

## СОСТАВНЫЕ СТЕРЖНИ НА УПРУГО-ПОДАТЛИВЫХ СВЯЗЯХ

А. Р. РЖАНИЦЫН

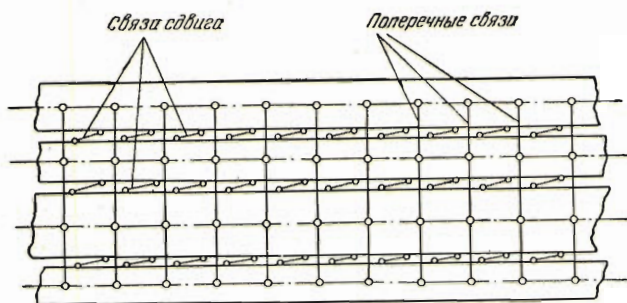
(Москва)

Составным стержнем мы называем несколько монолитных стержней, соединенных между собой по всей их длине податливыми или жесткими связями.

Можно различать плоские составные стержни, работа которых легко сводится к силам и перемещениям, действующим и происходящим в одной плоскости, и пространственные составные стержни. Здесь рассматривается только плоская задача составного стержня.

Каждый входящий в составной стержень отдельный монолитный стержень считается подчиняющимся обычным законам сопротивления материалов, в частности закону плоских сечений. Напряженное состояние внутри каждого стержня поэтому вполне определяется величинами моментов и нормальных и поперечных сил, заданными для каждого сечения.

Промежуток между отдельными стержнями, в котором располагаются связи, соединяющие стержни, мы будем называть швом. Шов может иметь иногда довольно значительную ширину, однако в нем всегда можно различать некоторую плоскость, разделяющую один составляющий стержень от другого.



Фиг. 1.

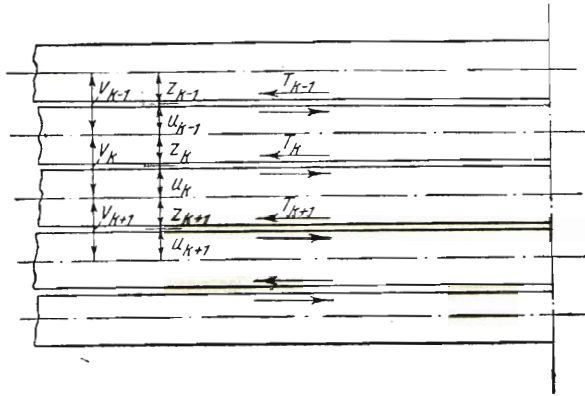
Поскольку сечения составляющих стержней могут иметь любую форму, мы всегда можем считать, что сечения имеют очень тонкие отростки, доходящие до разделяющей плоскости шва, и тогда стержень может считаться сплошным составным стержнем, от которого таким образом принципиально не отличается любой составной стержень.

Связи, соединяющие отдельные стержни, могут быть как непрерывными, распределенными по длине шва, так и дискретными, сосредоточенными в отдельных точках длины стержня. В настоящей работе рассматривается именно такой случай непрерывного равномерного распределения связей по длине стержня.

По своему назначению связи в составном стержне могут быть разделены на два вида: 1) связи сдвига, воспринимающие сдвигающие усилия, которые возникают в швах составного стержня, и 2) поперечные связи, препятствующие отрыву или прижатию друг к другу отдельных стержней, входящих в составной стержень (фиг. 1). Следует строго различать эти два вида связей, несмотря на то, что конструктивно они могут совмещаться в одних и тех же элементах (например, в болтах).

В первом приближении задачу о составном стержне мы решаем в предположении об абсолютной жесткости поперечных связей. Опыт показывает, что такое предположение вносит лишь незначительную погрешность в величины напряжений в связях сдвига и продольных напряжений в самих стержнях, а также в определение деформаций составного стержня. Значительную неточность это упрощение дает лишь для усилий в поперечных связях, что во многих практических случаях не имеет особого значения.

Во втором варианте задача решается точно, т. е. с учетом податливости и связей сдвига и поперечных связей.



Фиг. 2.

Для определения напряженного состояния нагруженного составного стержня с абсолютно жесткими поперечными связями отбрасываем все связи сдвига, заменяя их действующими в них усилиями. Полученная таким образом основная система статически определима и легко решается обычными методами.

