

Т. IV, в. 3, 1940

К РАСЧЕТУ ФУНДАМЕНТНЫХ ПЛИТ

М. Я. ЛЕОНОВ

(Днепропетровск)

§ 1. Будем предполагать, что плита покоится на упругом полубесконечном теле, ограниченном сверху плоскостью. Далее, как обычно, будем считать, что деформация и толщина плиты — величины малые, а модуль упругости плиты — величина, настолько большая, что цилиндрическая жесткость плиты является величиной конечной. Тогда горизонтальные смещения на нижней поверхности плиты, возникающие вследствие удлинения и изгиба срединной плоскости, будут малыми высшего порядка. Поэтому, в силу невозможности скольжения плиты, горизонтальными смещениями на поверхности основания в области расположения плиты можно пренебречь. В этой области отсутствуют как вертикальные, так и горизонтальные силы.

Если плита достаточно жесткая, а размеры ее в плане не велики, то при действии на плиту только вертикальной нагрузки можно приближенно считать, что горизонтальные усилия отсутствуют по всей поверхности основания. Это следует как из принципа Сан-Венана, так и из того, что более или менее значительные горизонтальные смещения возникают только в некотором удалении от центра вертикальных сил.

В другом крайнем случае очень гибкой плиты, когда плита в плане имеет большие размеры, а внешняя нагрузка приложена в достаточном удалении от краев, можно приближенно считать, что горизонтальные смещения отсутствуют по всей поверхности основания. В этом случае за пределами плиты возникают малые горизонтальные силы τ , которые можно оценить по формуле^[1]:

$$\tau = -\frac{E(1-2\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)} \text{grad } w, \quad (1)$$

где w — вертикальные смещения на поверхности основания. При этом, если известно нормальное давление p , осадка w определяется по формуле:

$$w(x, y) = \frac{(3-4\nu)(1+\nu)}{4\pi E(1-\nu)} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad (2)$$

причем E — модуль упругости грунта, а ν — коэффициент Пуассона.

Плиты, для которых выражение (1) в области, не занятой плитой, дает малые значения τ , можно рассчитывать как неограниченные.

Сравнивая формулу (2) с выражением для осадки, когда отсутствуют силы трения, т. е. с формулой

$$w = \frac{1 - \nu^2}{\pi E} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2}}, \quad (3)$$

легко установить, что силы трения незначительно влияют на величину осадки w , если учесть еще ту неточность, с которой берется E . Поэтому для конечных толстых плит мы в дальнейшем будем пренебрегать силами трения.

В отличие от ранее опубликованной работы автора [2] здесь будет дано определение неизвестного реактивного давления p не через деформацию поверхности основания, а непосредственно через те силы, которые действуют на плиту.

§ 2. Для случая круговой симметрии, когда $p = 0$ вне круга радиуса R , центр которого совпадает с центром симметрии, нами было получено [2] решение интегрального уравнения (3). Это решение может быть представлено формулой:

$$p(r) = \frac{c}{\sqrt{R^2 - r^2}} - \frac{E}{\pi(1 - \nu^2)} \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_{r \sin \alpha}^{R \sin \alpha} \frac{\Delta w(t) t dt}{\sqrt{t^2 - r^2 \sin^2 \alpha}}, \quad (4)$$

где Δ — оператор Лапласа,

$$\Delta w = \frac{d^2 w}{dt^2} + \frac{1}{t} \frac{dw}{dt},$$

а c — постоянная, которая будет определена из условия равновесия. Когда интеграл в формуле (4) не берется в известных функциях, то применение ее к численному вычислению реактивного давления p представляет затруднения вследствие того, что при $t = r$ подинтегральное выражение обращается в бесконечность.

С другой стороны, при расчете плит функция Δw вычисляется более или менее сложно через действующую на плиту нагрузку посредством решения дифференциального уравнения

$$D \Delta \Delta w = q - p, \quad (5)$$

где D — цилиндрическая жесткость плиты, q — интенсивность внешней нормальной нагрузки.

В § 4 будет показано, как можно избежать только что указанных затруднений. Именно, решение для p будет представлено в виде:

$$p = \frac{c}{\sqrt{R^2 - r^2}} + \frac{E}{\pi(1 - \nu^2)} \left[\int_0^R \Phi(r, t) d\Delta w(t) + a \sqrt{R^2 - r^2} \right], \quad (6)$$

$$a = \Delta w(R) + \int_0^R \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} \right) d\Delta w, \quad d\Delta w = \frac{Q}{D} dt,$$

где Q — поперечная сила в данном сечении плиты, которая в случае симметричной задачи определяется весьма просто из условия статики.

Формула (6) справедлива в предположении, что функция w непрерывна вместе с первой производной. Для случая, когда функция Δw разрывна,

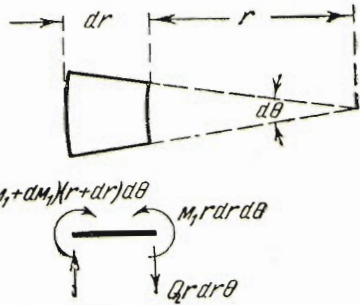
интеграл (6) надо понимать в смысле Стильтьеса. При изгибе плиты Δw имеет разрывы в местах скачкообразного увеличения толщины плиты или в точках приложения сосредоточенного момента M ; для последних

$$d\Delta w = \frac{M}{D}.$$

§ 3. Рассмотрим дифференциальное уравнение равновесия плиты, когда на нее действуют внешние моменты, распределенные с интенсивностью $m(r)$ и изгибающие плиту в радиальном направлении совместно с некоторой нагрузкой g .

Вырезав из плиты круг радиуса r и составляя условие равновесия оставшегося кольца, найдем, что поперечная сила будет равна:

$$Q(r) = -\frac{1}{r} \int_r^R rg(r) dr. \quad (7)$$



Фиг. 1.

Рассмотрим теперь условия равновесия элемента плиты, вырезанного цилиндрическими и радиальными сечениями (фиг. 1).

