = \frac{\mathfrak{N}}{2\mu} + \frac{\bar{\theta}}{2} - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y \theta + \frac{\lambda + \mu}{2\pi\mu} h \sum_{-\infty}^{+\infty} \psi_n. \quad (5.3.3)$$

¹ Обозначение заимствовано у Тедоне [15 б], который вместо волнистой линии ставит черту.

Эти формулы, дающие решение второй основной задачи, являются двухмерным аналогом формул Тедоне^[15, 6] для соответствующей пространственной задачи, когда рассматривается не бесконечная полоса, но бесконечный слой между двумя параллельными плоскостями.

6. Случай периодических граничных условий

6.1. Применим решение основной задачи II к тому случаю, когда заданные на границах полосы внешние напряжения представимы рядами Фурье:

$$\left. \begin{aligned} T_0 &= \sum (A_m \cos mx + B_m \sin mx) \\ N_0 &= \sum (A'_m \cos mx + B'_m \sin mx) \\ \bar{T}_0 &= \sum (\bar{A}_m \cos mx + \bar{B}_m \sin mx) \\ \bar{N}_0 &= \sum (\bar{A}'_m \cos mx + \bar{B}'_m \sin mx) \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{на } l_1, \\ \text{на } l_2, \end{array}$$

где $m = 1, 2, \dots$ и

$$\begin{aligned} A_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_0 \cos mt \, dt, & \bar{A}_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{T}_0 \cos mt \, dt, \\ B_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} T_0 \sin mt \, dt, & \bar{B}_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{T}_0 \sin mt \, dt, \\ A'_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} N_0 \cos mt \, dt, & \bar{A}'_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{N}_0 \cos mt \, dt, \\ B'_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} N_0 \sin mt \, dt, & \bar{B}'_m &= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \bar{N}_0 \sin mt \, dt. \end{aligned} \quad (6.1.1)$$

Гармонические функции \mathfrak{X} и \mathfrak{N} (см. 5.1) возьмем в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathfrak{X} &= \sum e^{-my} (\alpha_m \cos mx + \beta_m \sin mx) + \sum e^{-m(h-y)} (\bar{\alpha}_m \cos mx + \bar{\beta}_m \sin mx), \\ \mathfrak{N} &= \sum e^{-my} (\alpha'_m \cos mx + \beta'_m \sin mx) + \sum e^{-m(h-y)} (\bar{\alpha}'_m \cos mx + \bar{\beta}'_m \sin mx). \end{aligned} \quad (6.1.2)$$

Согласно сказанному в (5.1) о граничных значениях этих функций:

$$\mathfrak{X}_{y=0} = -T_0, \quad \mathfrak{X}_{y=h} = \bar{T}_0, \quad \mathfrak{N}_{y=0} = -N_0, \quad \mathfrak{N}_{y=h} = \bar{N}_0,$$

откуда находятся зависимости между коэффициентами функций \mathfrak{X} и \mathfrak{N} и коэффициентами Фурье данных на границах внешних напряжений, а именно:

$$\begin{aligned} \alpha_m &= \frac{\bar{A}_m + A_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, & \alpha'_m &= \frac{\bar{A}'_m + A'_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, \\ \beta_m &= \frac{\bar{B}_m + B_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, & \beta'_m &= \frac{\bar{B}'_m + B'_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, \\ \bar{\alpha}_m &= \frac{-A_m - \bar{A}_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, & \bar{\alpha}'_m &= \frac{-A'_m - \bar{A}'_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, \end{aligned} \quad (6.1.3)$$

$$\bar{\beta}_m = \frac{-B_m - \bar{B}_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}, \quad \beta'_m = \frac{-B'_m - \bar{B}'_m e^{mh}}{e^{-mh} - e^{mh}}.$$

6.2. Заметив, что

$$\frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y}$$

является функцией гармонической, положим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathfrak{I}}{\partial x} + \frac{\partial \mathfrak{N}}{\partial y} = & \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} (\mathfrak{U}_m \cos mx + \mathfrak{B}_m \sin mx) + \\ & + \sum_{m=1}^{\infty} e^{-m(h-y)} (\bar{\mathfrak{U}}_m \cos mx + \bar{\mathfrak{B}}_m \sin mx). \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Коэффициенты $\mathfrak{U}_m, \bar{\mathfrak{U}}_m, \mathfrak{B}_m, \bar{\mathfrak{B}}_m$ связаны с коэффициентами функций \mathfrak{I} и \mathfrak{N} (6.1.2) простыми зависимостями (ср. 4.2):

$$\begin{aligned} \mathfrak{U}_m = m(\beta_m - \alpha'_m), \quad \mathfrak{B}_m = -m(\alpha_m + \beta'_m), \\ \bar{\mathfrak{U}}_m = m(\bar{\beta}_m + \bar{\alpha}'_m), \quad \bar{\mathfrak{B}}_m = m(\bar{\beta}'_m - \bar{\alpha}_m). \end{aligned} \quad (4.2.2)$$

6.3. Если функции ψ брать в виде:

$$\begin{aligned} \psi_0 &= \sum e^{-my} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ \psi'_0 &= \sum e^{-m(h-y)} (\bar{a}_m \cos mx + \bar{b}_m \sin mx), \\ \psi_n &= \sum e^{-m(2nh+y)} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ \psi'_n &= \sum e^{-m(2nh+h-y)} (\bar{a}_m \cos mx + \bar{b}_m \sin mx), \\ \psi_{-n} &= \sum e^{-m(2nh-y)} (a_m \cos mx + b_m \sin mx), \\ \psi'_{-n} &= \sum e^{-m(2nh-h+y)} (\bar{a}_m \cos mx + \bar{b}_m \sin mx) \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

и коэффициенты $a_m, b_m, \bar{a}_m, \bar{b}_m$, которые будем называть коэффициентами функций ψ , выразить через коэффициенты Фурье заданных на границах внешних напряжений так, чтобы было удовлетворено (5.2.1), то функции ψ будут удовлетворять вышеперечисленным для них условиям (см. 5.2)¹, и (5.3.3) дадут решение задачи.

