

РАСЧЕТ БАЛОК И ПЛИТ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

М. И. ГОРБУНОВ-ПОСАДОВ

(Москва)

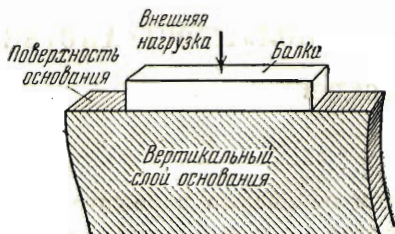
Теория расчета балок и плит на упругом основании переживает глубокий кризис. С каждым годом все настойчивее высказываются возражения против базиса этой теории — гипотезы Винклера-Циммермана о пропорциональности между давлением, приложенным в какой-либо точке поверхности грунта, и осадкой в той же точке. Решающее значение имеют два недостатка гипотезы Винклера: 1) опытами доказано, что коэффициент пропорциональности между давлением и осадкой (коэффициент постели) вопреки гипотезе Винклера зависит от площади штампа, которым производится испытание; 2) поверхность грунта в действительности прогибается не только в нагруженной части, как это утверждает гипотеза Винклера, но и рядом с ней. Впервые высказанные еще в 1922 г. Проктором^[1] и Вигхардом^[2] теоретические сомнения в правильности гипотезы Винклера и соображения о возможности ее замены взглядом на грунт как на упругую среду нашли полное подтверждение в работах, например, такого специалиста по грунтам, как Герсеванов^[3]. И все же до самых последних лет в расчетной практике удерживалась прежняя теория Винклера, так как решение задачи на новой основе встретило большие математические затруднения. Только начиная с 1935—1936 г., благодаря работам проф. Н. М. Герсеванова и Я. А. Мачерета^[4], инж. В. А. Флорина^[5], проф. Б. Н. Жемочкина^[6], проф. Г. Э. Проктора и В. И. Кузнецова^[7], автора настоящей статьи^[8] и других исследователей стало возможным практическое применение новой теории.

Однако расчет по предложенным методам довольно сложен; во всяком случае он сложнее, чем по прежней теории Винклера. Кроме того, все предложенные до сих пор способы расчета проведены в приближенных условиях, — либо на основе плоской задачи^{[4], [5], [6], [8]}, либо на основе пространственной, но с введением произвольных упрощающих предпосылок^{[6], [7], [9], [10]}.

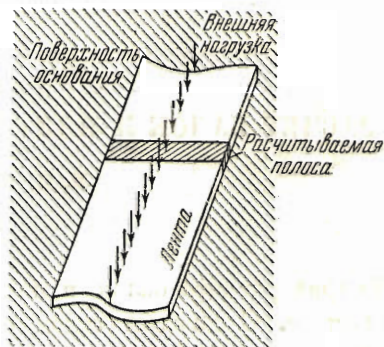
Первый из недостатков новой теории — сложность расчета — преодолевается составлением таблиц готовых расчетных эшор для главнейших из числа встречающихся случаев нагрузок^[11].

Остановимся более подробно на втором недостатке предложенных решений, заключающемся в приближенном характере постановки задачи.

Большая часть авторов придерживается схемы плоской задачи. Между тем схема плоской задачи, строго говоря, справедлива лишь для сравнительно небольшой части балок и плит на упругом основании, например, для случая, когда балка лежит на стене той же ширины, что и балка (плоское напряженное состояние, фиг. 1), или для случая полосы, выделенной в попереч-



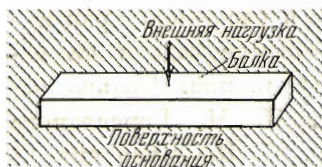
Фиг. 1.



Фиг. 2.

ном направлении из весьма длинной, однородно нагруженной ленты (плоская деформация, фиг. 2). Большею же частью балки и плиты находятся в условиях пространственной задачи (фиг. 3). Поэтому такие балки, как, например, ленточные фундаменты, можно рассчитывать в условиях плоской задачи только в порядке приближения, пренебрегая работой всего грунтового массива вне вертикального слоя под балкой, как это имеет место при расчете в условиях плоского напряженного состояния.

Другие авторы предложили рассчитывать балку в условиях пространственной задачи, но для упрощения решения условно считать, во-первых, что реактивные давления в поперечном направлении постоянны и, во-вторых, что при таком распределении давлений в поперечном направлении постоянны и осадки.