Суммируя моменты и отбрасывая малые высшего порядка, получим:

$$M_1 + r \frac{dM_1}{dr} - M_2 + Qr + mr = 0. \quad (8)$$

Подставляя сюда Q , а также выражения M_1 и M_2 через деформацию плиты^[3] по формулам:

$$M_1 = -D \left(\frac{d\varphi}{dr} + \frac{\mu}{r} \varphi \right), \quad M_2 = -D \left(\frac{\varphi}{r} + \nu \varphi \right), \quad (9)$$

где $\varphi = \frac{dw}{dr}$, а μ — коэффициент Пуассона для плиты, получим:

$$D \left(\frac{d^2 \varphi}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d\varphi}{dr} - \frac{\varphi}{r^2} \right) = m(r) + Q. \quad (10)$$

Откуда видно, что для определения деформации плиты действие нормальных сил g можно заменить действием непрерывно распределенных моментов m_g определяемых формулой:

$$m_g = -\frac{1}{r} \int_r^R rg(r) dr. \quad (11)$$

Рассмотрим простейший случай, когда к плите радиуса R не приложено никаких внешних сил, кроме момента, распределенного по окружности радиуса t с интенсивностью M_t . Для некоторой общности будем считать, что внутри круга радиуса r_0 плита имеет абсолютно жесткий участок (колонна с подколонником).

Общим решением дифференциального уравнения (10) для участка $r_0 < r < t$ будет:

$$\varphi_1 = A_1 r + \frac{A_2}{r}. \quad (12)$$

Так как $\varphi = 0$ при $r = r_0$, то

$$A_2 = -A_1 r_0^2, \quad \varphi_I = A_1 \left(r - \frac{r_0^2}{r} \right). \quad (13)$$

Аналогично предыдущему для участка $t < r < R$

$$\varphi_{II} = B_1 r + \frac{B_2}{r}. \quad (14)$$

На краю плиты будем иметь условие $M_1 = 0$ при $r = R$ и согласно первой формуле (9)

$$B_1(1 + \mu) - \frac{B_2}{R^2}(1 - \mu) = 0;$$

следовательно,

$$\varphi_{II} = B_1 \left(r + \frac{1 + \mu}{1 - \mu} \frac{R^2}{r} \right). \quad (15)$$

Из условия сопряжения ($\varphi_I = \varphi_{II}$ при $r = t$) следует при $\mu = 0.2$:

$$B_1 = \frac{t^2 - r_0^2}{t^2 + 1.5 R^2} A_1. \quad (16)$$

Изгибающие моменты M_1 при $r = t$ будут:

$$M_1(t-0) = -DA_1 \left(1.2 + 0.8 \frac{r_0^2}{t^2} \right), \quad (17)$$

$$M_1(t+0) = -DA_1 \left(1 - \frac{R^2}{t^2} \right) 1.2 \frac{t^2 - r_0^2}{t^2 + 1.5 R^2}.$$

Из условия равновесия

$$M_t = M_1(t-0) - M_1(t+0)$$

получим:

$$A_1 = -\frac{M_t}{D} \frac{t^2 + 1.5 R^2}{3 R^2 + 2 r_0^2}, \quad (18)$$

а затем

$$B_1 = -\frac{M_t}{D} \frac{t^2 - r_0^2}{3 R^2 + 2 r_0^2}. \quad (19)$$

Аналогичным образом вычисляются A_2 и B_2 , после чего легко определить деформацию и напряженное состояние для элементарного действия сосредоточенного момента M_t . Соответствующим суммированием, полагая $M_t = Q dt$, можно получить решение в общем случае нагрузки.

Легко видеть, что при загрузении плиты моментом M_t имеет место соотношение:

$$\Delta w(x) = \begin{cases} 2A_1 & (r_0 < x < t), \\ 2B_1 & (t < x < R). \end{cases} \quad (20)$$

§ 4. Разберем простейший случай, когда

$$\Delta w_1(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } 0 < x < t, \\ 0 & \text{при } t < x < R. \end{cases} \quad (21)$$

Для вычисления по формуле (4) реактивного давления на основании, соответствующего осадке (21) при $c = 0$, рассмотрим интеграл:

$$\Gamma(r, t) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_{r \sin \alpha}^{R \sin \alpha} \frac{\Delta w_1 x dx}{\sqrt{x^2 - r^2 \sin^2 \alpha}}. \quad (22)$$

Для первого участка ($0 < r < t$) функция Γ будет:

$$\Gamma_I = \int_0^{\arcsin \frac{t}{R}} d\alpha \int_{r \sin \alpha}^{R \sin \alpha} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + \int_{\arcsin \frac{t}{R}}^{\frac{\pi}{2}} d\alpha \int_{r \sin \alpha}^t \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} =$$

$$= \sqrt{R^2 - r^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} \right) + t \left[E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{r}{t}\right) - E\left(\arcsin \frac{t}{R}, \frac{r}{t}\right) \right],$$

где

$$E(\varphi, k) = \int_0^{\varphi} \sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha} d\alpha$$

есть эллиптический интеграл второго рода.

Для второго участка, когда $\frac{r}{t} > 1$, функция Γ будет:

$$\Gamma_{II} = \int_0^{\arcsin \frac{t}{R}} d\alpha \int_{r \sin \alpha}^{R \sin \alpha} \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} + \int_{\arcsin \frac{t}{R}}^{\arcsin \frac{t}{r}} d\alpha \int_{r \sin \alpha}^t \frac{x dx}{\sqrt{x^2 - r^2 \sin^2 \alpha}} =$$

$$= \sqrt{R^2 - r^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} \right) + \int_{\arcsin \frac{t}{R}}^{\arcsin \frac{t}{r}} \sqrt{t^2 - r^2 \sin^2 \alpha} d\alpha.$$

Преобразуем последний интеграл к эллиптическому с модулем, меньшим единицы, для которого составлены таблицы. Вводя новую переменную ψ

$$\sin \psi = \frac{r}{t} \sin \alpha,$$

получим:

$$\sqrt{1 - \frac{r^2}{t^2} \sin^2 \alpha} = \left(\frac{t}{r} - \frac{r}{t} \right) \frac{d\psi}{\sqrt{1 - \frac{t^2}{r^2} \sin^2 \psi}} + \frac{r}{t} \sqrt{1 - \frac{t^2}{r^2} \sin^2 \psi} d\psi$$