¹ При этом необходимо, чтобы при любых x имела место сходимость следующих тригонометрических рядов:

$$\begin{aligned} \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial x}\right)_{y=0} &= \sum (-ma_m \sin mx + mb_m \cos mx), \\ \left(\frac{\partial \psi_0}{\partial y}\right)_{y=0} &= -\sum (ma_m \cos mx + mb_m \sin mx), \end{aligned}$$

а также

$$\left(\frac{\partial \psi'_0}{\partial x}\right)_{y=h}, \quad \left(\frac{\partial \psi'_0}{\partial y}\right)_{y=h}.$$

Сходимость этих рядов будет обеспечена, если абсолютно сходятся ряды:

$$\sum ma_m, \quad \sum mb_m, \quad \sum m\bar{a}_m, \quad \sum m\bar{b}_m.$$

6.4. Найдем предварительно, для упрощения выкладок, выражение коэффициентов функций ψ через коэффициенты $\mathfrak{A}_m, \bar{\mathfrak{A}}_m, \mathfrak{B}_m, \bar{\mathfrak{B}}_m$, которые связаны простыми зависимостями (4.2.2) с коэффициентами функций \mathfrak{X} и \mathfrak{N} , а следовательно, по (6.1.3), и с коэффициентами Фурье заданных на границах полосы внешних напряжений.

Для этого, подставляя в левую часть (5.2.1) функции ψ по (6.3.1), а в правую часть (5.2.1) правую часть (6.2.1) и приравнивая в полученном равенстве коэффициенты при

$$e^{-my} \cos mx, \quad e^{-my} \sin mx, \quad e^{-m(h-y)} \cos mx, \quad e^{-m(h-y)} \sin mx,$$

получим, опуская промежуточные выкладки:

$$\begin{aligned} \delta a_m &= (e^{2hm} - 2hm - 1) e^{hm} \mathfrak{A}_m + [e^{2hm} (2hm + 1) - 1] \bar{\mathfrak{A}}_m, \\ \delta \bar{a}_m &= [e^{2hm} (2hm + 1) - 1] \mathfrak{A}_m + (e^{2hm} + 2hm - 1) e^{hm} \bar{\mathfrak{A}}_m, \\ \delta b_m &= (e^{2hm} + 2hm - 1) e^{hm} \mathfrak{B}_m + [e^{2hm} (2hm + 1) - 1] \bar{\mathfrak{B}}_m, \\ \delta \bar{b}_m &= [e^{2hm} (2hm + 1) - 1] \mathfrak{B}_m + (e^{2hm} + 2hm - 1) e^{hm} \bar{\mathfrak{B}}_m, \end{aligned} \quad (6.4.1)$$

причем

$$\delta = \frac{(\lambda + \mu) m e^{mh}}{\pi (e^{2hm} - 1)} [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}].$$

6.5. Подставляя в предыдущие формулы вместо $\mathfrak{A}_m, \bar{\mathfrak{A}}_m, \mathfrak{B}_m, \bar{\mathfrak{B}}_m$ их выражения (4.2.2), найдем:

$$\begin{aligned} a_m &= \frac{\pi}{\lambda + \mu} [k_{1m} (\beta_m - \alpha'_m) + k_{2m} (\bar{\beta}_m + \bar{\alpha}'_m)], \\ b_m &= \frac{\pi}{\lambda + \mu} [-k_{1m} (\alpha_m + \beta'_m) + k_{2m} (\bar{\beta}'_m - \bar{\alpha}_m)], \\ \bar{a}_m &= \frac{\pi}{\lambda + \mu} [k_{2m} (\beta_m - \alpha'_m) + k_{1m} (\bar{\beta}_m + \bar{\alpha}'_m)], \\ \bar{b}_m &= \frac{\pi}{\lambda + \mu} [-k_{2m} (\alpha_m + \beta'_m) + k_{1m} (\bar{\beta}'_m - \bar{\alpha}_m)], \end{aligned} \quad (6.5.1)$$

где

$$k_{1m} = \frac{(e^{2hm} + 2hm - 1)(e^{2hm} - 1)}{[(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]}, \quad k_{2m} = \frac{[e^{2hm} (2hm + 1) - 1](e^{2hm} - 1)}{e^{hm} [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]}. \quad (6.5.2)$$

6.6. Подставляя последовательно в (5.3.3), (5.3.1) и (5.3.2) формулы (6.3.1), (6.5.1), (6.1.2), (6.1.3), (6.1.1) и вводя обозначения:

$$\begin{aligned} J &= \int_0^{2\pi} (T_0 + e^{mh} \bar{T}_0) \cos m(t-x) dt - \int_0^{2\pi} (N_0 + e^{mh} \bar{N}_0) \sin m(t-x) dt, \\ \bar{J} &= \int_0^{2\pi} (\bar{T}_0 + e^{mh} T_0) \cos m(t-x) dt + \int_0^{2\pi} (\bar{N}_0 + e^{mh} N_0) \sin m(t-x) dt, \\ J' &= \int_0^{2\pi} (T_0 + e^{mh} \bar{T}_0) \sin m(t-x) dt + \int_0^{2\pi} (N_0 + e^{mh} \bar{N}_0) \cos m(t-x) dt, \\ \bar{J}' &= \int_0^{2\pi} (\bar{T}_0 + e^{mh} T_0) \sin m(t-x) dt - \int_0^{2\pi} (\bar{N}_0 + e^{mh} N_0) \cos m(t-x) dt, \end{aligned} \quad (6.6.1)$$

получим окончательные формулы:

$$\begin{aligned}
 u = & \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-e^{-m\lambda}}{m(e^{-m\lambda} - e^{mh})} \int_0^{2\pi} (\bar{T}_0 + e^{mh} T_0) \cos m(t-x) dt - \right. \\
 & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m(\lambda-y)}}{m(e^{-m\lambda} - e^{mh})} \int_0^{2\pi} (T_0 + e^{mh} \bar{T}_0) \cos m(t-x) dt \right\} + \\
 & + \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1) e^{-my} - 2hme^{my}]}{m(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \bar{J} - \right. \\
 & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{2hm} - 1) [2hme^{2hm} e^{-my} - (e^{2hm} - 1) e^{my}]}{me^{mh}(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} J \right\} + \\
 & + \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{mh [(e^{2hm} - 1)(3 + 2my) - 2hme^{2hm}] e^{my}}{m(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\{(e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1)(my - 1) + mh] - 2h^2 m^2 e^{2hm}\} e^{-my}}{m(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] \bar{J} + \right. \\
 & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\{(e^{2hm} - 1) [mhe^{2hm} - (e^{2hm} - 1)(my + 1)] - 2h^2 m^2 e^{2hm}\} e^{my}}{me^{mh}(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{mhe^{2hm} [(e^{2hm} - 1)(3 - 2my) - 2hm] e^{-my}}{me^{mh}(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] J \right\}, \tag{6.6.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 v = & \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-e^{-my}}{m(e^{-mh} - e^{mh})} \int_0^{2\pi} (\bar{N}_0 + e^{mh} N_0) \cos m(t-x) dt - \right. \\
 & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m(\lambda-y)}}{m(e^{-mh} - e^{mh})} \int_0^{2\pi} (N_0 + e^{mh} \bar{N}_0) \cos m(t-x) dt \right\} + \\
 & + \frac{1}{2\pi(\lambda + \mu)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{2hm} - 1) [2hme^{my} + (e^{2hm} - 1) e^{-my}]}{m(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \bar{J}' - \right. \\
 & \left. - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1) e^{my} + 2hme^{2hm} e^{-my}]}{me^{mh}(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} J' \right\} + \\
 & + \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{h [(e^{2hm} - 1)(1 - 2my) + 2hme^{2hm}] e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \right. \\
 & \left. \left. + \frac{\{(e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1)y + h] + 2h^2 me^{2hm}\} e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] \bar{J}' + \right. \\
 & \left. + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\{(e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1)y - he^{2hm}] - 2h^2 me^{2hm}\} e^{my}}{e^{mh}(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \right. \\
 & \left. \left. - \frac{he^{2hm} [(e^{2hm} - 1)(1 + 2my) + 2hm] e^{-my}}{e^{mh}(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] J' \right\}, \tag{6.6.2}
 \end{aligned}$$