В качестве „лишних“ неизвестных примем значения суммарных сдвигающих усилий  $T_i$  в каждом шве, заменяющих действие отброшенных связей сдвига на промежутке от начальной точки длины стержня до рассматриваемого сечения (фиг. 2).

Приращение сдвига смежных волокон соседних стержней на длине  $dx$  равно разности удлинений этих волокон. Суммируя влияние неизвестных

усилий  $T_i$  и внешней нагрузки, действующей на основную систему, получим выражение для производной от сдвига по длине в  $k$ -ом шве:

$$\frac{d\delta_k}{dx} = \sum_{i=1}^n \Delta_{ki} T_i + \Delta_{k0} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (1)$$

Здесь  $k$  и  $i$  — порядковые номера швов,  $n$  — число швов,  $\Delta_{k0}$  и  $\Delta_{ki}$  — приращение сдвига в  $k$ -ом шве основной системы от внешней нагрузки и от единичных усилий  $T_i=1$ , действующих в  $i$ -ом шве ( $i=1, 2, \dots, n$ ), которые определяются по следующим формулам:

$$\begin{aligned} \Delta_{kk} &= \frac{1}{F_k E_k} + \frac{1}{F_{k+1} E_{k+1}} + \frac{v_k^2}{\sum_{i=1}^n E_i J_i}, & \Delta_{kl} &= \frac{v_k v_l}{\sum_{i=1}^n E_i J_i} \quad (\text{при } |l-k| > 1), \\ \Delta_{k1, k-1} &= -\frac{1}{F_k E_k} + \frac{v_k v_{k-1}}{\sum_{i=1}^n E_i J_i}, & \Delta_{k1, k+1} &= -\frac{1}{F_{k+1} E_{k+1}} + \frac{v_k v_{k+1}}{\sum_{i=1}^n E_i J_i}, \\ \Delta_{k0} &= \frac{N_k^0}{F_k E_k} - \frac{N_{k+1}^0}{F_{k+1} E_{k+1}} + \frac{M^0 v_k}{\sum_{i=1}^n E_i J_i}, \end{aligned} \quad (2)$$

где  $F_k$  — площадь поперечного сечения  $k$ -го стержня,  $E_k$  — модуль упругости,  $J_k$  — момент инерции сечения,  $v_k$  — расстояние между центрами тяжести сечений стержней, расположенных по обе стороны от  $k$ -го шва,  $N_k^0$  — нормальная сила в  $k$ -ом стержне основной системы, возникающая от действия

внешней нагрузки,  $M^0 = \sum_{i=1}^n M_i^0$  — изгибающий момент в основной системе от действия внешней нагрузки.

С другой стороны, сдвиг в  $k$ -ом шве  $\delta_k$  равен напряжению в связях сдвига  $T_k''$ , деленному на коэффициент жесткости связей сдвига  $k$ -го шва —  $\epsilon_k$ . Учитывая это, получим из (1) систему линейных дифференциальных уравнений:

$$\frac{T_k''}{\epsilon_k} = \sum_{i=1}^n \Delta_{ki} T_i + \Delta_{k0} \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (3)$$

Для решения системы (3) необходимо сначала решить характеристическое уравнение:

$$\begin{vmatrix} \epsilon_1 \Delta_{11} - \lambda^2 & \epsilon_1 \Delta_{12} & \dots & \epsilon_1 \Delta_{1n} \\ \epsilon_2 \Delta_{21} & \epsilon_2 \Delta_{22} - \lambda^2 & \dots & \epsilon_2 \Delta_{2n} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \epsilon_n \Delta_{n1} & \epsilon_n \Delta_{n2} & \dots & \epsilon_n \Delta_{nn} - \lambda^2 \end{vmatrix} = 0. \quad (4)$$

Затем найдем матрицу коэффициентов  $\beta_{ik}$  из однородных систем обыкновенных уравнений, определитель которых равен нулю:

$$\sum_{j=1}^n \epsilon_j \Delta_{ij} \beta_{jk} - \lambda_k^2 \beta_{ik} = 0 \quad (i=1, 2, \dots, n), \quad (5)$$

где  $\lambda_k$  ( $k=1, 2, \dots, n$ ) — корни характеристического уравнения (4).

