АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 4. 1940

ИНСТРУМЕНТ ДЛЯ ВЫЧЕРЧИВАНИЯ ЦИРКУЛЯРНЫХ КРИВЫХ ТРЕТЬЕГО ПОРЯДКА С ДВОЙНОЙ ТОЧКОЙ

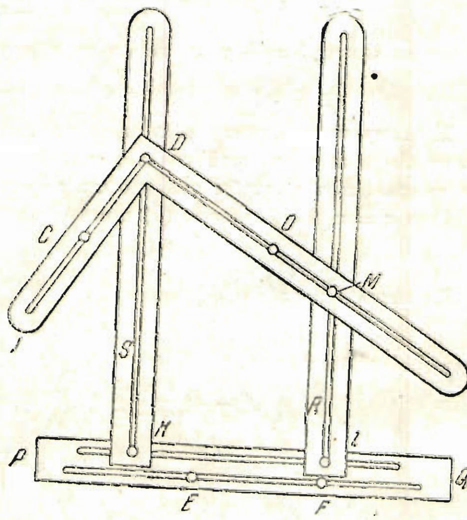
Н. А. НИКУЛИН

(Уральск)

1. На фиг. 1 представлена схема инструмента, дающего возможность вычерчивать некоторые кривые третьего порядка.

К линейке с двумя параллельными прорезами kl и EF прикрепляют две линейки S и R, имеющие посредине прорезы, перпендикулярные к прорезам первой. Расстояние kl между прорезами этих линеек может быть изменено.

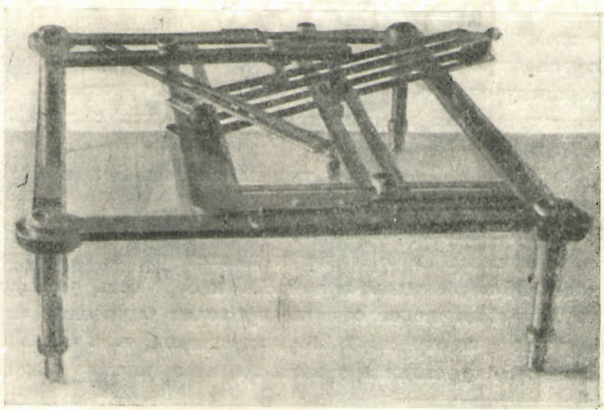
Линейка DL вращается на шарнире D и может быть расположена под любым углом к линейке DN. В вершине $\angle LDN$ закреплен шип, который находится в прорезе линейки S. В плоскости инструмента (или в параллельной плоскости) в двух произвольных точках E и F и двух определенных точках C и O, выбор которых определяется вычерчиваемой кривой, укрепляются цилиндрические стержни.



Фиг. 1.

В точке M находится пишущий штифт, который при вращении линейки DN перемещается одновременно по прорезу линейки R и DN.

Остальные детали легко усмотреть на фотографии (фиг. 2). Так, линейка DL продолжена по другую сторону от точки D, видна конструкция линейки DN, которая сделана двойной, причем пишущий штифт находится в нижнем прорезе, а стержень O — в верхнем прорезе. Кроме того, для большей устойчивости свободные концы линеек S и R скреплены при помощи нажимных винтов линейкой, имеющей также посредине прорез и снабженной роликами, которые придают инструменту большую подвижность.


Фиг. 2

2. Перейдем теперь к рассмотрению кривых, которые могут быть начерчены при помощи этого инструмента.

Пусть линейки DL и DN закреплены так, что $\angle LDN = \alpha$ и, кроме того, $\overline{kl} = a$, $\overline{CO} = m$.