$$\theta = \frac{1}{\pi(\lambda + \mu)} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{mh} [(e^{2hm} - 1) e^{-my} - 2hme^{my}] \bar{J} - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2hme^{2hm} e^{-my} - (e^{2hm} - 1) e^{my}}{[(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} J' \right\}, \quad (6.6.3)$$

$$\omega = \frac{1}{2\pi\mu} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-e^{mh} [4hme^{my} + 2(e^{2hm} - 1) e^{-my}]}{[(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \bar{J} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(e^{2hm} - 1) e^{my} + 4hme^{2hm} e^{-my}}{[(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} J \right\}. \quad (6.6.4)$$

6.7. Переходя к пределу при $h \rightarrow \infty$, полагая $T_0 = N_0 = 0$, получим из формул (6.6.2), (6.6.3) и (6.6.4) соответствующие формулы для полуплоскости ($y > 0$):

$$u = \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{m} \int_0^{2\pi} T_0 \cos m(t-x) dt - \frac{\lambda}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{m} \left[\int_0^{2\pi} T_0 \cos m(t-x) dt + \int_0^{2\pi} N_0 \sin m(t-x) dt \right] + \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{(1-my)e^{-my}}{m} \left[\int_0^{2\pi} T_0 \cos m(t-x) dt + \int_0^{2\pi} N_0 \sin m(t-x) dt \right], \quad (6.7.2)$$

$$v = \frac{1}{2\pi\mu} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{m} \int_0^{2\pi} N_0 \cos m(t-x) dt - \frac{1}{2\pi(\lambda + \mu)} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{m} \left[\int_0^{2\pi} T_0 \sin m(t-x) dt - \int_0^{2\pi} N_0 \cos m(t-x) dt \right] - \frac{1}{2\pi\mu} y \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} \left[\int_0^{2\pi} T_0 \sin m(t-x) dt - \int_0^{2\pi} N_0 \cos m(t-x) dt \right], \quad (6.7.2)$$

$$\theta = \frac{1}{\pi(\lambda + \mu)} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} \left[\int_0^{2\pi} T_0 \sin m(t-x) dt - \int_0^{2\pi} N_0 \cos m(t-x) dt \right], \quad (6.7.3)$$

$$\omega = -\frac{\lambda + 2\mu}{2\pi\mu(\lambda + \mu)} \sum_{m=1}^{\infty} e^{-my} \left[\int_0^{2\pi} T_0 \cos m(t-x) dt + \int_0^{2\pi} N_0 \sin m(t-x) dt \right]. \quad (6.7.4)$$

Заметим, что формулы (6.7.2) совпадают до постоянных слагаемых с теми, которые можно получить из общего интеграла для периодического решения

плоской задачи, приводимого Садовским^[14], если ограничиться конечными перемещениями.

6.8. Пользуясь (6.6.2), (6.6.3), (6.6.4), можно найти напряжения по обычным формулам (1.1.2). Опуская промежуточные выкладки, получим:

$$\begin{aligned}
 X_x = & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{e^{mh} - e^{-mh}} \int_0^{2\pi} (\bar{T}_0 + e^{mh} T_0) \sin m(t-x) dt + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m(h-y)}}{e^{mh} - e^{-mh}} \int_0^{2\pi} (T_0 + e^{mh} \bar{T}_0) \sin m(t-x) dt + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{mh [(e^{2hm} - 1)(2my + 3) - 2hme^{2hm}] e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \\
 & + \left. \frac{\{(e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1)(my - 1) + mh] - 2h^2 m^2 e^{2hm}\} e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] J' - \\
 & - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\{(e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1)(my + 1) - mhe^{2hm}] + 2h^2 m^2 e^{2hm}\} e^{my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \\
 & \left. + \frac{hme^{2hm} [(e^{2hm} - 1)(2my - 3) + 2hm] e^{-my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] J', \tag{6.8.1}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 Y_y = & \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{e^{-mh} - e^{my}} \int_0^{2\pi} (\bar{N}_0 + e^{mh} N_0) \cos m(t-x) dt - \\
 & - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m(h-y)}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{2\pi} (N_0 + e^{mh} \bar{N}_0) \cos m(t-x) dt + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{hm [(e^{2hm} - 1)(1 - 2my) + 2hme^{2hm}] e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \\
 & - \left. \frac{m \{(e^{2hm} - 1) [y(e^{2hm} - 1) + h] + 2h^2 me^{2hm}\} e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] J' + \\
 & + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m \{(e^{2hm} - 1) [y(e^{2hm} - 1) - he^{2hm}] - 2h^2 me^{2hm}\} e^{my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \\
 & \left. + \frac{hme^{2hm} [(e^{2hm} - 1)(1 + 2my) + 2hme] e^{-my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] J', \tag{6.8.2}
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 X_y = & \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-my}}{e^{-mh} - e^{mh}} \left[\int_0^{2\pi} (\bar{T}_0 + e^{mh} T_0) \cos m(t-x) dt - \right. \\
 & - \left. \int_0^{2\pi} (\bar{N}_0 + e^{mh} N_0) \sin m(t-x) dt \right] - \\
 & - \frac{1}{2\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-m(h-y)}}{e^{-mh} - e^{mh}} \left[\int_0^{2\pi} (T_0 + e^{mh} \bar{T}_0) \cos m(t-x) dt + \right. \\
 & \left. + \int_0^{2\pi} (N_0 + e^{mh} \bar{N}_0) \sin m(t-x) dt \right] +
 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
& + \frac{1}{2\pi} \left\{ \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{2hm [(e^{2hm} - 1) (2my + 1) - 2hme^{2hm}] e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \right. \\
& \quad \left. \left. - \frac{\{ (e^{2hm} - 1) [(e^{2hm} - 1) (2my - 1) + 2hm] \} e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] \bar{J} + \right. \\
& \quad + \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{\{ (e^{2hm} - 1) [2hme^{2hm} - (e^{2hm} - 1) (2my + 1)] \} e^{my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \\
& \quad \left. + \frac{\{ 2hme^{2hm} [(e^{2hm} - 1) (2my - 1) + 2hm] \} e^{-my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] J \left. \right\}. \quad (6.8.3)
\end{aligned}$$