и после интегрирования получим¹:

$$\Gamma_{II} = \sqrt{R^2 - r^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} \right) + r \left[E\left(\frac{\pi}{2}, \frac{t}{r}\right) - E\left(\arcsin \frac{r}{R}, \frac{t}{r}\right) \right] -$$

$$- t \left(\frac{r}{t} - \frac{t}{r} \right) \left[F\left(\frac{\pi}{2}; \frac{t}{r}\right) - F\left(\arcsin \frac{r}{R}; \frac{t}{r}\right) \right],$$

где

$$F(\varphi; k) = \int_0^{\varphi} \frac{d\alpha}{\sqrt{1 - k^2 \sin^2 \alpha}}$$

табличный эллиптический интеграл первого рода.

Легко заметить, что при $t = R$

$$\Gamma = \sqrt{R^2 - r^2}.$$

¹ Наиболее удобные таблицы см. в книге Самойлова-Яхонтова „Таблицы эллиптических интегралов“. ОНТИ. 1935.

Определим функцию Φ следующим образом:

$$\Phi(r, t) = \Gamma(r, t) - \sqrt{R^2 - r^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} \right). \quad (25)$$

Непосредственной подстановкой в исходные формулы можно убедиться в том, что

$$\Phi(0, t) = t \left(\frac{\pi}{2} - \arcsin \frac{t}{R} \right), \quad \Phi(R, t) = \Phi(r, 0) = \Phi(r, R) = 0.$$

В табл. 1 приведены некоторые значения функций $\frac{1}{R} \Phi(r, t)$.

Таблица 1

$r:R$ $t:R$	0.0	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0
0	0	0	0	0	0	0	0
0.1	0.147	0.090	0.021	0.006	0.003	0.000	0
0.3	0.369	0.366	0.210	0.061	0.023	0.003	0
0.5	0.523	0.516	0.451	0.250	0.065	0.007	0
0.7	0.557	0.551	0.512	0.423	0.210	0.016	0
0.9	0.405	0.404	0.383	0.342	0.261	0.090	0
1.0	0	0	0	0	0	0	0

§ 5. Положим теперь, что плита не имеет жесткого участка ($r_0 = 0$), и обозначим через Γ_0 давление на основание, когда осадка задана формулой (20) (предполагая попережнему $c = 0$). Тогда на основании результатов для осадки (21) получим:

$$\Gamma_0 = -\frac{E}{\pi(1-\nu^2)} [2B_1 \Gamma(r, R) + 2(A_1 - B_1) \Gamma(r, t)], \quad (26)$$

или, подставляя значение A_1 , B_1 и Γ по формулам (18), (19) и (25), получим:

$$\Gamma_0 = \lambda M_t \left[\Phi(r, t) + \sqrt{R^2 - r^2} \left(1 - \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2} + \frac{t^2}{1.5R^2}} \right) \right], \quad (27)$$

где

$$\lambda = \frac{E}{\pi D(1-\nu^2)}.$$

Для давления в случае плиты с жестким участком тем же путем получим:

$$\begin{aligned} \Gamma_0' = \lambda M_t \left[\Phi(r, t) - \frac{t^2 + 1.5R^2}{r_0^2 + 1.5R^2} \Phi(r, r_0) + \right. \\ \left. + \sqrt{R^2 - r^2} \left(\frac{t^2 + 1.5R^2}{r_0^2 + 1.5R^2} \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} \right) \right]. \end{aligned} \quad (28)$$

Аналогичные формулы можно получить для многоступенчатой плиты и тем самым можно рассчитать плиту с любым изменением жесткости.

Заменяв действие нагрузки $g = q - p$ действием внешних моментов, распределенных по плите с интенсивностью $m_g = Q$ [см. формулы (7) и (11)], нетрудно будет выразить реактивное давление p через поперечную силу Q . Таким образом получим весьма важную формулу:

$$p = \lambda \left[\int_0^R \Phi(r, t) Q(t) dt + a \sqrt{R^2 - r^2} + b \Phi(r, r_0) \right] + \frac{c}{\sqrt{R^2 - r^2}}, \quad (29)$$

где a и b — постоянные, определяемые по формулам:

$$a = b \sqrt{1 - \frac{r_0^2}{R^2}} - \int_0^R Q(t) \sqrt{1 - \frac{t^2}{R^2}} dt, \quad b = \frac{1}{1.5R^2 + r_0^2} \int_0^R (t^2 + 1.5R^2) Q(t) dt, \quad (30)$$

а c определяется из условия равенства нулю суммы вертикальных составляющих внешней нагрузки и реактивного давления.

Задаваясь приближенным значением для p , зависящим от нескольких произвольных параметров, и определяя первое приближенное значение Q по формуле (7), найдем второе приближение p_2 по формуле (29). Определяя затем второе приближение Q_2 и приравнявая его в отдельных точках первому, найдем значение неопределенных параметров.

Критерием точности приближенного выражения p_2 будет служить степень совпадения Q_1 и Q_2 . Если это совпадение достигнуто, то второе и третье приближения для p будут совпадать еще лучше вследствие сглаживания при интегрировании. Поэтому можно ограничиться вторым приближением для p не требуя хорошего совпадения с его исходным приближенным значением. Заметим, что неточность в определении первоначального приближенного значения p весьма мало сказывается на погрешности в определении значения Q и еще менее в последующем определении реактивного давления.

Для случая плиты постоянной толщины ($r_0 = 0$) реактивное давление удобно задавать в виде полинома четных степеней:

$$p_1 = \sum_{k=0}^{k=n} a_k r^{2k}. \quad (31)$$

При этом, приняв во внимание, что, вообще говоря, $p(R) = \infty$, можно предположить, что по краям плиты распределены сосредоточенные силы. Для определения деформации плиты от сил, заданных формулой (31), будем иметь

$$D\Delta w = \sum \frac{a_k r^{2k+2}}{(k+2)^2} + A, \quad (32)$$

где A — постоянная, которая определяется приравнением изгибающего момента по краю плиты внешнему моменту. Подставляя из формул (32) в формулу (4), получим простые квадратуры^[2].