Фиг. 3.

Вопрос о том, какая из приближенных постановок задачи ближе к действительности, остается спорным. Между тем на примерах выяснено, что оба решения приводят к результатам, значительно различающимся. Отсюда следует настоятельная необходимость решения задачи в точных пространственных условиях, если даже не для практического его использования, то хотя бы для установления преимуществ и характера погрешностей приближенных решений.

Решение задачи для балки в точных условиях связано с решением задачи о прямоугольных плитах, так как балка должна рассматриваться как плита с большим значением отношения ее большей стороны к меньшей.

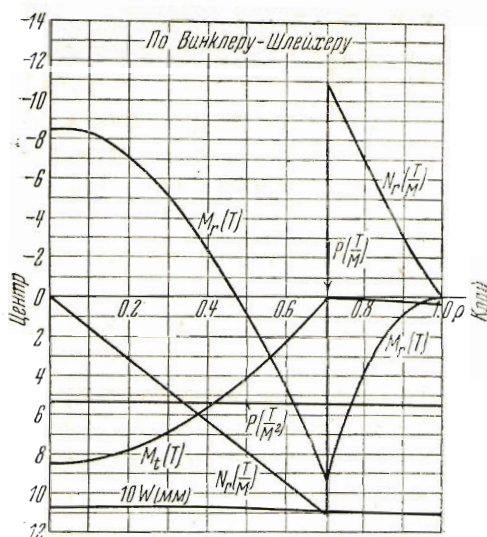
Посвящая этому вопросу основную часть нашей статьи, мы разрешим себе вкратце изложить, какие успехи были сделаны вообще в области расчета плит (не прямоугольных) на упругом полупространстве.

В первую очередь оказались решенными наиболее простые задачи с осевой симметрией: задача о круглых плитах и о плите неограниченных размеров. На тех решениях ^[12], при которых плита принимается за упругий слой, мы останавливаться не будем, подобно тому, как мы не упоминаем об аналогичных решениях, предложенных для балок ^{[12], [13]}. Согласно этим решениям могут быть установлены (с помощью весьма сложных вычислений) только реактивные давления и осадки, причем эти величины почти совпадают с давлениями и осадками, вычисленными при предположении, что плита работает как упругая пластинка.

Первой опубликованной работой (1936 г.), в которой было использовано обычное бигармоническое уравнение изгиба пластинки для плиты на упругом полупространстве, была статья австрийского инженера Боровика о круглых плитах при равномерной нагрузке ^[14], причем автор ограничился определением реактивных давлений. О методе Боровика будет сказано ниже. Далее (1937 г.) появилась статья проф. Габеля ^[15], предложившего решение той же задачи в конечных разностях при любой нагрузке. Это решение мало практично ввиду его сложности и непригодности для плит значительной жесткости. Наиболее широко охвачен вопрос о расчете круглых плит в специальной книге проф. Б. Н. Жемочкина ^[16], видоизменившего для этой цели метод, предложенный им ранее для расчета балок. Согласно этому методу в порядке приближения плавный закон распределения реактивных давлений заменяется ступенчатой поверхностью из концентрических колец. Задача состоит в определении интенсивности реактивных давлений вдоль каждого из этих колец, исходя из условия равновесия и тождества осадок плиты и основания. Благодаря элементарности подхода Жемочкину удалось охватить широкий круг задач, например, о плитах переменной жесткости, о расчете кольцеобразных плит и т. д.

Задача о круглых плитах рассмотрена и нами, причем мы частично использовали работу Боровика. Согласно решению Боровика закон реактивных давлений задается в виде бесконечного степенного ряда с неизвестными коэффициентами. Затем определяются осадки основания и прогибы плиты, также через бесконечные степенные ряды, причем в последних коэффициенты линейно зависят от неизвестных коэффициентов ряда давлений. Используя условие тождества осадок и прогибов, приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях соответствующих рядов, откуда определяются коэффициенты в ряду реактивных давлений. Этот способ совершенно аналогичен методу, примененному инж. Флориным ^[50] и нами ^[8] для расчета балки под равномерной нагрузкой. Однако этот метод не применим для случая нагрузки прерывной и сосредоточенной, когда для разных участков балки или плиты будут действительны различные уравнения прогибов. Это препятствие как для балок, так и для плит удается обойти введением интерполяционных полиномов. Сущность этого метода будет изложена ниже. Для большого числа важнейших случаев нагрузки составлены таблицы готовых эпюр, подобные таблицам для расчета балок.