Умножая первое уравнение системы (3) на  $\beta_{1k}$ , второе на  $\beta_{2k}$  и т. д., складывая результаты и учитывая, что  $\Delta_{ik} = \Delta_{ki}$ , получим:

$$\bar{T}_k'' = \lambda_k^2 \bar{T}_k + D_k \quad (k = 1, 2, \dots, n), \quad (6)$$

где

$$\bar{T}_k = \sum_{i=1}^n T_i \frac{\beta_{ik}}{\varepsilon_i}, \quad D_k = \sum_{i=1}^n \Delta_{i0} \beta_{ik}. \quad (7)$$

Таким образом, вводя обобщенные неизвестные  $\bar{T}_k$  и нагрузочные члены  $D_k$  по формулам (7), мы можем систему (3) разбить на  $n$  независимых дифференциальных уравнений второго порядка (6).

Преобразование системы (3) в систему (6) эквивалентно сведению задачи о составном стержне, составленном из многих брусьев, к задаче о составном стержне, составленном только из двух брусьев, что сильно упрощает расчет. Однако такое упрощение возможно только в том случае, если граничные условия также допускают возможность перехода от сил  $T_i$  к обобщенным силам  $\bar{T}_i$ , а это может быть только тогда, когда граничные условия имеют один и тот же вид для всех неизвестных  $T_i$ . Такого рода граничные условия названы нами однотипными граничными условиями. В дальнейшем такой путь решения задачи будем называть способом разложения внешней нагрузки по собственным решениям системы (3).

Для приближенного решения системы (3) можно воспользоваться разложением внешней нагрузки в бесконечный ряд по некоторым ортогональным функциям, обладающим тем свойством, что их вторая производная отличается от самой функции лишь постоянным множителем. Задаваясь решением для неизвестных функций  $T_i$  в виде тех же функций, которыми представлены нагрузочные члены  $\Delta_{i0}$ , и произведя сокращение, получим систему обыкновенных линейных уравнений, в которых неизвестными являются уже постоянные величины. Такие системы следует решить для нескольких членов разложения внешней нагрузки (число этих членов определяется потребной точностью решения) и затем произвести суммирование полученных результатов.



Фиг. 3.

Ортогональными функциями, удовлетворяющими условиям поставленной задачи, являются тригонометрические функции, которыми определяются формы выпучивания сжатого стержня с несмещающимися концами (фиг. 3), причем граничные условия этого стержня (упругая заделка по концам) должны отвечать заданным однотипным граничным условиям составного стержня. Свойство ортогональности этих функций легко доказывается для случая любой степени упругого защемления по концам, т. е. для любых возможных граничных условий.

Потенциальная энергия сдвигающих сил в составном стержне с абсолютно жесткими поперечными связями выражается формулой<sup>1</sup>:

<sup>1</sup> В работе А. В. Дятлова [1] это выражение определено неверно, так как в нем отсутствует член, учитывающий податливость связей сдвига.

$$A = \int_0^l \left[ \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n \Delta_{ki} T_k T_i + \sum_{i=1}^n \Delta_{i0} T_i + \frac{1}{2} \sum_{i=1}^n \frac{(T_i')^2}{\varepsilon_i} \right] dx. \quad (8)$$

Первый член в подинтегральном выражении (8) представляет работу сдвигающих усилий  $T_i$  на перемещениях, вызванных ими самими, второй член — работу усилий  $T_i$  на перемещениях, вызванных внешней нагрузкой, и, наконец, последний член представляет собой работу напряжений в связях сдвига на перемещениях внутри самих этих связей.

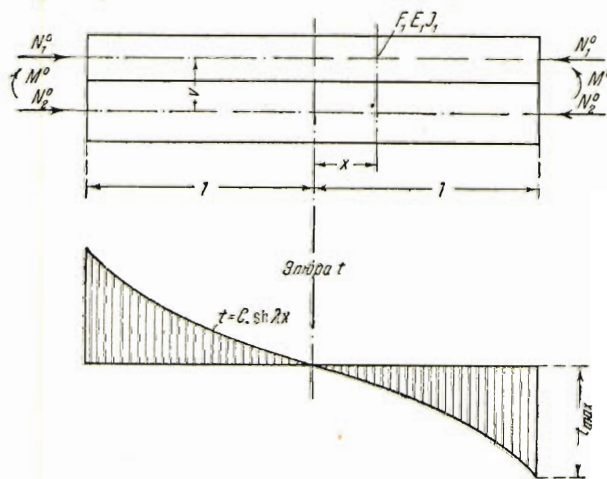
Для того чтобы величина  $A$  имела минимальное значение, необходимо для правой части выражения (8) составить уравнения Лагранжа-Эйлера, которыми и являются в данном случае уравнения (3).