6.9. В частном случае при $h \rightarrow \infty$ формулы предыдущего параграфа дадут напряжения в полуплоскости ($\bar{T}_0 = \bar{N}_0 = 0$). Опуская промежуточные вычисления, получим:

$$\begin{aligned}
X_x &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (my - 1) e^{-my} \int_0^{2\pi} N_0 \cos m(t - x) dt - \\
& \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} my e^{-my} \int_0^{2\pi} T_0 \sin m(t - x) dt, \quad (6.9.1)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
Y_y &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} my e^{-my} \int_0^{2\pi} T_0 \sin m(t - x) dt - \\
& \quad - \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (my + 1) \int_0^{2\pi} N_0 \cos m(t - x) dt, \quad (6.9.2)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
X_y &= \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (my - 1) e^{-my} \int_0^{2\pi} T_0 \cos m(t - x) dt + \\
& \quad + \frac{1}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} my e^{-my} \int_0^{2\pi} N_0 \sin m(t - x) dt. \quad (6.9.3)
\end{aligned}$$

Если $T_0 = 0$ и $N_0(t)$ — функция четная то

$$X_x = \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (my - 1) e^{-my} \int_0^{\pi} N_0 \cos mt \cos mx dt, \quad (6.9.4)$$

$$Y_y = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} (my + 1) e^{-my} \int_0^{\pi} N_0 \cos mt \cos mx dt, \quad (6.9.5)$$

$$X_y = -\frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} my e^{-my} \int_0^{\pi} N_0 \cos mt \sin mx dt. \quad (6.9.6)$$

Если в формулах (6.9.4), (6.9.5), (6.9.6) перейти к интегралу Фурье, то получатся напряжения при действии на границе полуплоскости уже не периодической, но четной нагрузки $N_0(t)$, которая должна удовлетворять лишь условию абсолютной интегрируемости:

$$\begin{aligned} X_x &= \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-qy} dq (qy - 1) \int_0^{\infty} N_0 \cos qt \cos qx dt, \\ Y_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-qy} dq (qy + 1) \int_0^{\infty} N_0 \cos qt \cos qx dt, \\ X_y &= -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{-qy} dq qy \int_0^{\infty} N_0 \cos qt \sin qx dt. \end{aligned} \tag{6.9.7}$$

Эти формулы совпадают с формулами, приводимыми С. Г. Лехницким^[8], если обозначить

$$\int_0^{\infty} N_0 \cos qt dt = \Psi(v)$$

и заменить q на t .

6.10. В предыдущем при рассмотрении случая периодических граничных условий период принимался равным 2π . При периоде $2l$ в формулах (6.6.2), (6.6.3), (6.6.4), (6.8.1), (6.8.2) и (6.8.3) надо заменить везде m на $m\pi/l$ и множитель $1/\pi$ перед знаком Σ на $1/l$ (ср. с 4.10).

7. Некоторые примеры

7.1. Найдем напряжения в полосе, вызываемые сосредоточенной в начале координат парой с моментом M .

Считая $T_0 = \bar{T}_0 = \bar{N}_0 = 0$, а $N_0(t)$ функцией нечетной, получим, например, для Y_y по формуле (6.8.2):

$$\begin{aligned} Y_y &= \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{mh} e^{-my}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{\pi} N_0 \sin mt \sin mx dt - \\ &- \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-mh} e^{my}}{e^{-mh} - e^{mh}} \int_0^{\pi} N_0 \sin mt \sin mx dt - \\ &- \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} e^{mh} \left[\frac{hm [(e^{2hm} - 1)(1 - 2my) + 2hme^{2hm}] e^{my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} - \right. \\ &- \left. \frac{m \{ (e^{2hm} - 1) [y (e^{2hm} - 1) + h] + 2h^2 m e^{2hm} \} e^{-my}}{(e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] \int_0^{\pi} N_0 \sin mt \sin mx dt + \\ &+ \frac{2}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \left[\frac{m \{ (e^{2hm} - 1) [y (e^{2hm} - 1) - he^{2hm}] - 2h^2 m e^{2hm} \} e^{my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} + \right. \\ &+ \left. \frac{hme^{2hm} [(e^{2hm} - 1)(1 + 2my) + 2hm] e^{-my}}{e^{mh} (e^{-mh} - e^{mh}) [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \right] \int_0^{\pi} N_0 \sin mt \sin mx dt. \end{aligned}$$

Переходя к интегралу Фурье, получим:

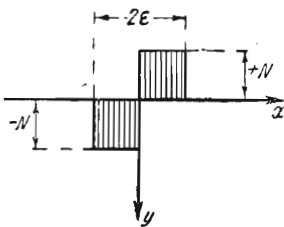
$$\begin{aligned}
 Y_y = & \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{qh} e^{-qy}}{e^{-qh} - e^{qh}} \int_0^{\infty} N_0 \sin qt \sin qx dt dq - \\
 & - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{e^{-qh} e^{qy}}{e^{-qh} - e^{qh}} \int_0^{\infty} N_0 \sin qt \sin qx dt dq - \\
 & - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} e^{qh} \left[\frac{qh [(e^{2qh} - 1) (1 - 2qy) + 2qhe^{2qh}] e^{qy}}{(e^{-qh} - e^{qh}) [(e^{2qh} - 1)^2 - 4h^2 q^2 e^{2qh}]} \right. \\
 & - \left. \frac{q \{ (e^{2qh} - 1) [y (e^{2qh} - 1) + h] + 2h^2 qe^{2qh} \} e^{-qy}}{(e^{-qh} - e^{qh}) [(e^{2qh} - 1)^2 - 4h^2 q^2 e^{2qh}]} \right] \int_0^{\infty} N_0 \sin qt \sin qx dt dq + \\
 & + \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left[\frac{q \{ (e^{2qh} - 1) [y (e^{2qh} - 1) - he^{2qh}] - 2h^2 qe^{2qh} \} e^{qy}}{e^{qh} (e^{-qh} - e^{qh}) [(e^{2qh} - 1)^2 - 4h^2 q^2 e^{2qh}]} \right. \\
 & \left. + \frac{hqe^{2qh} [(e^{2qh} - 1) (1 + 2qy) + 2qh] e^{-qy}}{e^{qh} (e^{-qh} - e^{qh}) [(e^{2qh} - 1)^2 - 4h^2 q^2 e^{2qh}]} \right] \int_0^{\infty} N_0 \sin qt \sin qx dt dq.
 \end{aligned}$$