Для внешней нагрузки квадратуры, вообще говоря, придется производить численным методом¹ по формуле (29). Сравнивая исходное и последующее приближенное значение реактивного давления в $n+1$ характерных точках, определим a_0, a_1, \dots, a_n .

¹ Можно доказать, что квадратуры в формуле (29) выражаются в табличных интегралах для случая многоступенчатой плиты, нагруженной сосредоточенными силами и распределенной нагрузкой (на отдельных участках) по закону (31).

Формула (29) может быть применена для решения задачи разложением p по степеням параметра^[2] λ .

Из уравнения (29) можно получить обычное интегральное уравнение Фредгольма второго рода. Пользуясь равенством

$$\frac{d}{dr} rQ(r) = r(q-p)$$

и применяя формулу интегрирования по частям, получим:

$$\int_{r_0}^R \Phi(r, t) Q(t) dt = r_0 Q(r_0) \Theta(r, r_0) - \int_{r_0}^R \Theta(r, t) t(q-p) dt, \quad (33)$$

где

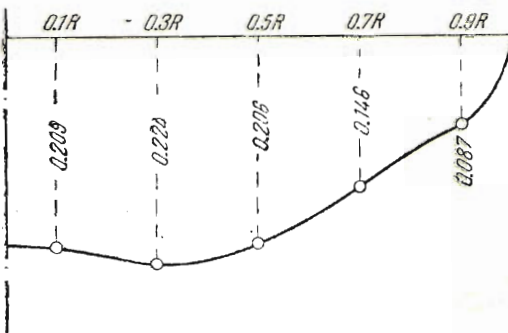
$$\Theta(r, t) = \int \Phi(r, t) \frac{dt}{t} + f(r), \quad Q(R) = 0,$$

причем $f(r)$ — произвольная функция одного переменного r . Заметим, что функция Θ выражается в табличных интегралах^[5].

§ 6. В качестве примера рассмотрим фундамент, состоящий из плиты и подколонника, который воспринимает от колонны центральную нагрузку N .

Так как толщина плиты в месте соединения с подколонником обычно увеличивается более чем в два раза, что соответствует увеличению жесткости плиты в восемь раз, и имея в виду незначительные размеры подколонника в плане, можно считать, что плита в месте соединения с подколонником имеет бесконечно большую жесткость.

Следует отметить, что введение абсолютно жесткого участка при расчете фундаментальной плиты помимо уточнения расчетной схемы имеет важное значение, так как при этом не приходится вводить произвольных гипотез о характере распределения давления от колонны на фундамент.



Фиг. 2.

Для первого приближения примем:

$$Q_1 = d \left(\frac{R^2}{r} - r \right), \quad (34)$$

где d — пока неопределенная постоянная.

Этому значению поперечной силы соответствует некоторое равномерно распределенное в кольце ($r_0 < r < R$) реактивное давление.

Полагая $r_0 = 0.3R$, по формуле (30) найдем:

$$a = 0.168R^2 d, \quad b = 0.837R^2 d. \quad (35)$$

Для вычисления интеграла в формуле (29) пользуемся способом трапеций¹:

$$\int_{0.3R}^R f(t) dt = 0.2R \left[\frac{1}{2} f(0.3R) + f(0.5R) + f(0.7R) + f(0.9R) \right].$$

¹ Интегралы в формуле (29) для случая, когда Q задано формулой (34), приводятся к табличным интегралам. В нашем методе самые простые численные методы интегрирования дают очень точные результаты. Это объясняется свойствами ядра Φ .

На фиг. 2 дана эпюра части реактивного давления $\frac{P}{R^3 \lambda d}$.

Полное реактивное давление определяется по формуле:

$$p_2 = P + \frac{N - 0.466R^5 \lambda d}{2\pi R \sqrt{R^2 - r^2}}. \quad (36)$$

Второе приближение для поперечной силы будет:

$$Q_2 = Q_p + \frac{N - 0.466R^5 \lambda d}{2\pi R} \sqrt{R^2 - r^2}, \quad (37)$$

где Q_p есть часть поперечной силы, соответствующая давлению P ; эпюра $\frac{Q_p}{R^4 \lambda d}$ дана на фиг. 3.

Уравнение для определения d получим, сравнивая значение поперечной силы Q_1 и Q_2 [согласно формулам (34) и (37)] в средней точке²; откуда

$$d = \frac{1}{5.45 + 0.104R^3 \lambda} \frac{N}{R^2}. \quad (38)$$

Для осуществления однозначного напряжения по всей подошве основания необходимо, чтобы выполнялось неравенство

$$N \geq 0.466R^5 \lambda d$$

или согласно формуле (38)

$$R^3 \lambda \leq 15. \quad (39)$$

При невыполнении условия (39) часть плиты вне некоторого круга не будет передавать усилие на грунт, и, следовательно, плиту нужно сделать более жесткой.

Произведем некоторую оценку степени точности предлагаемого приближенного расчета.

При $\lambda = 0$ из формулы (37) следует:

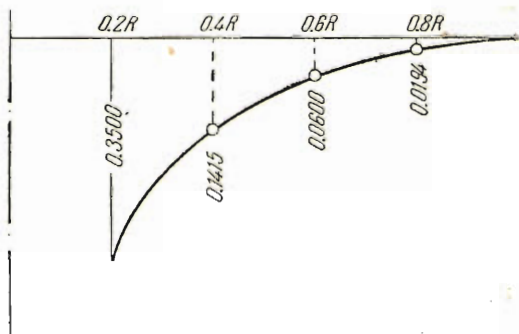
$$p_2 = \frac{N}{2\pi R \sqrt{R^2 - r^2}},$$

что совпадает с точным значением (жесткий штамп); другим крайним случаем при условии (39) будет $R^3 \lambda = 15$. Тогда

$$p_2 = P, \quad Q_2 = Q_p.$$

Если нанести на фиг. 3 значение Q_1 по формуле (34), то при нашем масштабе кривые для Q_1 и Q_2 сольются. Следовательно, можно считать, что P и Q_p удовлетворяют интегральному уравнению (29) и в этом крайнем случае с обычной для инженерных расчетов точностью.