Приведенное на фиг. 4 и 5 сравнение результатов расчета примера по Винклеру (заимствовано из книги Шлейхера „Kreisplatten auf elastischer



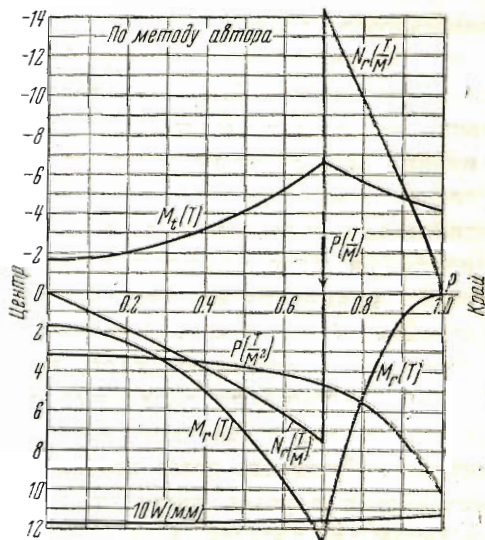
Фиг. 4.

При попытках решить задачу о прямоугольных плитах исследователи ограничивались до сих пор случаем абсолютно жестких плит. Так, еще в 1933 г. Шлейхер предложил грубо приближенное решение, основанное на замене реактивных давлений системой сосредоточенных сил, величина которых определяется из условия постоянства осадок^[20]. Аналогичный способ рекомендует Жемочкин^[6]. Более изящный способ предложил инж. Короткин^[21], пытавшийся с помощью функций, предложенных акад. Галеркиным для определения напряжений и деформаций в упругой среде, выразить реактивные давления через неполные двойные полиномы четвертой степени.

Однако численные результаты Короткина вызывают сомнения: 1) эпюры реактивных давлений имеют в центре выпуклость, направленную в сторону, противоположную той, в какую выпуклость направлена во всех имеющихся точных решениях аналогичных задач (формулы Буссинеска для круга и эллипса, Садовского для бесконечной ленты); 2) при больших значениях отношения сторон (случай абсолютно жесткой балки) по Короткину реактивные давления в продольном направлении постоянны. Если бы это положение (кстати сказать, прямо противоположное упоминавшейся выше гипотезе Проктора^[7] и Жемочкина^[6]) было верно, то в отношении жестких балок пришлось бы вернуться обратно к ги-

Unterlage⁴⁾) и по новой теории наглядно показывает глубокое различие между обоими методами. В примере нагрузка $P = 22$ т/м распределена по окружности радиуса $a = 4.05$ м; радиус плиты $r = 5.7$ м, толщина $h = 2$ м. Упругие постоянные плиты $E_1 = 2 \times 10^6$ т/м², $\nu_1 = 1/6$. Коэффициент постели $K = 5$ кг/см³. Исходя из предположения, что K — среднее отношение между давлениями и осадкой, для грунта установлено $1/(E_0 - \nu_0^2) = 45\,000$ т/м².

Для другой задачи с осевой симметрией — плиты неограниченных размеров, нагруженной сосредоточенной силой, О. Я. Шехтеру^[17], Холлу^[18] и Хоггу^[19] в 1938 г. удалось получить точное решение.



Фиг. 5.

потезе Винклера. Полученные нами результаты (см. ниже) не подтверждают этого вывода.

Заметим, что на основе упомянутых решений для жестких прямоугольных плит можно определить лишь реактивные давления и осадки. Распределение моментов и поперечных сил оставалось невыясненным.

Переходим к изложению нашего решения той же задачи.

1. Абсолютно жесткие прямоугольные плиты на упругом полупространстве

Вертикальные перемещения поверхности упругого изотропного полупространства $w(x, y)$ от нормальных давлений $p(x, y)$, распределенных по прямоугольнику со сторонами $2a$ и $2b$, согласно уравнению Буссинеска^[23] выражаются формулой:

$$w(x, y) = \frac{(1 - \nu_0^2) ab}{\pi E_0} \int_{-1}^1 \int_{-1}^1 \frac{p(\bar{x}, \bar{y}) d\bar{x} d\bar{y}}{\sqrt{a^2(\bar{x} - x)^2 + b^2(\bar{y} - y)^2}}. \quad (1.1)$$

В формуле (1.1) ν_0 и E_0 — коэффициент Пуассона и модуль упругости основания; x и y — координаты перемещающейся точки, приведенные к полусторонам прямоугольника:

$$x = x'/a, \quad y = y'/b,$$

где x' и y' — действительные координаты; \bar{x} и \bar{y} — приведенные координаты элемента нагрузки. Начало координат помещено в центр прямоугольника, ось x направлена параллельно большей стороне $2a$.