В обобщенных силах  $\bar{T}_i$  выражение (8) принимает несколько более простой вид:

$$A = \frac{1}{2} \int_0^l \sum_{i=1}^n [\lambda_i^2 \bar{T}_i^2 + 2D_i \bar{T}_i + (\bar{T}_i')^2] dx. \quad (9)$$

Из того обстоятельства, что в выражение для потенциальной энергии не входят произведения обобщенных сил друг на друга, заключаем, что все обобщенные силы  $\bar{T}_i$  взаимно ортогональны. Легко установить также, что квадраты характеристических чисел  $\lambda_i$  всегда положительны.

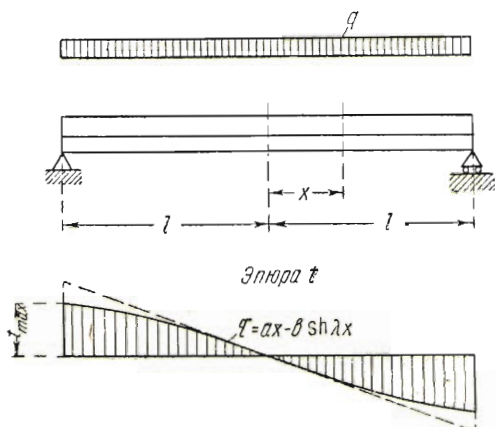
Рассмотрим теперь частные случаи загрузки составного стержня с абсолютно жесткими поперечными связями. На фиг. 4 представлена эпюра сдвигающих сил, возникающая при внецентренном сжатии-растяжении и при чистом изгибе стержня, составленного из двух брусьев.



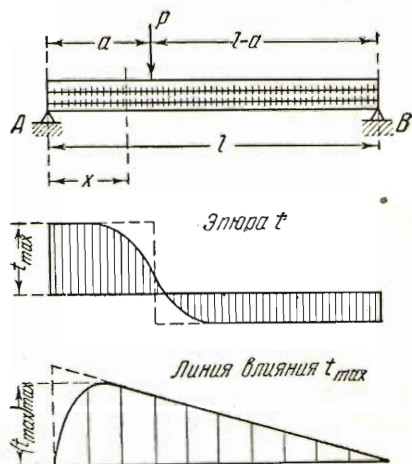
Фиг. 4.

На фиг. 5 и 6 даны эпюры сдвигающих усилий в составных балках нагруженных равномерно распределенной нагрузкой и сосредоточенной силой. Как видно, они сильно отличаются от нанесенных пунктирной линией эпюр, получаемых обычными методами сопротивления материалов. Результаты, полученные для составных стержней из двух брусьев, легко могут быть распространены на случай стержня, составленного из любого числа брусьев,

подверженного такой же нагрузке при однотипных граничных условиях применением способа разложения внешней нагрузки по собственным решениям основной системы уравнений (3). В качестве примера решения в случае неоднотипных граничных условий приводим результаты расчета ступенчатого стыка растянутого пакета из трех брусьев. На фиг. 7 представлена эпюра нормальных усилий, передающихся на протяжении стыка с одного бруса на



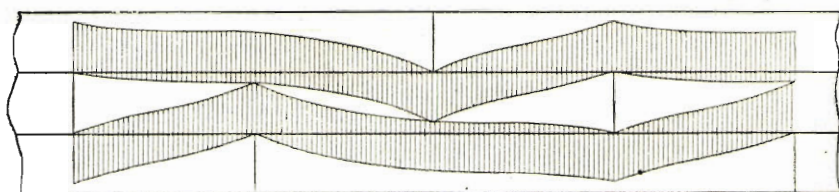
Фиг. 5.



Фиг. 6.

другой. Наиболее напряженным оказывается средний брус в местах стыкования крайних.

Задача об устойчивости сжато-изогнутого составного стержня решается на основе полученного решения задачи о прочности составного стержня.



Фиг. 7.