Примененный здесь прием является несколько улучшенным методом последовательных приближений. Его важной особенностью для расчета плит



Фиг. 3.

² Определяя таким образом d , мы улучшаем первое приближение Q_1 , а тем самым улучшаем второе приближение p_2 .

является то, что основные вычисления остаются неизменными при разных значениях D и E , область изменения которых в данном случае определяется неравенством (39).

§ 7. Покажем, что при некоторых общих ограничениях, налагаемых на функцию ρ , справедливо равенство:

$$\iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta \rho \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta + u(x, y), \quad (40)$$

где u — функция гармоническая.

В самом деле, произведя операции Δ над равенством (40), получим тождество:

$$\Delta \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} = \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\Delta \rho(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}}, \quad (41)$$

в справедливости которого нетрудно убедиться, если ввести в правой части вместо ξ, η новые переменные:

$$\xi_1 = x - \xi, \quad \eta_1 = y - \eta$$

и после дифференцирования под знаком интеграла по общим правилам опять перейти к старым переменным ξ и η .

Если предположить, что интегралы в правой и левой части равенства (40) на бесконечности равны нулю, то согласно теории гармонических функций следует¹, что $u = 0$.

Разберем этот случай подробнее. Легко убедиться, что когда функция имеет угловые точки и точки разрыва, то из формулы (40) следует:

$$\begin{aligned} \iint_{-\infty}^{\infty} \frac{\rho(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} &= \iint_{-\infty}^{\infty} \Delta \rho(\xi, \eta) \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\xi d\eta + \\ &+ \int_c \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} \delta \rho'(\xi, \eta) dl + \int_{\gamma} \delta \rho \cos(\bar{n}, \bar{r}) dl, \end{aligned} \quad (42)$$

где c — линии разрывов первых производных функций ρ , γ — линии разрывов функции ρ , $\delta \rho'$ — скачок производной, взятой по нормали к линии c (с положительными знаками, если выпуклость перелома обращена в отрицательную сторону), $\delta \rho$ — скачок функции ρ по абсолютной величине и (\bar{n}, \bar{r}) — угол между нормалью к линии γ (направленной в сторону возрастания функции ρ) и направлением вектора, идущего от точки (ξ, η) к точке (x, y) .

Интегралы в правой части формулы (42) удобны для численных вычислений, так как подинтегральные функции ограничены, чего вообще не может быть для подинтегральной функции левого интеграла.

В случае, когда $\Delta \rho = 0$ (например, практический интерес представляет случай, когда функция ρ линейная), интеграл по двумерной области приводится к криволинейному интегралу.

¹ Можно доказать, что $u = 0$, если

$$\lim_{(\sqrt{\xi^2 + \eta^2})^{1+\varepsilon}} \rho(\xi, \eta) = 0, \text{ когда } \xi^2 + \eta^2 \rightarrow \infty,$$

причем ε — какая угодно положительная величина.

Пусть требуется определить деформацию поверхности упругого полупространства, когда на поверхности в некоторой области действует нормальное давление p .

Очень часто при практических расчетах полагают в первом приближении давление p распределенным по линейному закону, после чего p определяется из условий равновесия. Как пример разберем случай, когда в прямоугольнике $|x| \leq a$, $|y| \leq b$ задано нормальное давление $p = Ax$. По формулам (3) и (42) получим:

$$\begin{aligned} \frac{\pi E}{1-\nu^2} w = & \int_{-b}^b [\sqrt{(x+a)^2 + (y-\eta)^2} - \sqrt{(x-a)^2 + (y-\eta)^2}] A d\eta + \\ & + \int_{-b}^b \left[\frac{a-x}{\sqrt{(x-a)^2 + (y-\eta)^2}} + \frac{a+x}{\sqrt{(x+a)^2 + (y-\eta)^2}} \right] A a d\eta + \\ & + \int_{-a}^a \left[\frac{b-y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-b)^2}} + \frac{b+y}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y+b)^2}} \right] A \xi d\xi. \end{aligned} \quad (43)$$

Интегралы в правой части выражаются в элементарных функциях. Аналогичными интегралами определяется осадка для случая, когда дано давление, распределенное по линейному закону в любом многоугольнике.

§ 8. Другое применение формула (42) находит себе при расчете неограниченной плиты, лежащей на упругом полупространстве. Будем считать плиту тонкой и нерастяжимой, а скольжение плиты по основанию невозможным.

Для определения реактивного давления p , когда известна осадка $w(u=v=0)$, в нашей работе^[1] получена формула:

$$p = - \frac{E(1-\nu)}{\pi(3-4\nu)(1+\nu)} \int_{-\infty}^{\infty} \int \frac{\Delta w(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}} \quad (44)$$

Применяя преобразование (42) и вспоминая, что $D \Delta^2 w = q - p$, получим¹:

$$\begin{aligned} np = & \int_{-\infty}^{\infty} \int (p - q) \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} d\eta d\xi - \\ & - \int_c^P P \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2} dl + \int_{\gamma} M \cos(Mr) dl, \end{aligned} \quad (45)$$

где P и M — соответственно внешние сосредоточенные силы и моменты, а

$$n = \frac{\pi D(3-4\nu)(1+\nu)}{E(1-\nu)}.$$

¹ Формулу (45) нетрудно обобщить для плиты с переменной жесткостью. В частности, для ступенчатой плиты по линии скачкообразного изменения жесткости имеет место соотношение:

$$\delta \Delta w = M_0 \delta \frac{1}{D}, \quad \delta (\Delta w)' = Q_0 \delta \frac{1}{D},$$

где M_0 и Q_0 — изгибающий момент и поперечная сила, действующие на сечение плиты вдоль линии разрыва жесткости; при этом

$$\Delta^2 w = \frac{q-p}{D(\xi, \eta)}.$$

Формула (45) сводит систему интегро-дифференциальных уравнений (2) и (5) с сингулярным ядром к интегральному уравнению Фредгольма с непрерывным ядром.