Здесь $N_0(t)$ является уже непериодической нечетной функцией, удовлетворяющей лишь условию абсолютной интегрируемости.

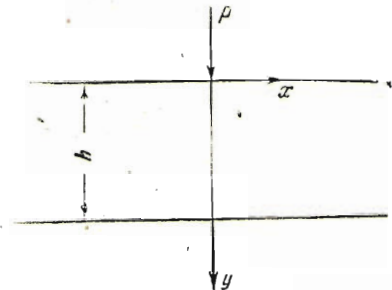
Предположим, что эта функция отлична от нуля только в интервале $(-\epsilon, \epsilon)$, где она имеет постоянную абсолютную величину N , и обозначим буквою M момент $N\epsilon^2$ соответствующей пары.

В предыдущей формуле для Y_y при этом

$$\int_0^{\epsilon} N \sin qt dt = \frac{M}{\epsilon^2} \int_0^{\epsilon} \sin qt dt$$



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Переходя к пределу при $\epsilon \rightarrow 0$, считая при этом, что $N\epsilon^2$ остается постоянным, найдем:

$$\lim_{\epsilon \rightarrow 0} \int_0^{\epsilon} N \sin qt dt = \frac{Mq}{2}.$$

Подставляя это в формулу для Y_y , получим после некоторых элемен-

тарных и опускаемых здесь преобразований, формулу, дающую Y_y при действии на полосу в начале координат сосредоточенного момента M :

$$Y_y = \frac{M}{\pi} \left\{ \int_0^{\infty} \frac{qe^{2qh} [2qh(q(h-y)-1) - (e^{2qh}-1)(qy+1)]}{(e^{2qh}-1)^2 - 4h^2 q^2 e^{2qh}} e^{-qy} + \right. \\ \left. + \int_0^{\infty} \frac{q [2qhc^2qh(q(h-y)+1) - (e^{2qh}-1)(qy-1)]}{(e^{2qh}-1)^2 - 4h^2 q^2 e^{2qh}} e^{qy} \right\} \sin qx \, dq,$$

или

$$Y_y = \frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{2hq^3(h-y)+q}{(e^{qh}-e^{-qh})^2 - 4h^2 q^2} (e^{-qy} + e^{qy}) - \frac{q^2(y-2h)}{(e^{qh}-e^{-qh})^2 - 4h^2 q^2} (e^{qy} - e^{-qy}) - \right. \\ \left. - \frac{qe^{2qh}(1+qy)}{(e^{qh}-e^{-qh})^2 - 4h^2 q^2} e^{-qy} - \frac{qe^{-2qh}(1-qy)}{(e^{qh}-e^{-qh})^2 - 4h^2 q^2} e^{qy} \right\} \sin qx \, dq.$$

Если перейти к пределу при $h \rightarrow \infty$, то получим соответствующее напряжение в полуплоскости ($y > 0$):

$$Y_y = -\frac{M}{\pi} \int_0^{\infty} q(qy+1) e^{-qy} \sin qx \, dq.$$

Выполнив интегрирование, получим:

$$Y_y = -\frac{8M}{\pi} \frac{xy^3}{(x^2+y^2)^3}.$$

Этот результат, что не трудно проверить, совпадает с тем, к которому можно прийти, исходя из функции напряжений:

$$\varphi_1 = \frac{M}{\pi} (\theta + \sin \theta \cos \theta),$$

приводимой С. П. Тимошенко [16].

7.2. Найдем нормальные напряжения на нижней границе полосы, вызываемые сосредоточенной силой P , приложенной в начале координат, в предположении, что касательные напряжения на обеих границах полосы (фиг. 5) равны нулю и вертикальные перемещения нижней границы отсутствуют.

Для решения задачи в формуле (6.6.2) полагаем:

$$v=0, \quad y=h, \quad T_0=0, \quad \bar{T}_0=0,$$

что дает:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{4hm} + 4hme^{2hm} - 1}{m [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \int_0^{2\pi} \bar{N}_0 \cos m(t-x) \, dt = \\ = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2e^{hm} [(e^{2hm} - 1) + hm(e^{2hm} - 1)]}{m [(e^{2hm} - 1)^2 - 4h^2 m^2 e^{2hm}]} \int_0^{2\pi} N_0 \cos m(t-x) \, dt.$$

Деля числитель и знаменатель в каждой дроби на e^{2hm} и переходя к гиперболическим функциям, найдем:

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2 \operatorname{sh} 2mh + 4mh}{m [(2 \operatorname{sh} mh)^2 - 4m^2 h^2]} \int_0^{2\pi} \bar{N}_0 \cos m(t-x) dt = \\ & = - \sum_{m=1}^{\infty} \frac{2(2 \operatorname{sh} mh + 2mh \operatorname{ch} mh)}{m [(2 \operatorname{sh} mh)^2 - 4m^2 h^2]} \int_0^{2\pi} N_0 \cos m(t-x) dt, \end{aligned}$$

или

$$\begin{aligned} & \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \frac{\operatorname{sh} 2mh + mh}{(\operatorname{sh}^2 mh - m^2 h^2)} \left(\cos mx \int_0^{2\pi} \bar{N}_0(t) \cos mt dt + \sin mx \int_0^{2\pi} \bar{N}_0(t) \sin mt dt \right) \right\} = \\ & = - \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \frac{1}{m} \frac{\operatorname{sh} mh + mh \operatorname{ch} mh}{(\operatorname{sh}^2 mh - m^2 h^2)} \left(\cos mx \int_0^{2\pi} N_0(t) \cos mt dt + \sin mx \int_0^{2\pi} N_0(t) \sin mt dt \right) \right\}. \end{aligned}$$