После замены

$$\bar{x} = x + \xi, \quad \bar{y} = y + \eta,$$

разложения числителя и знаменателя подинтегрального выражения в двойные степенные ряды, интегрирования и суммирования бесконечных рядов нами получено выражение, позволяющее определить перемещения поверхности основания при заданном давлении с помощью квадратур. Отметим, что для различных областей прямоугольника разложение в ряды приходится выполнять различными способами, однако окончательные выражения оказываются справедливыми для всего прямоугольника в целом. При этом мы предполагаем, что закон распределения давлений $p(x, y)$ выражается непрерывной (вместе с ее производными) функцией. В частном случае, когда закон распределения задан в виде двойного бесконечного степенного ряда:

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{ij} x^i y^j, \quad (1.2)$$

выражение для $w(x, y)$ напишется также в виде двойного ряда:

$$w(x, y) = \frac{(1 - \nu_0^2) a}{\pi E_0} \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} \left(\sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} c_{u,v,i,j} a_{ij} \right) x^u y^v, \quad (1.3)$$

где

$$c_{u,v,i,j} = i! j! \sum_{m=M}^i \sum_{n=N}^j \frac{\beta^{v-j} [(-1)^m + (-1)^{u+m-i}] [(-1)^n + (-1)^{v+n-j}]}{(i-m)! (j-n)! m! n! (u+m-i)! (v+n-j)!} \times \\ \times \frac{d^{v+n-j}}{d\beta^{v+n-j}} \int_0^\beta t^{n-u+i} \int_0^{1/t} \frac{d^{u+m-i}}{dz^{u+m-i}} \frac{z^m}{\sqrt{1+z^2}} dz dt, \quad (1.4)$$

причем отношение сторон $b/a = \beta \leq 1$ и

$$M=0 \quad \text{при} \quad i \leq u; \quad M=i-u \quad \text{при} \quad i \geq u; \\ N=0 \quad \text{при} \quad j \leq v; \quad N=j-v \quad \text{при} \quad j \geq v.$$

Однако при расчете балок и плит на упругом основании закон нормальных давлений неизвестен, и задача состоит в его определении (трением между балкой или плитой и основанием в нашем решении пренебрегается).

Рассмотрим сначала случай абсолютно жесткой плиты. При нагрузке, симметрической относительно обеих координатных осей, будем искать закон давлений в виде ряда (1.2), ограничившись в нем в силу симметрии только четными степенями x и y и перейдя поэтому к удвоенным индексам $2i, 2j$. Из равенства (1.4) можно установить, что при этом и в ряду осадок (1.3) останутся члены тоже только с четными степенями.

Выпишем условие равновесия плиты, проинтегрировав уравнение (1.2):

$$4ab \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{2i,2j}}{(2i+1)(2j+1)} = P, \quad (1.5)$$

где P — суммарная нагрузка на плиту.

Уравнение (1.5) будет первым в бесконечной системе уравнений, остальные уравнения которой получим как следствие требования постоянства осадок под плитой путем приравнивания нулю коэффициентов при всех произведениях $x^{2u} y^{2v}$ (кроме $x^0 y^0$) в уравнении (1.3). Бесконечную систему решаем приближенно, выделив из нее „укороченную“ систему из $n(n+3)/2 + 1$ первых уравнений относительно столько же неизвестных $a_{2i,2j}$, что даст возможность определить коэффициенты полинома степени $2n$, который будет приближением к ряду (1.2). Благодаря вычисленной нами с помощью уравнений (1.4) таблицы алгебраических выражений для $c_{u,v,i,j}$ ($u, v, i, j \leq 6$) решение проводится достаточно быстро для плит с любым отношением сторон $b/a = \beta$.