§ 9. Упростим полученные выше формулы для случая неограниченной плиты, имеющей круглый, абсолютно жесткий подколонник радиуса R . Будем рассматривать плиту постоянной толщины, заменив действие подколонника на плиту соответствующими силами q . Очевидно, что $\Delta^2 w = 0$ при $r < R$ следовательно, $p - q = 0$.

Существенным в нашей задаче является определение реактивного давления на участке $r > R$, после чего из условия заделки плиты в подколонник определим силы Q и M_1 , распределенные по окружности радиуса R , а затем по формуле (45) определим p для всей бесконечной области. Таким образом наличие жесткого участка не усложняет решения уравнения (45), что является его выгодной особенностью, начиная с симметричного случая.

Пусть результирующие силы, которые приложены к подколоннику, сводятся к центральной силе N и моменту M_0 . Рассмотрим их влияние отдельно.

Определим деформацию плиты с заделкой в подколонник, когда силы распределены по окружности радиуса ρ с интенсивностью $p(\rho)$.

Пользуясь известным решением для симметричной задачи, имеем:

$$\varphi = \frac{a}{r} + br + \frac{p\rho}{2D} r \lg r \quad (R < r < \rho). \quad (46)$$

Считая, что на бесконечности к плите внешние силы не приложены, получим для $r > \rho$:

$$\varphi_2 = \frac{c}{r}. \quad (47)$$

Определяем значение постоянных a , b и c . Из условия $\varphi(R) = 0$ следует:

$$b = -\frac{a}{R^2} - \frac{p\rho}{2D} \ln R.$$

Из условий $\varphi(\rho) = \varphi_2(\rho)$ и $\varphi'(\rho) = \varphi_2'(\rho)$ (последнее следует из того, что внешнего момента при $r = \rho$ нет) получим уравнения:

$$a\left(\frac{\rho}{R^2} - \frac{1}{\rho}\right) + \frac{c}{\rho} = \frac{p\rho^2}{2D} \ln \frac{\rho}{R}, \quad a\left(\frac{1}{\rho^2} + \frac{1}{R^2}\right) - \frac{c}{\rho^2} = \frac{p\rho}{2D} \left(1 + \ln \frac{\rho}{R}\right);$$

откуда следует:

$$\begin{aligned} a &= \frac{p\rho R^2}{4D} \left(1 + 2 \ln \frac{\rho}{R}\right), & b &= -\frac{p\rho}{4D} (1 + 2 \ln \rho), \\ c &= \frac{p\rho^2}{4D} \left(\frac{R^2}{\rho} - \rho + 2 \frac{R^2}{\rho} \ln \frac{\rho}{R}\right). \end{aligned} \quad (48)$$

Для момента у заделки в подколонник, изгибающего плиту в радиальном направлении, согласно формуле (9) получим:

$$M_1(R) = p\rho \ln \frac{\rho}{R},$$

для случая непрерывной нагрузки

$$M_1 = \int_R^\infty p(\rho) \rho \ln \frac{\rho}{R} d\rho. \quad (49)$$

Поперечная сила у заделки, как известно, определяется формулой:

$$Q(R) = \frac{1}{R} \int_R^{\infty} p(\rho) \rho d\rho.$$

Очевидно, в нашем случае симметричной деформации в формуле (45) можно положить $y=0$. Введя полярные координаты

$$x = r, \quad \xi = \rho \cos \alpha, \quad \eta = \rho \sin \alpha$$

и интегрируя по α , нетрудно получить:

$$np = \int_R^{\infty} F(\rho, r) p(\rho) \rho d\rho - RQ(R)F(R, r) - M_1(R)R \frac{\partial F(R, r)}{\partial R}, \quad (50)$$

где

$$F(\rho, r) = 2 \int_0^{\pi} \sqrt{(\rho+r)^2 - 4\rho r \cos^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha = 4(\rho+r) E\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right).$$

[$E(k)$ обозначает полный эллиптический интеграл второго рода].

Вводя новую переменную ($2\psi = \pi - \alpha$), легко получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial \rho} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\rho+r-2r \sin^2 \psi}{\sqrt{(\rho+r)^2 - 4\rho r \sin^2 \psi}} d\psi = 2 \frac{\rho+r}{\rho} E\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right) + \\ + \left(4 - 2 \frac{\rho+r}{\rho}\right) K\left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho+r}\right), \end{aligned} \quad (50')$$

где $K(k)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Формула (29) совпадает с (50), если в первой $R \rightarrow \infty$. Для доказательства следует воспользоваться преобразованием Ландена [4].

§ 10. Уравнение, аналогичное (50), может быть получено для случая, когда к подколоннику приложен момент M_0 , действующий, например, в плоскости roz . Реактивное давление будет функцией двух переменных r и α .

Представим, что осадка w задана в виде:

$$w(r, \alpha) = w_0(r) \cos \alpha. \quad (51)$$

Тогда, пользуясь формулой, приведенной в нашей работе [2] для давления на основание при данной осадке, получим:

$$p = c \cos \alpha \int_0^{\infty} t^2 I_1(tr) \int_0^{\infty} w_0(s) s I_1(st) ds, \quad (52)$$

где c — постоянная, зависящая от жесткости основания, I_1 — функция Бесселя первого порядка.