Умножая обе части на $\cos nx$ и почленно интегрируя (напомним, что $N_0(t)$ и $\bar{N}_0(t)$ удовлетворяют условиям разложимости в ряд Фурье), получим, пользуясь тождествами:

$$\int_0^{2\pi} \cos mx \cos nx dx = \begin{cases} 0 & \text{при } m \neq n, \\ \pi & \text{при } m = n, \end{cases} \quad \int_0^{2\pi} \sin mx \cos nx dx = 0,$$

$$\frac{1}{m} \frac{\operatorname{sh} 2nh + nh}{(\operatorname{sh}^2 nh - n^2 h^2)} \pi \int_0^{2\pi} \bar{N}_0(t) \cos nt dt = - \frac{\operatorname{sh} nh + nh \operatorname{ch} nh}{n (\operatorname{sh}^2 nh - n^2 h^2)} \pi \int_0^{2\pi} N_0(t) \cos nt dt.$$

Предыдущее уравнение можно написать в следующем виде:

$$\int_0^{2\pi} \bar{N}_0(t) \cos nt dt = - \frac{\operatorname{sh} nh + nh \operatorname{ch} nh}{\operatorname{sh} nh \operatorname{ch} nh + nh} \int_0^{2\pi} N_0(t) \cos nt dt.$$

Умножая это равенство на $\cos nx$ и суммируя по n , получим:

$$\sum_{m=1}^{\infty} \int_0^{2\pi} \bar{N}_0(t) \cos nt \cos nx dt = - \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{sh} nh + nh \operatorname{ch} nh}{\operatorname{sh} nh \operatorname{ch} nh + nh} \int_0^{2\pi} N_0(t) \cos nt \cos nx dt.$$

Переходя к интегралу Фурье в предположении, что N_0 и \bar{N}_0 являются четными функциями, найдем:

$$\int_0^{\infty} dq \int_0^{\infty} \bar{N}_0(t) \cos qt \cos qx dt = - \int_0^{\infty} dq \frac{\operatorname{sh} qh + qh \operatorname{ch} qh}{\operatorname{sh} qh \operatorname{ch} qh + qh} \int_0^{\infty} N_0(t) \cos qt \cos qx dt, \quad (*)$$

где \bar{N} и N — четные и непериодические функции, удовлетворяющие условию абсолютной интегрируемости.

Полагая, что $N_0(t)$ отлично от нуля лишь на отрезке $(0, \varepsilon)$, где имеет постоянное значение p , и что при $\varepsilon \rightarrow 0$

$$p\varepsilon = \text{const} = \frac{P}{2},$$

будем иметь:

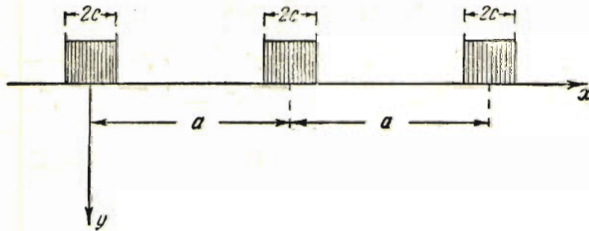
$$\int_0^{\infty} N_0(t) \cos qt \, dt = \lim_{\varepsilon \rightarrow 0} \int_0^{\varepsilon} p \cos qt \, dt = \frac{P}{2}.$$

Замечая, что левая часть (*) равна $\frac{\bar{N}_0(x)\pi}{2}$, найдем окончательно:

$$\bar{N}_0(x) = -\frac{2P}{\pi} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh} qh + qh \operatorname{ch} qh}{\operatorname{sh} 2qh + 2qh} \cos qx \, dq.$$

Этот результат совпадает с тем, к которому приходит совсем иным путем Мелан (Melan)^[9].

7.3. Пусть на границе полуплоскости приложена нагрузка, показанная на фиг. 6.



Фиг. 6.

Период нагрузки равен a , поэтому получим, например, вместо (6.9.4):

$$X_x = \frac{4}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{2m\pi y}{a} - 1 \right) e^{-\frac{2m\pi y}{a}} \int_0^{\frac{a}{2}} N_0 \cos \frac{2m\pi t}{a} \cos \frac{2m\pi x}{a} \, dt.$$

Но

$$\int_0^{\frac{a}{2}} p \cos \frac{2m\pi t}{a} \, dt = \int_0^{\frac{a}{2}} N_0 \cos \frac{2m\pi t}{a} \, dt = \frac{pa}{2m\pi} \sin \frac{2m\pi c}{a},$$

поэтому

$$X_x = \frac{4p}{\pi} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{1}{2m} \left(\frac{2m\pi y}{a} - 1 \right) e^{-\frac{2m\pi y}{a}} \sin \frac{2m\pi c}{a} \cos \frac{2m\pi x}{a},$$

или, заменяя $2m$ на n и вводя обозначения:

$$\frac{\pi y}{a} = \eta, \quad \frac{\pi x}{a} = \xi, \quad \frac{\pi c}{a} = \gamma,$$

получим для X_x и аналогично для Y_y и X_y :

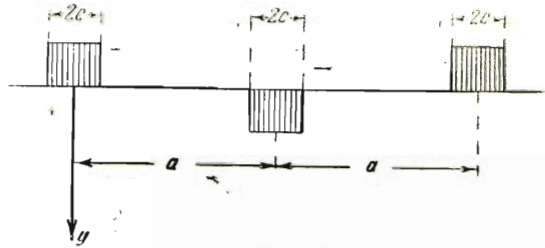
$$X_x = -\frac{4p}{\pi} \sum_n^{\infty} \frac{1}{n} (1 - n\eta) e^{-n\eta} \sin n\gamma \cos n\xi,$$

$$Y_y = -\frac{4p}{\pi} \sum_n^{\infty} \frac{1}{n} (1 + n\eta) e^{-n\eta} \sin n\gamma \cos n\xi \quad (n=2, 4, 6, \dots),$$

$$X_y = -\frac{4p\eta}{\pi} \sum_n^{\infty} e^{-n\eta} \sin n\gamma \sin n\xi.$$

7.4. На границе полуплоскости приложена нагрузка, показанная на фиг. 7. Период нагрузки равен $2a$, поэтому получим, например, вместо (6.9.4):

$$X_x = \frac{2}{a} \sum_{m=1}^{\infty} \left(\frac{m\pi y}{a} - 1 \right) e^{-\frac{m\pi y}{a}} \int_0^a N_0 \cos \frac{m\pi t}{a} \cos \frac{m\pi x}{a} dt.$$



Фиг. 7.