Для квадрата ($\beta = 1$) таким образом получена формула:

$$p(x, y) = [0.56 + 0.26(x^2 + y^2) + 0.30(x^4 + y^4) - 0.02x^2y^2 + \\ + 0.50(x^6 + y^6) + 0.03(x^4y^2 + x^2y^4)] P/F,$$

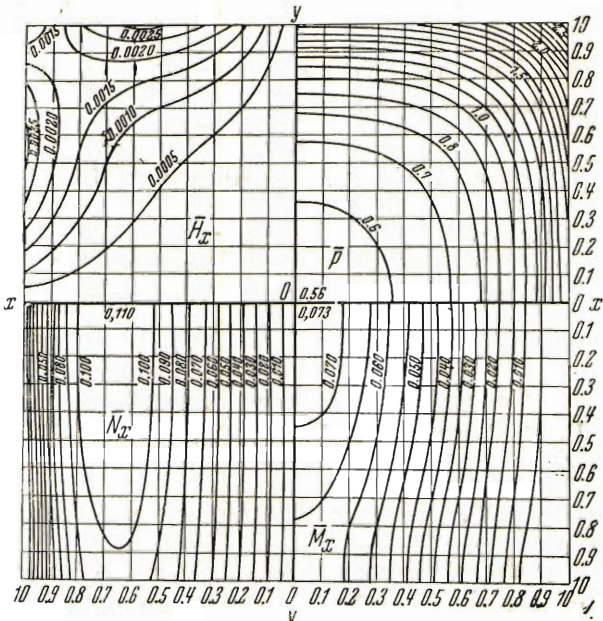
где F — площадь плиты.

То же для плиты при $\beta = 0.5$:

$$p(x, y) = [0.56 + 0.20x^2 + 0.32y^2 + 0.23x^4 + 0.03x^2y^2 + 0.33y^4 + \\ + 0.43x^6 - 0.05x^4y^2 + 0.13x^2y^4 + 0.55y^6] P/F.$$

Графики равных реактивных давлений (в долях P/F) приведены соответственно на фиг. 6 (в первом квадранте) и на фиг. 7. Теоретически у краев плиты должны получаться бесконечно большие давления; в нашем решении они конечны, так как решение приближенное. В реальных условиях работы плиты у краев также будут конечные реактивные давления, что обуславливается возникновением в этих областях пластических деформаций в грунте.

Осадки плит выражаются формулой:



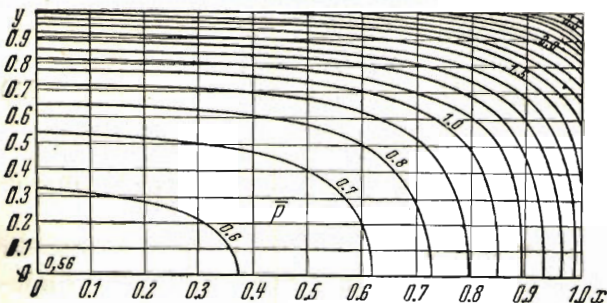
Фиг. 6.

$$w = K \frac{(1 - \nu_0^2)}{E_0} \frac{P}{\sqrt{F}},$$

причем $K = 0.92$ при $\beta = 1$; $K = 0.89$ при $\beta = 0.5$; $K = 0.69$ при $\beta = 0.1$.

Полученные результаты для квадратного штампа очень близки к точному решению Буссинеска для круглого штампа:

$$p = \frac{P}{2F \sqrt{1 - \left(\frac{r}{a}\right)^2}}, \quad K = 0.89,$$



Фиг. 7.

причем из сопоставления последовательных приближений явствует, что точное решение для квадратного штампа было бы еще ближе к решению для круглого штампа.

В случае, если нагрузка имеет эксцентриситет, она заменяется тремя составляющими: силой P , приложенной в центре, и моментами m_x и m_y , действующих в направлении коор-

динатных осей x и y . Для моментной нагрузки (например, m_x) решение аналогично приведенному решению для силы, с той разницей, что уравнение сил (1.5) заменяется уравнением моментов и в уравнении осадок приравняются нулю коэффициенты при степенях типа

$$x^{2u+1} y^{2v} \quad (u+v \neq 0).$$

Для квадратного штампа ($\beta = 1$) при нагрузке m_x нами получено следующее решение:

$$p(x, y) = \frac{m_x}{a^3} (0.37x + 0.23x^3 + 0.12xy^2 + 0.36x^5 - 0.05x^3y^2 + 0.27xy^4),$$

Тангенс угла наклона квадратного штампа:

$$\operatorname{tg} \varphi = 0.60 \frac{(1 - \nu_0^2)}{a^3 E_0} m_x.$$

Точное решение аналогичной задачи для круглого штампа получено В. М. Абрамовым^[24] и К. Е. Егоровым^[25].