С другой стороны, реактивное давление на плиту для $r > R$ будет:

$$p = -D\Delta^2 w = -D \cos \alpha \left(\frac{d^2}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{d}{dr} - \frac{1}{r^2} \right) w_0. \quad (53)$$

Из уравнений (52) и (53) можно получить обычное уравнение для определения функции w_0 с одной независимой переменной. Для нас важно следующее: если решение существует, то реактивное давление может быть представлено в виде:

$$p(r, \alpha) = p_0(r) \cos \alpha. \quad (54)$$

Для определения p_0 будем исходить из уравнения (45). Интегрируя по соответствующим окружностям, получим формулу, аналогичную формуле (50), где вместо F следует взять функцию F_0 , причем

$$F_0 = 2 \int_0^{\pi} \cos \alpha \sqrt{(\rho + r)^2 - 4\rho r \cos^2 \frac{\alpha}{2}} d\alpha,$$

или, положив $2\psi = \pi - \alpha$, получим:

$$F_0 = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} (2 \sin^2 \psi - 1) \sqrt{(\rho + r)^2 - 4\rho r \sin^2 \psi} d\psi. \quad (55)$$

Последний интеграл выражается через эллиптические интегралы E и K . В самом деле, нетрудно проверить дифференцированием следующее равенство:

$$\int_0^{\psi} (2 \sin^2 \psi - 1) \sqrt{1 - a \sin^2 \psi} d\psi = A \sin 2\psi \sqrt{1 - a \sin^2 \psi} +$$

$$+ B \int_0^{\psi} \sqrt{1 - a \sin^2 \psi} d\psi + C \int_0^{\psi} \frac{d\psi}{\sqrt{1 - a \sin^2 \psi}},$$

где

$$A = -\frac{1}{3}, \quad B = \frac{1}{3} - \frac{2}{3a}, \quad C = \frac{2}{3a} - \frac{2}{3}.$$

Далее найдем:

$$\frac{\partial F_0}{\partial \rho} = 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{(2 \sin^2 \psi - 1)[(\rho + r) - 2r \sin^2 \psi]}{\sqrt{(\rho + r)^2 - 4\rho r \sin^2 \psi}} d\psi.$$

Аналогично тому, как это сделано выше, преобразуем последний интеграл к нормальным эллиптическим интегралам:

$$\frac{\partial F_0}{\partial \rho} = 4 \left[\frac{(\rho + r)^3}{6\rho^2 r} + \frac{\rho + r}{6\rho} - \frac{(\rho + r)^2}{2\rho r} \right] E \left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho + r} \right) +$$

$$+ 4 \left[\frac{(\rho + r)^2}{2\rho r} + \frac{\rho + r}{6\rho} - \frac{(\rho + r)^3}{6\rho^2 r} - 1 \right] K \left(\frac{2\sqrt{\rho r}}{\rho + r} \right). \quad (56)$$

Таким образом для определения функции p_0 , через которую определяется реактивное давление по формуле (54), получим следующее интегральное уравнение:

$$np_0(r) = \int_R^{\infty} F_0(\rho, r) \rho p(\rho) d\rho - RQ(R, 0)F_0(R, r) - RM_1(R, 0) \frac{\partial F_0(R, r)}{\partial R}, \quad (57)$$

где $Q(R, 0)$ и $M_1(R, 0)$ — поперечная сила и изгибающий момент у заделки в подколонник при $\alpha = 0$.

Рассмотрим деформацию плиты при действии на плиту распределенных по окружности радиуса ρ сил по закону $p \cos \alpha$. Общим решением однородного уравнения (53) будет:

$$w_0 = \left(Ar^3 + B \frac{1}{r} + Cr + D_0 r \lg r \right) \quad (R < r < \rho), \quad (58)$$

где A , B , C и D_0 — пока неопределенные постоянные.

Для участка $r > \rho$ можно принять следующее выражение для деформации:

$$w_{20} = B_2 \frac{1}{r}.$$

В самом деле, легко обнаружить, что $A_2 = D_2 = C_2 = 0$, если предположить, что на бесконечности отсутствуют внешние силы и угол наклона плиты равен нулю.

Для определения оставшихся пяти неизвестных имеем следующие условия:

$$\begin{aligned} w_0(R) &= R \frac{dw_0}{dr} \Big|_{r=R}, & w_0(\rho) &= w_{20}(\rho), \\ \frac{dw_0}{dr} &= \frac{dw_{20}}{dr}, & \frac{d^2 w_0}{dr^2} &= \frac{d^2 w_{20}}{dr^2} \quad (r = \rho), \\ Q(\rho - 0) - Q(\rho + 0) &= p \cos \alpha. \end{aligned} \tag{59}$$

Решая эти уравнения, найдем:

$$\begin{aligned} A &= \frac{p}{16D}, & B &= \frac{p}{16D} (R^4 - 2R^2 \rho^2), & D_0 &= -\frac{p \rho^2}{4D}, \\ C &= \frac{p}{8D} \left(\frac{R^4}{\rho^2} - R^2 + 2\rho^2 \lg \rho \right), & B_2 &= \frac{p}{16D} (\rho^4 - R^4). \end{aligned} \tag{60}$$

Формулы для деформации и напряжений при силах, непрерывно распределенных на плите, нетрудно получить соответствующим суммированием результатов предыдущего элементарного случая.

Выпишем значения для поперечной силы и момента, изгибающего плиту в радиальном направлении у заделки в подколонник при $\alpha = 0$:

$$Q(R, 0) = \frac{1}{2} \int_R^\infty \left(1 - \frac{\rho^2}{R^2} \right) p(\rho) d\rho, \quad M_1(R, 0) = \frac{R}{2} \int_R^\infty \left(\frac{\rho^2}{R^2} - 1 \right) p(\rho) d\rho. \tag{61}$$

В заключение приведем асимптотическую формулу для реактивного давления при любом загрузении плиты:

$$p(r, \alpha) = -\frac{9n}{4\pi^2} \frac{N}{r^5} - \frac{45n}{4\pi^2} \frac{M_0}{r^6} \cos(\bar{M}_0 r) + O\left(\frac{1}{r^{6+\eta}}\right), \tag{62}$$

где N и M_0 — нормальная составляющая и момент всех внешних сил, приложенных к плите, а $O\left(\frac{1}{r^{6+\eta}}\right)$ обозначает функцию, которая при больших r убывает быстрее, чем $\frac{1}{r^6}$, и, следовательно, может быть отброшена. Формула (62) показывает, что вдали от нагрузок реактивное давление не меняет периодически своего знака, а остается по знаку обратным основным реакциям.

Формула (62) существенно облегчает решение уравнений (45), (50) и (57) приближенными способами. При этом применимо все сказанное для случая круглой плиты. Отметим, что ядро уравнения (45) аналогично двукратно итерированному ядру уравнения (44), благодаря чему обеспечивается высокая точность в приближенных вычислениях по вышеприведенным формулам.