Но

$$\int_0^a N_0 \cos \frac{m\pi t}{a} dt = \int_0^c p \cos \frac{m\pi t}{a} dt - \int_{a-c}^a p \cos \frac{m\pi t}{a} dt = \begin{cases} \frac{2pa}{m\pi} \sin \frac{m\pi c}{a} & \text{при } m=1, 3, 5, \dots, \\ 0 & \text{при } m=2, 4, 6, \dots, \end{cases}$$

поэтому, при прежних значениях η , ξ , γ и полагая $m=n$, получим для X_x и аналогично для Y_y , X_y :

$$X_x = -\frac{4p}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} (1 - n\eta) e^{-n\eta} \sin n\gamma \cos n\xi,$$

$$Y_y = -\frac{4p}{\pi} \sum_n \frac{1}{n} (1 + n\eta) e^{-n\eta} \sin n\gamma \cos n\xi \quad (n=1, 3, 5, \dots),$$

$$X_y = -\frac{4p\eta}{\pi} \sum_n e^{-n\eta} \sin n\gamma \sin n\xi.$$

(Сравни Надаи^[11], где дан другой метод решения.)

7.5. Если к границе полуплоскости приложена четная, но не периодическая нагрузка $N_0(x)$, то, переходя к интегралу Фурье, получим вместо (6.9.4), (6.9.5), (6.9.6):

$$X_x = -\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} (1 - qy) e^{-qy} \int_0^{\infty} N_0(t) \cos qt \cos qx dt dq,$$

или, полагая

$$\frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} N_0(t) \cos qt dt = A(q),$$

имеем:

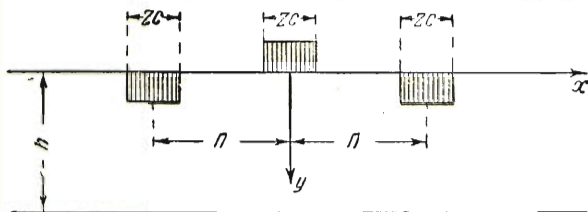
$$X_x = - \int_0^{\infty} A(1 - qy) e^{-qy} \cos qx dq,$$

$$Y_y = - \int_0^{\infty} A(1 + qy) e^{-qy} \cos qx dq,$$

$$X_y = -y \int_0^{\infty} Aq e^{-qy} \sin qx dy.$$

Эти формулы совпадают с теми, к которым приходит иным путем Надаи^[11]. К тому же результату приходит другим путем и С. Г. Лехницкий^[8].

7.6. На верхней границе полосы приложена показанная на фиг. 8 периодическая нагрузка. Касательные напряжения поверху равны нулю. Нижняя граница полосы свободна от напряжений. Найдем, например, Y_y .



Фиг. 8.

Для этого, пользуясь формулой (6.8.2), надо положить:

$$T_0 = \bar{T}_0 = \bar{N}_0 = 0.$$

Вследствие четности нагрузки:

$$\int_0^{2\pi} N_0 \cos mt \, dt = 2N_0 \int_0^{\pi} \cos mt \, dt = 2p \int_0^c \cos mt \, dt - 2p \int_{\pi-c}^{\pi} \cos mt \, dt =$$

$$= \begin{cases} \frac{4p}{m} \sin mc & \text{при } m \text{ нечетном,} \\ 0 & \text{при } m \text{ четном.} \end{cases}$$

Если это подставить в формулу (6.8.2) и перейти к гиперболическим функциям, то получим:

$$Y_y = \sum_{1, 3, \dots}^{\infty} \frac{4p \cos mx \sin mc}{\pi m (\operatorname{sh}^2 mh - m^2 h^2)} \times$$

$$\times \{ m^2 h (h - y) \operatorname{ch} my + mh \operatorname{sh} my + \operatorname{sh} mh \operatorname{sh} [m(y - h)] - my \operatorname{sh} mh \operatorname{ch} [m(y - h)] \}.$$

Если период нагрузки не 2π , но $2a$, то, согласно (4.10), найдем:

$$Y_y = \sum_{1, 3, \dots}^{\infty} \frac{4p \cos \frac{m\pi x}{a} \sin \frac{m\pi c}{a}}{m\pi \left(\operatorname{sh}^2 \frac{m\pi h}{a} - \left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 \right)} \times$$

$$\times \left\{ \left[\left(\frac{m\pi h}{a} \right)^2 - \frac{m\pi h}{a} \frac{m\pi y}{a} \right] \operatorname{ch} \frac{m\pi y}{a} + \frac{m\pi h}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi y}{a} + \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{a} \operatorname{sh} \left(\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi h}{a} \right) - \right.$$

$$\left. - \frac{m\pi y}{a} \operatorname{sh} \frac{m\pi h}{a} \operatorname{ch} \left(\frac{m\pi y}{a} - \frac{m\pi h}{a} \right) \right\}.$$

Этот результат тождествен с получаемым, исходя из функции напряжений, приводимой в диссертации Риделя^[13].

7.7. Пусть на верхней и нижней границах полосы приложена синусоидальная нагрузка; касательные напряжения на границах равны нулю, т. е.

$$N_0 = B \sin kx; \quad \bar{N}_0 = -B \sin kx; \quad T_0 = \bar{T}_0 = 0.$$

Для нахождения, например, Y_y надо в формуле (6.8.2) отбросить знак суммирования и вместо m писать k .

Вследствие нечетности N_0 и \bar{N}_0

$$\int_0^{2\pi} N_0 \cos k(t-x) dt = 2 \int_0^{\pi} B \sin^2 kt \sin kx dt = \pi B \sin kx,$$

$$\int_0^{2\pi} \bar{N}_0 \cos k(t-x) dt = -2 \int_0^{\pi} B \sin^2 kt \sin kx dt = -\pi B \sin kx.$$

Подставляя это в формулу (6.8.2), получим, опуская промежуточные вычисления и переходя к гиперболическим функциям:

$$Y_y = - \frac{(1 - \operatorname{ch} kh - ky \operatorname{sh} kh) \operatorname{sh} ky + [kh + \operatorname{sh} kh + ky (\operatorname{ch} kh - 1)] \operatorname{ch} ky}{\operatorname{sh} kh + kh} \cdot B \sin kx.$$

Этот результат совпадает с тем, который можно получить из формулы, приводимой С. П. Тимошенко^[16], если в этой последней формуле положить

$$A = B, \quad c = h/2$$

и заменить y на $y - h/2$.