Из подобия треугольников DkO и MlO (фиг. 3) имеем:

$$\frac{\overline{Dk}}{\overline{Ok}} = \frac{\overline{Ml}}{\overline{Ol}}. \qquad (1)$$

Приняв далее CO за ось x, а OY за ось y прямоугольной системы координат и замечая, что

$$\overline{Ol} = x, \qquad \overline{Ml} = y, \qquad \overline{Dk} = \overline{Gk} \operatorname{tg} \gamma = -(m + x - a) \operatorname{tg}(\alpha + \beta),$$

из равенства (1) получим:

$$\frac{m + x - a}{a - x} \operatorname{tg}(\alpha + \beta) = \frac{y}{x},$$

или

$$\frac{m + x - a}{a - x} \frac{\operatorname{tg}\alpha + \operatorname{tg}\beta}{1 - \operatorname{tg}\alpha \operatorname{tg}\beta} = \frac{y}{x};$$

откуда (так как $\operatorname{tg}\beta = -y/x$) легко найдем уравнение вычерчиваемой кривой:

$$x(x^2 + y^2) + (m - a)x^2 - xym \operatorname{ctg}\alpha - ay^2 = 0. \qquad (2)$$

К этому виду может быть преобразовано уравнение любой циркулярной кривой третьего порядка с двойной точкой, если начало координат перенести в двойную точку, а оси направить так, чтобы ось y была параллельна вещественной асимптоте кривой [1].

При $\alpha = \pi/2$ уравнение (2) примет вид:

$$x(x^2 + y^2) + (m - a)x^2 - ay^2 = 0. \qquad (3)$$

Полагая в последнем уравнении

$$m = 2a, \qquad m = a, \qquad m = 4a,$$

получим соответственно:

$$y^2 = x^2 \frac{a + x}{a - x} \quad \text{(строфоида)},$$

$$y^2 = \frac{x^3}{a - x} \quad \text{(циссоида Диоклеса)},$$

$$y^2 = x^2 \frac{3a + x}{a - x} \quad \text{(трисектрисса Маклорена)}.$$

3. Основанием предложенного способа служат принадлежащие Ньютону теоремы:

1) Если два постоянные угла $\varphi = \angle dbh$ и $\psi = \angle dah$ вращаются около их вершин b и a так, что точка h, т. е. пересечение их сторон bh и ah, перемещается по коническому сечению, то точка d встречи двух других сторон bd и ad будет описывать уникурсальную кривую четвертого порядка. 2) Если коническое сечение проходит через вершину одного из этих углов, например через a, то геометрическое место точек d будет уникурсальная кривая третьего порядка с двойной точкой в вершине второго угла, т. е. в a.

Содержание этих теорем заключается в более общих известных предложениях проективной геометрии.

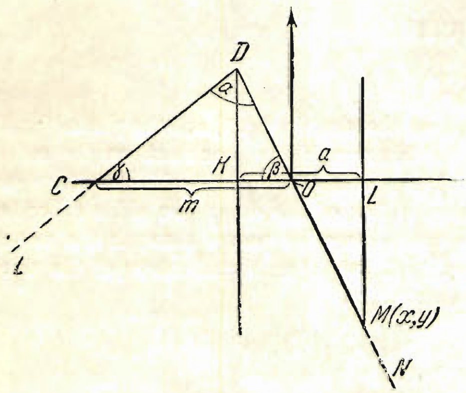
1) Если пучок SN проективен пучку SM, а пучок S_1N проективен S_1M и, кроме того, лучи SN и S_1N пересекаются на коническом сечении, то геометрическое место точек M пересечения лучей SM и S_1M есть уникурсальная кривая четвертого порядка. 2) Если коническое сечение проходит через один из центров указанных пучков, например через центр двух первых пучков, т. е. через S, то геометрическое место точек M будет уникурсальная кривая третьего порядка с двойной точкой в S.

---

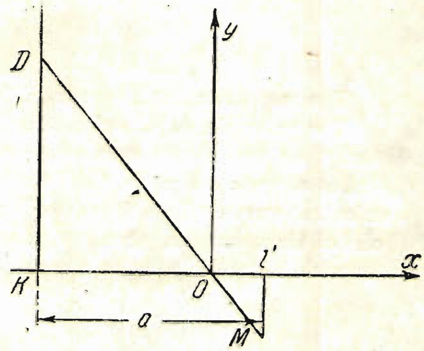
[1] Доказательство можно найти в книге Дыдырко [1].