При вычислении второго приближения p_2 для случая плиты с круглым подколонником можно основное реактивное давление заменить двумя или одной силой, распределенной соответствующим образом по окружности.

§ 11. Для определения максимального горизонтального усилия в срединной плоскости, которое возникает благодаря тому, что между плитой и основанием невозможно скольжение, воспользуемся формулой^[1]:

$$n_r + n_\theta = - \frac{E(1-2\nu)}{(1-\nu)(3-4\nu)} w, \quad (63)$$

где n_θ — нормальная сила, действующая на радиальное сечение, отнесенная к единице длины плиты, n_r — нормальная сила, действующая на площадку, перпендикулярную к радиусу.

Удлинения волокон вдоль заделки в подколонник равны нулю, следовательно,

$$n_\theta = \nu n_r$$

и из формулы (63) получим:

$$n_r(R) = -0.223E w(R), \quad (64)$$

где принято $\nu = 0.2$.

Знак минус показывает, что при наличии сил трения происходит сжатие плиты.

Определим $w(R)$ для симметричной деформации. В случае наличия подколонника имеем $w(R) = w(0)$. Для определения осадки $w(0)$ надо положить в формуле (2) $x = y = 0$, тогда

$$w(0) = \frac{4(1-\nu)}{\pi(3-4\nu)(1+\nu)E} \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{p(\xi, \eta) dF}{\sqrt{\xi^2 + \eta^2}},$$

или, переходя к полярным координатам

$$\rho = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}, \quad dF = \rho dx d\rho,$$

после интегрирования по α получим:

$$w(R) = w(0) = \frac{8(1-\nu)}{(1+\nu)(3-4\nu)E} \int_0^{\infty} p(\rho) \rho d\rho.$$

Для случая действия момента M_0 согласно формуле (58) найдем:

$$w_0(R) = \frac{1}{8D} \int_R^{\infty} \left[\rho^2 R \left(2 \ln \frac{\rho}{R} - 1 \right) + \frac{R^5}{\rho^2} \right] p(\rho) d\rho,$$

$$n_r(R, 0) = 0.028 \frac{E}{D} \int_R^{\infty} \left[\rho^2 R \left(2 \ln \frac{\rho}{R} - 1 \right) + \frac{R^5}{\rho^2} \right] p(\rho) d\rho,$$

где h — толщина плиты.

Ниже в табл. 2 приведены некоторые значения реактивных давлений, а в табл. 3 — максимальные усилия у заделки.

Таблица 2

$r:R$	$p: \frac{N}{R^2}$			$P_0: \frac{M_0}{R^3}$		
	9.5	0.6	0.08	6	0.9	0.12
0.0	0.0800	0.043	0.026	0	0	0
0.5	0.1040	0.055	0.030	0.073	0.029	0.010
1.0	0.1850	0.075	0.034	0.261	0.095	0.028
1.5	0.0590	0.063	0.034	0.112	0.073	0.030
2	0.0056	0.032	0.029	0.026	0.044	0.026
2.5	0.0000	0.017	0.020	0.005	0.019	0.019
3	0.0005	0.007	0.014	0.000	0.010	0.013
3.5	0.0006	0.002	0.009	0.001	0.005	0.008
4	0.0003	0	0.005	0.001	0.000	0.005

Таблица 3

$R^3:n$	9.5	0.6	0.08	$R^3:n$	6	0.9	0.12
$(M_1)_{\max}: N$	0.086	0.070	0.115	$(M_1)_{\max}: \frac{M_0}{R}$	0.05	0.10	0.12
$(n_r)_{\max}: \frac{N}{R}$	0.11	0.07	0.05	$(n_r)_{\max}: \frac{1000 D}{M_0 R E}$	0.3	4	7
$Q_{\max}: \frac{N}{R}$	0.087	0.127	0.144	$Q_{\max}: \frac{M_0}{R^2}$	0.13	0.19	0.18

Поступила в редакцию 17 X 1939.

Доложена на Всесоюзном совещании по строительной механике при Институте механики Акад. Наук СССР (22—26 ноября 1939 г.).

ЛИТЕРАТУРА

1. Леонов М. Я. Учет горизонтальных сил при расчете неограниченной плиты, лежащей на упругом полупространстве. Сб. „Прикладная математика и механика“. 1939. Т. 3. Вып. 3.
2. Леонов М. Я. К теории расчета упругих оснований. Сб. „Прикладная математика и механика“. 1939. Т. 3. Вып. 2.
3. Филоненко-Бородич М. М. Основы теории упругости. ОНТИ. 1932. Стр. 159.
4. Сикорский Ю. С. Элементы теории эллиптических функций. ОНТИ-НКТП. 1936.
5. Леонов М. Я. О расчете круглой фундаментной плиты. „Вестник инженеров и техников“. 1940. № 4.

ON THE CALCULATION OF FOUNDATION PLATES

M. J. LEONOV

(Summary)

The following formula for the pressure which will result in displacements w of points within a circle of radius R on the surface of an elastic half-solid is deduced in the work:

$$p = \int_0^R \Phi(\rho, r) d\Delta w + \frac{a}{\sqrt{R^2 - r^2}} + b \sqrt{R^2 - r^2},$$

where a and b are constant, Φ is a continuous function which can be calculated in terms of tabular functions; and Δ is the operator of Laplace.

In cases of bending of a plate resting on the elastic half-solid the following relationship

$$d\Delta w = \frac{Q}{D} d\rho$$

hold true for all points, excluding those of application of moment M , in which cases the following relationship hold true:

$$d\Delta w = \frac{M}{D}.$$

The approximate calculation is based on the fact that the margin of error in determining transversal force very little depends upon local inaccuracies in pressure p . This procedure is illustrated by the calculation of a plate supporting a plinth.

For an unlimited plate the problem is reduced to Fredholm's integral equation of the second type, with a continuous nucleus.

In the case of a plate supporting a circular plinth with an eccentric load, this nucleus is simplified.