2. Гибкие прямоугольные плиты на упругом полупространстве

Переходя к расчету гибких прямоугольных плит, рассмотрим сначала наиболее простой случай равномерной нагрузки q по всей плите. Бигармоническое уравнение плиты в приведенных координатах будет иметь вид:

$$\beta^2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} + 2 \frac{\partial^4 w}{\partial x^2 \partial y^2} + \alpha^2 \frac{\partial^4 w}{\partial y^4} = \lambda \left[q - \sum_{i=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{\infty} a_{2i, 2j} x^{2i} y^{2j} \right], \quad (2.1)$$

где

$$\alpha = \frac{1}{\beta}, \quad \lambda = \frac{a^2 b^2}{D},$$

D — цилиндрическая жесткость.

Условия на краях, как известно, сводятся к уравнениям:

$$\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \nu_1 \alpha^2 \frac{\partial^2 w}{\partial y^2} = 0 \quad \text{при } x=1, \quad (2.2)$$

$$\frac{\partial^3 w}{\partial x^3} + (2 - \nu_1) \alpha^2 \frac{\partial^3 w}{\partial x \partial y^2} = 0 \quad \text{при } x=1 \quad (2.3)$$

(ν_1 — коэффициент Пуассона для плиты) и к двум уравнениям, симметричным уравнениям (2.2) и (2.3) при $y=1$.

Зададимся целью получить решение задачи, при котором выполнялось бы точно: 1) дифференциальное уравнение (2.1), 2) условие равновесия (1.5) и приближенно: 3) условия на краях (2.2), (2.3) и им симметричные, 4) тождество осадок плиты и грунта.

Для решения задачи [т. е. для определения коэффициентов ряда (1.2)] зададимся выражением для осадок плиты также в виде бесконечного ряда:

$$w(x, y) = \sum_{u=0}^{\infty} \sum_{v=0}^{\infty} A_{2u, 2v} x^{2u} y^{2v}. \quad (2.4)$$

Чтобы ряд (2.4) являлся решением уравнения (2.1), необходимо, чтобы коэффициенты удовлетворяли бесконечной системе уравнений:

$$24\beta^2 A_{40} + 8A_{22} + 24\alpha^2 A_{04} = (q - a_{00})\lambda, \\ \frac{(2i+4)!}{(2i)!} \beta^2 A_{2i+4, 2j} + \frac{2(2i+1)!(2j+2)!}{(2i)!(2j)!} A_{2i+2, 2j+2} + \frac{(2j+4)!}{(2j)!} \alpha^2 A_{2i, 2j+4} = -a_{2i, 2j}\lambda \quad (2.5)$$

$$(i=0, 1, 2, \dots; j=0, 1, 2, \dots; i+j \neq 0).$$

Условия на краях (2.2) и (2.3) приводят еще к двум бесконечным системам:

$$\sum_{i=1}^{\infty} [2i(2i-1)A_{2i, 2j} + \nu_1 \alpha^2 (2j+2)(2j+1)A_{2i, 2j+2}] = 0 \\ (j=0, 1, 2, \dots), \quad (2.6)$$

$$\sum_{i=2}^{\infty} [2i(2i-1)(2i-2)A_{2i, 2j} + (2-\nu_1)\alpha^2(2i-2)(2j+2)(2j+1)A_{2i-2, 2j+2}] = 0 \\ (j=0, 1, 2, \dots) \quad (2.7)$$

и к двум, им симметричным.