Кроме лишних неизвестных  $T_i$ , вводится еще одна неизвестная функция (прогиб стержня)  $y$ , который отсчитывается от линии действия равнодействующей сжимающей силы. Благодаря наличию последней результатом прогиба является дополнительный изгибающий момент, который вызывает подобно прочим силовым факторам перемещения по направлению связей сдвига. Уравнения (3) при этом приобретают вид:

$$\frac{T_k''}{\epsilon_k} = \sum_{i=1}^n \Delta_{ki} T_i + \Delta_{ky} y + \Delta_{k0} \quad (k = 1, 2, \dots, n). \quad (10)$$

Здесь

$$\Delta_{ky} = - \frac{\sum_{i=1}^n N_i^{\circ}}{\sum_{i=1}^n E_i J_i} v_k. \quad (11)$$

Так как у нас добавилось еще одно неизвестное, то уравнений (10) для решения задачи недостаточно. Дополнительным уравнением следует взять условие равенства суммарного изгибающего момента в сечении составного стержня деленной на суммарную жесткость  $\sum E_i J_i$  кривизне его изогнутой оси, причем, поскольку рассматриваются малые деформации, кривизна заменяется второй производной от прогиба  $y''$ .

После некоторых преобразований это дополнительное уравнение приводится к виду:

$$\sum_{i=1}^n N_i^{\circ} y'' = \sum_{i=1}^n \Delta_{yi} T_i + \Delta_{yy} y + \Delta_{y0}, \quad (12)$$

где

$$\Delta_{yi} = - \frac{\sum N_i^{\circ}}{\sum E_i J_i} v_i = \Delta_{iy}, \quad \Delta_{yy} = \frac{\left(\sum N_i^{\circ}\right)^2}{\sum E_i J_i}, \quad \Delta_{y0} = - \frac{\sum N_i^{\circ}}{\sum E_i J_i} M^{\circ}. \quad (13)$$

Система уравнений (10) и (12) дает возможность отыскать все  $T_i$  и  $y$ , т. е. определить полностью напряженное состояние сжато-изогнутого составного стержня.

Если внешняя нагрузка заключается только в равномерном сжатии стержня, то все нагрузочные члены системы (10) и (12) равны нулю, и при однородных граничных условиях система имеет нулевое решение. Однако при некоторых значениях  $\sum N_i^{\circ}$ , которые находятся из решения соответствующего детерминантного уравнения, возможны отличные от нуля решения. Эти значения  $\sum N_i^{\circ}$  являются критическими и отвечают различным возможным формам потери устойчивости стержня.

Интересно отметить, что нагрузочные члены системы (10) и (12) будут только тогда все равны нулю, когда сжимающие силы  $-N_k^{\circ}$  относятся между собой как жесткости на сжатие соответствующих стержней  $E_k F_k$ , а суммарный момент  $M^{\circ}$ , действующий на основную систему от внешней нагрузки, тождественно равен нулю. Только этот случай нагрузки может быть назван случаем центрального сжатия, во всех остальных случаях с самого начала нагружения будет иметь место искривление оси стержня.

Для стержня, составленного из двух брусьев, система уравнений (10), (12) нами сведена к довольно простому уравнению:

$$y^{IV} + \left( \frac{P}{\sum EJ} - \lambda^2 \right) y'' - \frac{P\lambda^2}{E_0 J_0} y = \frac{M_M \lambda^2}{E_0 J_0} - \frac{M^{\circ\prime\prime}}{\sum EJ}. \quad (14)$$

Здесь  $P = -\sum N_i^0$  — суммарная сжимающая сила,  $\lambda^2$  — квадрат характеристического числа уравнения сдвигающих усилий  $T$  в данном стержне без учета устойчивости, равный  $\epsilon \Delta_{II}$ ,  $\sum EJ$  — сумма жесткостей обоих стержней, входящих в данный составной стержень,  $E_0 J_0$  — жесткость на изгиб сечения составного стержня, рассматриваемого как монолитный,  $M^0$  — суммарный изгибающий момент от внешней нагрузки, возникающий в составном стержне, лишенном связей сдвига,  $M_M$  — изгибающий момент от внешней нагрузки, действующий на составной стержень, рассматриваемый как монолитный.

В случае очень слабых связей сдвига ( $\lambda^2 = 0$ ) и в случае бесконечно жестких связей сдвига ( $\lambda^2 = \infty$ ) уравнение (14) переходит соответственно в обычные уравнения сжато-изогнутого монолитного стержня:

$$y^{IV} + \frac{P}{\sum EJ} y'' = -\frac{M^0}{\sum EJ}, \quad y'' + \frac{P}{E_0 J_0} y = -\frac{M_M}{E_0 J_0}. \quad (15)$$



Фиг. 8.