Поступила в редакцию 7 III 1940.

ЛИТЕРАТУРА

1. Cesaro. Elasticità. [P. 120].
2. Lamé et Clapeyron. Journal für Mathematik (Crelle), 7 (1831). [P. 155]. Paris. Mémoires présentés par divers savants, 4 (1833). [P. 472].
3. Dougall. Trans. Roy. Soc. Edinburgh. Vol. 41. 1904.
4. Гурса. Курс математического анализа. 1933. Т. III. Ч. 1. [Стр. 189].
5. Гильман Л. С. К вопросу об определении напряжений на поверхности упругой среды, ограниченной плоскостью, при заданных на поверхности перемещениях. „Труды Института инженеров промышленного строительства“. Ленинград. 1934. Вып. 1.
6. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. ОНТИ. 1935. [Стр. 185].
7. Love. Proceedings of the Royal Society. London. 1902. Vol. 34.
8. Лехницкий С. Г. Прикладная математика и механика. 1933. Т. I. Вып. 2. [Стр. 285].
9. Melan. Die Druckverteilung durch eine elastische Schicht. „Beton und Eisen“. 1919. S. 83.
10. Мусхелишвили. Некоторые задачи теории упругости. 1935. 2 изд. [Стр. 90].
11. Nádai. Die elastischen Platten. Berlin. 1925. S. 226.
12. Osgood. Lehrbuch der Funktionentheorie. Leipzig. 1912.
13. Riedel. Beiträge zur Lösung des ebenen Problems. „Zeitschr. f. ang. Math. u. Mech.“ 1927. S. 177.
14. Sadowsky. Zweidimensionale Probleme der Elastizitätstheorie. „Zeitschr. für angewandte Mathematik und Mechanik“. 1928. S. 107.
15. Tedone. a) Enc. der Mathem. Wissensch. Bd. IV. Teilband IV. S. 101.
b) Annali di Mat. 1904. Т. X.
16. Тимошенко С. П. Теория упругости. ОНТИ, 1934. [Стр. 58, 100].
17. Янчевский. Функции комплексного переменного. Ленинград. 1934. [Стр. 72].

SUR LE PROBLÈME À DEUX DIMENSIONS DE LA THÉORIE D'ÉLASTICITÉ POUR UNE BANDE INDÉFINIE

B. A. BERG

(Résumé)

Nous traitons dans cet ouvrage le problème à deux dimensions pour une bande infinie comprise entre deux droites parallèles, en négligeant les forces massiques et en supposant donnés, sur ces droites, les déplacements (problème I) ou les efforts (problème II).

La solution du problème analogue dans l'espace à trois dimensions pour un solide indéfini compris entre deux plans parallèles est due à Tedone^[15] et Dougall^[3]; ce problème à trois dimensions fut aussi considéré par Love^[7]

Les solutions de quelques cas particuliers du problème à deux dimensions, qui fait l'objet de cet ouvrage, furent obtenues par divers auteurs, principalement à l'aide de la fonction d'Airy, qu'ils déterminaient de manière qu'elle satisfît aux conditions spéciales aux limites. Quelques-unes de ces solutions, citées dans cet ouvrage, y sont retrouvées moyennant les formules générales que nous établissons.

La méthode, que nous suivons, ne diffère pas de celle développée par Tedone^[15] pour le problème à trois dimensions, et les formules (3.1.6) et (5.3.3), que nous obtenons, correspondent respectivement aux formules analogues de Tedone. La méthode est fondée sur la remarque que les équations de l'équilibre

$$\Delta u + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial x} = 0, \quad \Delta v + \frac{\lambda + \mu}{\mu} \frac{\partial \theta}{\partial y} = 0, \quad (\alpha)$$

lorsque l'on néglige les forces massiques, peuvent être mises sous la forme suivante:

$$\Delta \left(u + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x\theta \right) = 0, \quad \Delta \left(v + \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y\theta \right) = 0,$$

d'où il résulte que les fonctions entre parenthèses sont harmoniques. En appliquant à ces fonctions le théorème de Green on trouve:

$$\begin{aligned} u &= U - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} x\theta + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \int_L \zeta \theta \frac{dG}{dn} dl, \\ v &= V - \frac{\lambda + \mu}{2\mu} y\theta + \frac{\lambda + \mu}{4\pi\mu} \int_L \eta \theta \frac{dG}{dn} dl; \end{aligned} \quad (*)$$

U et V désignent ici les fonctions harmoniques dans la bande considérée, prenant les valeurs données u_0 , v_0 sur son contour; G est la fonction de Green pour la bande; $\int_L = \int_{l_1} + \int_{l_2}$, c'est-à-dire \int_L désigne la somme des intégrales prises le long des deux droites qui limitent la bande; ξ et $\eta = 0$ ou $\eta = h$ sont les coordonnées courantes des points de ces deux droites; x et y sont les coordonnées du point dont les déplacements les formules (*) déterminent.

Ces formules fournissent la solution du problème I, où les déplacements sur le contour sont donnés, si l'on trouve la dilatation θ , vérifiant l'identité

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y};$$

θ étant une fonction harmonique (si l'on néglige les forces massiques); il suffit que cette identité soit vérifiée sur les droites qui limitent la bande. On peut remarquer que l'idée de supposer provisoirement la dilatation θ connue et de la déduire ensuite d'une identité remonte à Lamé, Clapeyron^[2] et, plus tard, à Cesaro^[1].

La solution du problème II peut être obtenue par un procédé analogue: en effet, dérivant les équations (α) par rapport à y et en rapprochant le résultat des équations (α), on voit que pour du/dy et dv/dy on peut écrire les formules analogues à celles établies pour u et v , si l'on remplace dans ces dernières u , v , θ respectivement par $\partial u/\partial y$, $\partial v/\partial y$, $\partial \theta/\partial y$ et U et V par les fonctions harmoniques prenant sur l_1 et l_2 les valeurs $\partial u/\partial \eta$ et $\partial v/\partial \eta$ qui dépendent des efforts donnés sur le contour (5.1.2). On trouve ensuite u et v par une quadrature.

Pour illustrer la méthode, nous appliquons les solutions des problèmes I et II au cas particulier, où les déplacements et les efforts donnés sur le contour de la bande sont les fonctions développables en série de Fourier. En effectuant un passage à la limite, admettant que la largeur de la bande tende vers l'infini, on obtient les formules pour les déplacements et les efforts dans un demi-plan.

Dans le dernier chapitre nous donnons quelques applications des formules obtenues.