Для приближенного решения задачи ограничимся в ряде (1.2) степенями $2i+2j \leq 2n$ и в ряде (2.4) степенями $2u+2v \leq 2n+4$, положив в системах (2.5), (2.6), (2.7) и им симметричных $a_{2i, 2j} = 0$ при $2i+2j > 2n$ и $A_{2u, 2v} = 0$ при $2u+2v > 2n+4$. Оставшиеся уравнения в системе (2.5) дают возможность точно удовлетворить требованию 1. Требование 2 будет удовлетворено приближенно, если оставить в системах (2.6) и (2.7) и им симметричных соответственно по $\binom{n+1}{2}$ и по $\binom{n+3}{2}$ первых уравнений (предполагаем, что n — число нечетное). Решение укороченных систем дает:

$$A_{2u, 2v} = \lambda \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} \gamma_{2u, 2v, 2i, 2j} a_{2i, 2j} - \lambda \gamma_{2u, 2v, 0, 0} q \quad (2.8)$$

где

$\gamma_{2u, 2v, 2i, 2j}$ — некоторые отвлеченные величины.

Исходя из требования тождества осадок плиты и грунта, приравниваем коэффициенты $A_{2u, 2v}$ коэффициентам при степенях $x^{2u} y^{2v}$ в ряду (1.3). Таким образом получим, во-первых, значение осадки центра плиты

$$A_{0, 0} = \frac{(1-\nu_0^2)\alpha}{\pi E_0} \sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} c_{0, 0, 2i, 2j} a_{2i, 2j} \quad (2.9)$$

и, во-вторых, укороченную систему

$$\sum_{i=0}^n \sum_{j=0}^{n-i} (\alpha c_{2u, 2v, 2i, 2j} - r \gamma_{2u, 2v, 2i, 2j}) a_{2i, 2j} = -r \gamma_{2u, 2v, 0, 0} q \quad (2.10)$$

($u=0, 1, 2, \dots; v=0, 1, 2, \dots; 0 < u+v \leq n$),

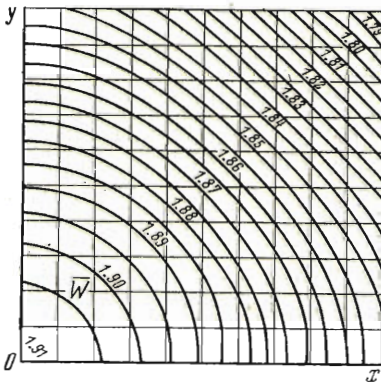
где отвлеченная величина

$$r = \frac{\pi a^2 b E_0}{D(1 - \nu_0^2)}$$

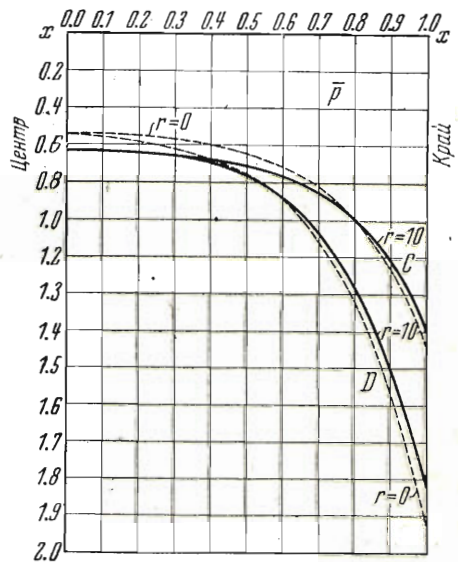
является показателем гибкости прямоугольной плиты.

Остается решить систему из уравнения (1.5) и уравнений (2.10); все поставленные требования при этом будут удовлетворены.

На фиг. 8 показаны линии безразмерных равных осадок \bar{w} квадратной плиты при $r=10, 2n=6$. Действительные осадки определяются по формуле $w = \bar{w} a q (1 - \nu_0^2) / E_0$.



Фиг. 8.



Фиг. 9.

На фиг. 9 и 10 проведено соответственно сравнение безразмерных эпюр реактивных давлений \bar{p} и изгибающих моментов \bar{M}_x вдоль оси x (линии С) и вдоль диагонали (линии Д) для абсолютно жесткой плиты ($r=0$) и гибкой плиты ($r=10$). Действительные значения p и M определяются по формулам $p = \bar{p} q$, $M_x = \bar{M}_x a^2 q$. Из чертежей явствует, что при $r < 10$ квадратные плиты можно приближенно принимать за абсолютно жесткие. Это замечание имеет большое практическое значение, так как фундаментные плиты под отдельные колонны (подушки) обычно удовлетворяют неравенству $r < 10$. Поэтому достаточно дать решения, отвечающие главнейшим видам нагрузки для плит при $r=0$, чтобы этими решениями можно было пользоваться для расчета большинства фундаментных плит. На фиг. 6 представлено такое решение для квадратной железобетонной ($\nu_1=1/6$) плиты при нагрузке, равномерно распределенной по всей ее площади ($2n=6$). На чертеже приведены линии равных безразмерных величин. Формулы перехода от них к действительным

для p и M_x даны выше. Для поперечных сил формула перехода $N = \bar{N}aq$, для крутящих моментов $H_x = \bar{H}_x a^2 q$.