Как частный случай уравнения (14) при  $P=0$  получается уравнение упругой оси составной балки:

$$y^{IV} - \lambda^2 y'' = \frac{M_M \lambda^2}{E_0 J_0} - \frac{M^0}{\sum EJ}. \quad (16)$$

Интеграл уравнения (14) с правой частью для случая простейших граничных условий на концах согласно фиг. 8 нами получен в виде:

$$\begin{aligned} (v_I^2 + v_{II}^2) y = & -\frac{\text{sh } v_I x}{v_I \text{sh } v_I l} \int_0^l \left( \frac{M_M \lambda^2}{E_0 J_0} - \frac{M^0 v_I^2}{\sum EJ} \right) \text{sh } v_I (l-t) dt + \\ & + \frac{\sin v_{II} x}{v_{II} \sin v_{II} l} \int_0^l \left( \frac{M_M \lambda^2}{E_0 J_0} + \frac{M^0 v_{II}^2}{\sum EJ} \right) \sin v_{II} (l-t) dt + \\ & + \frac{1}{v_I} \int_0^x \left( \frac{M_M \lambda^2}{E_0 J_0} - \frac{M^0 v_I^2}{\sum EJ} \right) \text{sh } v_I (x-t) dt - \end{aligned} \quad (17)$$



$$-\frac{1}{v_{II}} \int_0^x \left( \frac{M_M \lambda^2}{E_0 J_0} + \frac{M^0 v_{II}^2}{\sum EJ} \right) \sin v_{II} (x-t) dt,$$

где

$$v_I^2 = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \lambda^2 - \frac{P}{\sum EJ} \right)^2 + \frac{P \lambda^2}{E_0 J_0} + \frac{1}{2} \left( \lambda^2 - \frac{P}{\sum EJ} \right)},$$

$$v_{II}^2 = \sqrt{\frac{1}{4} \left( \frac{P}{\sum EJ} \right)^2 + \frac{P \lambda^2}{E_0 J_0} - \frac{1}{2} \left( \lambda^2 - \frac{P}{\sum EJ} \right)} \quad (18)$$

( $l$  — длина стержня).

При  $v_{II} l = n\pi$ , где  $n$  — целое число, правая часть выражения (17) имеет вообще говоря, бесконечно большое значение и нагрузка на стержень является критической. Отсюда  $P_{кр}$  получается равным:

$$P_{кр} = \frac{\frac{n^4 \pi^4}{l^4} + \lambda^2 \frac{n^2 \pi^2}{l^2}}{\frac{n^2 \pi^2}{l^2} + \frac{\lambda^2}{E_0 J_0}}. \quad (19)$$

Рассмотрим теперь тот частный случай, когда числитель дроби со знаменателем  $v_{II} \sin v_{II} l$  в выражении (17) одновременно с  $\sin v_{II} l$  обращается в нуль. При этом величина этого числителя будет равна

$$\sin \frac{n\pi x}{l} \int_0^l \left( \frac{M_M \lambda^2}{E_0 J_0} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{M^0}{\sum EJ} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx$$

и условием обращения его в нуль будет:

$$\int_0^l \left( \frac{M_M \lambda^2}{E_0 J_0} + \frac{n^2 \pi^2}{l^2} \frac{M^0}{\sum EJ} \right) \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0. \quad (20)$$

Раскрыв неопределенность, мы получим для прогибов конечные значения при условии (20). При  $n=1$  это условие отвечает промежуточному положению нагрузки между двумя возможными случаями, вызывающими выпучивание стержня в конце концов в ту или другую сторону, и оно названо нами условием оптимальности загрузки сжато-изогнутого составного стержня из двух брусев.

Для монолитного сжато-изогнутого стержня условие (20) имеет вид:

$$\int_0^l M^0 \sin \frac{n\pi x}{l} dx = 0. \quad (21)$$

Аналогичные условия оптимальности загрузки сжато-изогнутых стержней можно написать и для других случаев граничных условий.

Пока мы рассматривали сжато-изогнутые стержни с абсолютно жесткими поперечными связями. При учете податливости поперечных связей задача усложняется, но не с принципиальной стороны.

