А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ | **INSTITUTE OF MECHANICS**

ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА" | **JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS**

Т. IV, в. 4, 1940

ЗАМЕТКИ

НЕКОТОРЫЕ СВОЙСТВА ФУНКЦИЙ ГРИНА ДЛЯ ПРОСТРАНСТВА С ПЛОСКОЙ ГРАНИЦЕЙ

М. Я. ЛЕОНОВ

(Днепропетровск)

Назовем областью D_S все трехмерное пространство, за исключением области S плоскости $z=0$. Пусть Г и Н — соответствующие функции Грина и Неймана.

Введем функции Γ_S и H_S такие, что

$$\Gamma=\frac{1}{2r}-\frac{1}{2r_1}+\Gamma_S, \qquad H=\frac{1}{2r}+\frac{1}{2r_1}+H_S, \tag{1}$$

где

$$r^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z-\zeta)^2, \qquad r_1{}^2=(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+(z+\zeta)^2.$$

Функции Γ_S и H_S — гармонические в области D_S, за исключением точек, в которых $r=0$, $r_1=0$, причем на границе S

$$\Gamma_S=0, \qquad \frac{\partial H}{\partial z}=0. \tag{2}$$

В физической интерпретации функция $2\Gamma_S$ представляет потенциал двух точечных единичных масс, симметрично расположенных относительно поверхности S, на которой поддерживается нулевой потенциал; функция H_S представляет потенциал скорости потока, обтекающего некоторую пластинку, причем источник и сток находятся в двух симметричных точках.

Пусть некоторая кривая делит всю бесконечную плоскость $z=0$ на две области: внутреннюю область g и внешнюю область G.

Если в области G расположена электропроводящая плоскость, а на поверхности g расположены электрические массы плотностью ρ, то потенциал силы притяжения этих и индуцированных масс, согласно определению функции Γ_G, будет:

$$U_1=\iint\limits_g \Gamma_G\rho(\xi,\eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{3}$$

причем в области g, по формуле Пуассона, будет:

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial z}\right|_{z=+0}=-2\pi\rho. \tag{4}$$

Решая задачу Неймана для случая, когда

$$\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=+0}=\left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=-0}=f(x,y)$$

является функцией, заданной на поверхности g, получим:

$$U = -\frac{1}{2\pi}\iint_g \mathrm{H}_g(x, y, z, \xi, \eta, +0) f(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta. \tag{5}$$

Очевидно, что функция U равна нулю в области G вследствие ее нечетности и непрерывности. Из (4) и (5) можно заключить, что если

$$\left.\frac{\partial U_1}{\partial z}\right|_{z=+0} = \left.\frac{\partial U}{\partial z}\right|_{z=+0},$$

то

$$U_1 = U$$

при $z > 0$, а также

$$\mathrm{H}_g = \pm\Gamma_G, \qquad \mathrm{H}_G = \pm\Gamma_g, \tag{6}$$

где надо брать первый знак $+$, когда z и ζ одного знака, и обратный знак — в противном случае.

Из формул (1) и (6) видно, что задачи Дирихле и Неймана для области D_g легко сводятся к задачам Неймана и Дирихле для области D_G, что имеет некоторую аналогию с плоской задачей.

Поступила в редакцию 15 IV 1940.

PROPERTIES OF GREENE'S SPACIAL FUNCTIONS

M. J. LEONOV

(Summary)

Given a curve dividing the infinite plane $z=0$ into an internal domain g and an external domain G.

Let us denote the corresponding three-dimensional domains by D_g and D_G excluding the points of domains g and G.

The article proves that Greene's and Neumann's functions for the domain D_G can be expressed quite simply in terms of Green's and Neumann's functions for domain D_g.