ПИСЬМО В РЕДАКЦИЮ

Л. Г. Афендик

В журнале „Прикладная математика и механика", т. I, вып. 4, 1938 г., стр. 557, была напечатана моя заметка „Оценка погрешности при численном интегрировании по способу Штермера". По поводу этой работы в том же журнале, т. III, вып. 2, появилась заметка Н. С. Самойловой-Яхонтовой. Автор этой статьи, наряду с некоторыми правильными замечаниями, дала, вообще говоря, неправильную оценку результатов, полученных в указанных работах, и, кроме того, исходила из заключений, которых я в своей заметке не делал. Поэтому считаю нужным вкратце остановиться на результатах, полученных как в той, так и в другой работе.

В моей заметке определена ошибка, которая получается при вычислении второй разности $\Delta^2 y_{n-1}$ по формуле Штермера, когда численно интегрируется дифференциальное уравнение:

$$\frac{d^2y}{dx^2} = f(x, y). \tag{1}$$

Затем дано приближенное выражение этой ошибки через разности и приведена формула [(15), стр. 560] для определения суммарной ошибки при интегрировании уравнения (1) в том случае, если его правая часть не содержит неизвестной функции

$$\varepsilon(x_i) = iR_{1k} + (i-1)R_{2k} + \ldots + R_{ik}. \tag{15}$$

Далее показано, как использовать разности, находящиеся в таблице вычислений для приближенной оценки суммарной ошибки.

В статье Н. С. Самойловой-Яхонтовой было отмечено, что формула (15) моей заметки не верна в том случае, когда правая часть уравнения (1) зависит от y, так как эта формула не учитывает ошибок в значениях функции $\eta = h^2 f(x, y)$. Последние же ошибки, в свою очередь, „косвенно" влияют на погрешность при вычислении функции y. Н. С. Самойлова-Яхонтова определила ошибку, получаемую от этого „косвенного" влияния, и вывела приближенную формулу для оценки суммарной погрешности интегрирования для того случая, когда правая часть уравнения (1) содержит y (форм. 19, стр. 146).

В вышеупомянутой моей заметке в качестве примера было рассмотрено интегрирование по Штермеру уравнения $d^2\varphi / dt^2 = -\varphi$. При этом суммарная ошибка интегрирования для φ_5 была определена по ранее указанной формуле (15) при помощи использования разностей таблицы и оказалась лишь незначительно отличной от действительной ошибки.

Н. С. Самойлова-Яхонтова в своей работе (стр. 148) пишет, что я на основании приведенного примера сделал заключение о том, что формула (15) вообще хорошо определяет погрешность. Со своей стороны, она полагает, что ни эта формула, ни ее формула (19) не могут обеспечить надежного определения ошибки при интегрировании по Штермеру уравнения (1).

Отсюда читатель может сделать вывод, что приведенные формулы лишены какого-либо практического значения. Однако дело обстоит не так.

Во-первых, в моей заметке не говорится о хороших и универсальных качествах формулы (15).

Во-вторых, указанные формулы, несмотря на их приближенность, имеют, однако, весьма существенное практическое значение. В самом деле, при численном интегрировании бывает важно оценить, хотя бы и грубо, величину получаемой при интегрировании ошибки. Несомненно, что формула (15) пригодна для этой цели в том случае, когда правая часть уравнения (1) не зависит от y. Эта же формула может дать не плохие результаты даже в том случае, если правая часть (1) содержит y, лишь бы функция $\eta = h^2 f(x,y)$ на рассматриваемом участке интегрирования была монотонной (что и видно из разобранного примера). Для более общего случая уравнения (1) о величине ошибки интегрирования можно судить на основании формулы (19), приведенной Н. С. Самойловой-Яхонтовой.

Попутно отмечу, что мнение Н. С. Самойловой-Яхонтовой о том, что интегрировать по способу Штермера уравнение вида $d^2 y / dx^2 = f(x)$ не имеет смысла (стр. 145), нельзя считать правильным. Функция $f(x)$ может быть такого вида, что интегрирование придется выполнять приближенно. Для этой цели метод Штермера пригоден не в меньшей мере, чем какой-либо другой метод приближенного интегрирования.

Практически очень часто важно получить хотя бы лишь приближенную оценку относительной ошибки. Только на основании этой оценки можно выбрать необходимое число значащих цифр в таблице вычислений, а также установить необходимую величину интервала $x_i - x_{i-1}$ при интегрировании. Указанные формулы (моя и Н. С. Самойловой-Яхонтовой) могут быть с успехом использованы для этой цели.

Получено в редакции
6 VII 1940