В частном случае, когда соответственные лучи проективных пучков образуют постоянный угол, из этих теорем вытекают теоремы Ньютона; при этом специальный случай, когда пучки с центром на коническом сечении[1] тождественны (следовательно, их соответственные лучи сливаются), а два другие проективные пучка конгруентны и имеют центр в бесконечно удаленной точке, следует рассматривать как обоснование предложенного нами инструмента.

Если поместить плоскость инструмента под некоторым углом β к плоскости чертежа и установить пишущий штифт перпендикулярно к той же плоскости (что технически возможно), то в этом случае вычерчиваемые кривые будут проекциями на плоскости чер-



Фиг. 3.



Фиг. 4.

тежа рассмотренных выше кривых. Обозначая через X, Y координаты точек проекции и заменяя в уравнении (2) x и y по формулам:

$$x = X, \qquad y = Y / \cos\beta,$$

получим уравнение кривой третьего порядка несколько более общего вида:

$$X(X^2\cos^2\beta + Y^2) + (m-a)X^2\cos^2\beta - XYm\operatorname{ctg}\alpha\cos\beta - aY^2 = 0. \tag{4}$$

При

$$\alpha = \frac{\pi}{2}, \qquad \beta = \arccos\frac{1}{\sqrt{3}}, \qquad m = \frac{4a_1}{\sqrt{2}} \quad (a_1 = 0), \qquad a = \frac{a_1}{\sqrt{2}},$$

из уравнения (4) получается уравнение листа Декарта:

$$\sqrt{2}\,x^3 + 3\sqrt{2}\,xy^2 + 3a_1x^2 - 3a_1y^2 = 0. \tag{5}$$

Обычный вид уравнения этой кривой $x^3 - 3a_1xy + y^3 = 0$ легко получить из (5) поворотом осей координат на угол $5\pi/4$.

4. Заметим, что этот инструмент можно легко приспособить для вычерчивания гиперболы. Для этой цели достаточно закрепить в определенной точке прореза линейки S шип D и удалить стержень, помещенный в точке C и находящийся в прорезе линейки DL (фиг. 1). Тогда при перемещении точка D будет все время находиться на прямой, параллельной kl, а точка M — на гиперболе (фиг. 4).

В самом деле, из подобия прямоугольных треугольников $Dk'O$ и $Ml'O$:

$$\frac{y}{x} = \frac{b}{a-x} \qquad \text{или} \qquad xy = ay - bx.$$

Поступила в редакцию 20 IV 1940.

[1] В случае циркулярной кривой с двойной точкой коническим сечением служит окружность, проходящая через центр тождественных пучков, т. е. через двойную точку кривой.

ЛИТЕРАТУРА

Дыдырко В. К. Циркулярные кривые 3-го порядка. Отдельный оттиск из журнала Працы БДУ. Минск. 1928. № 17-18. Гл. I. §§ 22, 23.

Ньютон Исаак. Математические работы. Русский перевод с латинского Д. Д. Мордухай-Болтовского. Москва. 1937. Стр. 206—208.

AN INSTRUMENT FOR DRAWING A CURVE OF THE THIRD ORDER WITH A DOUBLE POINT

N. A. NIKOULIN

(Summary)

The instrument as constructed is represented in the sketch (fig. 1) and the photo (fig. 2).

The principle employed is based on Newton's theorem: if two constant angles rotate around their vertices in such a way that the point of intersection of two sides of the angles describes a conical section, then the point of intersection of the other two sides describes a unicursal curve of the fourth order; and if the conical section passes through the vertex of one of these angles, then the curve described will be a unicursal curve of the third order with a double point in the vertex of the other angle.