Взяв в качестве основной системы стержень, лишенный **и связей** сдвига и поперечных связей, а в качестве неизвестных суммарные сдвигающие усилия  $T_i$  и изгибающие моменты, вызываемые в стержнях усилиями в поперечных связях  $S_i$ , и составляя уравнения деформаций, получаем следующую систему уравнений:

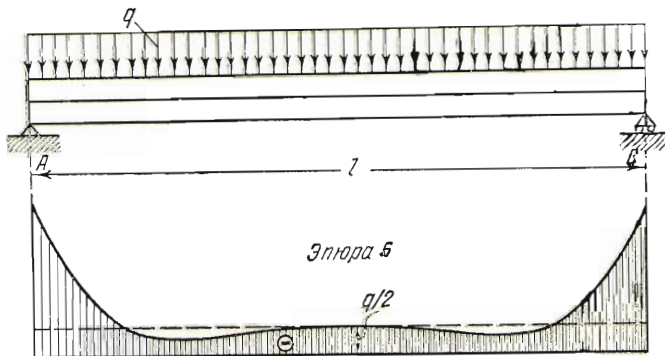
$$\begin{aligned} \frac{1}{E_k} T_k'' &= \sum_{i=k-1}^{k+1} g_{ki} T_i + \sum_{i=k-1}^{k+1} h_{ki} S_i + g_{k0} \\ -\frac{1}{\eta_k} S_k^{IV} &= \sum_{i=k-1}^{k+1} h_{ik} T_i + \sum_{i=k-1}^{k+1} r_{ki} S_i + r_{k0} \end{aligned} \quad (k=1, 2, \dots, n).$$

Здесь  $\eta_k$  — коэффициент жесткости поперечных связей  $k$ -го шва,

$$\begin{aligned} g_{k, k-1} &= -\frac{1}{E_k E_k} + \frac{u_{k-1} z_k}{E_k J_k}, & r_{k, k-1} &= -\frac{1}{E_k J_k}, \\ g_{kk} &= \frac{1}{E_k E_k} + \frac{1}{E_{k+1} E_{k+1}} + \frac{z_k^2}{E_k J_k} + \frac{u_k^2}{E_{k+1} J_{k+1}}, & r_{kk} &= \frac{1}{E_k J_k} + \frac{1}{E_{k+1} J_{k+1}}, \\ g_{k, k+1} &= -\frac{1}{E_{k+1} E_{k+1}} + \frac{u_k z_{k+1}}{E_{k+1} J_{k+1}}, & r_{k, k+1} &= -\frac{1}{E_{k+1} J_{k+1}}, \\ g_{k0} &= \frac{M_k^0 z_k}{E_k J_k} + \frac{M_{k+1}^0 u_k}{E_{k+1} J_{k+1}} + \frac{N_k^0}{E_k E_k} - \frac{N_{k+1}^0}{E_{k+1} E_{k+1}}, & r_{k0} &= \frac{M_k^0}{E_k J_k} - \frac{M_{k+1}^0}{E_{k+1} J_{k+1}}, \\ h_{k, k-1} &= -\frac{z_k}{E_k J_k}, & h_{kk} &= \frac{z_k}{E_k J_k} - \frac{u_k}{E_{k+1} J_{k+1}}, & h_{k, k+1} &= \frac{u_k}{E_{k+1} J_{k+1}}, \end{aligned} \quad (23)$$

где  $u_k$  и  $z_k$  — расстояния от разделяющей плоскости  $k$ -го шва до центров тяжести сечений выше- и нижележащего стержня (Фиг. 2).

Первая группа уравнений (22) со свободными членами  $g_{k0}$  представляет собой зависимость между сдвигами в швах и усилиями в связях сдвига,



Фиг. 9.

а вторая со свободными членами  $r_{k0}$  — зависимости между разностью прогибов соседних стержней и усилиями в поперечных связях.

В частном случае симметрично составленного стержня из двух брусьев система (22) распадается на два независимых уравнения, из которых первое, содержащее неизвестное  $T$ , совпадает с таковым же уравнением, написанным для случая абсолютно жестких поперечных связей, а второе представляет собой уравнение балки на упругом основании.

Пример распределения усилий в поперечных связях равномерно нагруженной балки показан на фиг. 9.

В задаче устойчивости центрально сжатого составного стержня на упруго-податливых поперечных связях и связях сдвига, кроме неизвестных  $T_i$  и  $S_i$ , появляются также  $n+1$  неизвестных прогибов каждого отдельного стержня. При этом уравнения (22) принимают вид:

$$\begin{aligned} \frac{T_k''}{\epsilon_k} &= \sum_{i=k-1}^{k+1} g_{ki} T_i + \sum_{i=k-1}^{k+1} h_{ki} S_i - \frac{e^\circ z_k}{i_k^2} y_k - \frac{e^\circ u_k}{i_{k+1}^2} y_{k+1}, \\ -\frac{S_k^{IV}}{\eta_k} &= \sum_{i=k-1}^{k+1} h_{ik} T_i + \sum_{i=k-1}^{k+1} r_{ki} S_i - \frac{e^\circ}{i_k^2} y_k + \frac{e^\circ}{i_{k+1}^2} y_{k+1} \quad (k=1, 2, \dots, n), \end{aligned} \quad (23)$$

где  $e^\circ$  — одинаковое для всех брусьев относительное удлинение от продольных усилий,  $i_k$  — радиус инерции  $k$ -го стержня.

Кроме того, дополнительно следует написать еще  $n+1$  уравнение изгиба каждого отдельного бруса:

$$E_k J_k y_k'' = -S_k + S_{k-1} - z_k T_k - u_{k-1} T_{k-1} + e^\circ F_k E_k y_k \quad (k=1, 2, \dots, n). \quad (24)$$

В частном случае симметрично составленного стержня из двух брусьев система уравнений (23), (24) также распадается на два уравнения, из которых первое является частным случаем уравнения (14), а второе уравнением устойчивости монолитного стержня в упругой среде.

Поступила в редакцию 5 XI 1939.

Доложена на Всесоюзном совещании по строительной механике при Институте механики Акад. Наук СССР (22—26 X 1939).

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Дятлов А. В. Устойчивость сплошных составных стержней. „Прикладная математика и механика“. 1938. Т. I. Вып. 4.
2. Ржаницын А. Р. Работа связей в составных стержнях. „Сборник трудов ИСИ им. Куйбышева“. 1939. № 2.
3. Ржаницын А. Р. Устойчивость составных упругих стержней. Сборник ЦНИПС. „Исследования прочности и устойчивости деревянных стержней“. 1940.

## GEGLIEDERTE STÄBE MIT ELASTISCH NACHGIEBIGEN VERBINDUNGEN

A. R. RSHANIZYN

(Zusammenfassung)

Die vorliegende Arbeit behandelt Stäbe, welche durch kontinuierliche elastisch nachgiebige Verbindungen miteinander vereinigt sind. In der ersten Annäherung wird die Aufgabe für derartige Stäbe mit der Voraussetzung von absolut starren Querverbindungen, welche einen unveränderlichen Abstand zwischen den Achsen benachbarter Stäbe sichern, gelöst. Die Berücksichtigung der Nachgiebigkeit der Schubverbindungen, welche gegenseitige Verschiebungen der Fasern benachbarter Stäbe verhindern, führt dabei zur Lösung von einem System von  $n$  Differentialgleichungen zweiter Ordnung, wo  $n$  die Anzahl der Zwischenräume zwischen den Stäben ist. Die Unbekannten der Gleichungen sind die Schubkräfte, die von einem Stab zum anderen übertragen werden. Durch Einführung von verallgemeinerten Unbekannten und verallgemeinerten Kräften kann man dieses System in eine Reihe von  $n$  von einander unabhängiger Differentialgleichungen umwandeln.

Als Beispiel werden Lösungen für folgende Fälle angeführt:

1. Exzentrischer Druck oder Zug eines zweiteiligen, gegliederten Stabes.
2. Ein gegliederter Stab mit gleichmässig verteilter Belastung oder mit einer Einzellast belastet.
3. Der Teilstoss eines auf Zug beanspruchten aus drei Lamellen bestehenden Lamellenstabes.

Weiterhin wird eine Lösung für den Fall der Biegedruckfestigkeit eines gegliederten Stabes mit absolut starren Querverbindungen gegeben. Hier kommt noch eine Unbekannte hinzu, nämlich die Durchbiegung und dementsprechend noch eine Differentialgleichung der elastischen Linie dazu.

Für den Fall eines zweiteiligen gegliederten Stabes gibt die Lösung einen einfachen Ausdruck. Es werden die „Optimalbedingungen der Belastung“ eines gegliederten Stabes gegeben, unter welchen die Durchbiegungen in der Nähe der kritischen Druckkraft einen geringen Wert haben.

Zum Schluss werden Aufgaben für die Festigkeit und Knickung des gegliederten Stabes mit elastisch nachgiebigen Schub- und Querverbindungen gelöst. Diese Aufgaben bestehen auch in der Lösung eines Systems von Differentialgleichungen.

---