Заметим, что без решения задачи о гибкой плите нельзя установить величины M , N и H и в жесткой плите, так как эти последние могут быть определены только путем предельного перехода при $r \rightarrow 0$. Дело в том, что с возрастанием жесткости ($D \rightarrow 0$) значения $A_{2u, 2v} \rightarrow 0$ ($u+v > 0$), а необходимые для определения величин M , N и H произведения $DA_{2u, 2v}$ стремятся к конечным величинам. Таким образом знание внешних и реактивных давлений само по себе еще недостаточно для установления моментов (в противоположность тому, что имеет место при расчете балок).

Значительно больший интерес, чем непрерывная нагрузка, представляет случай, когда плита нагружена частично вблизи центра колонной или базой колонны по малому прямоугольнику $2\delta a \times 2\delta b$. При этом можно считать, что либо нагрузка непосредственно распределяется по малому прямоугольнику, либо, что плита заделана по периметру колонны или базы. Приведем вкратце решение для первого предположения, заметив при этом, что для второго предположения решение выполняется проще.

На этот раз плита разобьется на две области с различными дифференциальными уравнениями (2.1) ($q \neq 0$ и $q = 0$). Поэтому будем искать для внутренней области решение в виде ряда (2.4), а для внешней в виде аналогичного ряда с прибавлением нескольких бигармонических функций, не раскладываемых в двойные ряды, например:

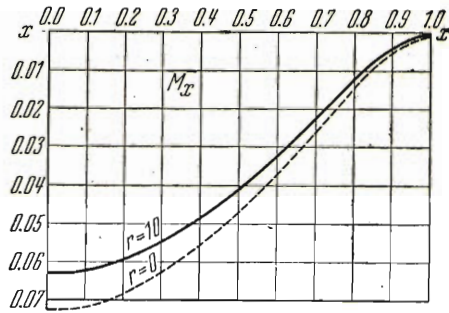
$$w(x, y) = \sum_{u=0}^{\infty} A_{2u, 2v} x^{2u} y^{2v} + B_1 \ln \sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2} + B_2 (\alpha x^2 + \beta y^2) \ln \sqrt{\alpha x^2 + \beta y^2} \quad (2.4')$$

Введение новых произвольных постоянных $A_{2u, 2v}$, B_1 и B_2 позволяет в первом приближении удовлетворить необходимым условиям при $x = \delta, y \leq \delta$:

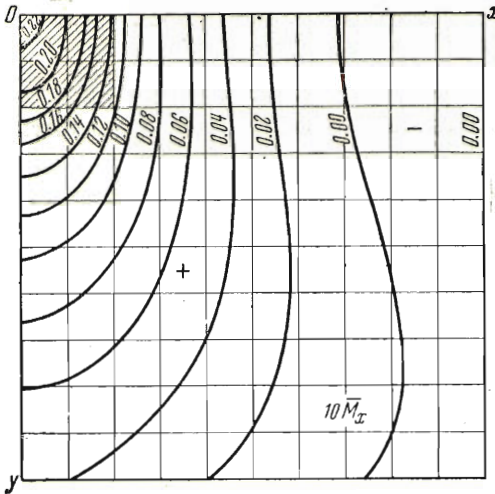
$$w \equiv \dot{w}, \quad w'_x \equiv \dot{w}'_x, \quad w''_{xx} \equiv \dot{w}''_{xx}, \quad w'''_{xxx} \equiv \dot{w}'''_{xxx} \quad (2.11)$$

(и симметричным им), для чего приравниваются коэффициенты при одинаковых степенях в соответствующих одинарных рядах. Определение значений $a_{2i, 2j}$ в случае абсолютно жестких плит уже разъяснялось. В случае же гибкой плиты задача может быть решена введением интерполяционного двойного полинома, позволяющего приближенно написать выражение прогибов плиты в виде двойного степенного ряда, действительного для всей плиты в целом, наподобие того, как одинарные полиномы решают ту же задачу для балки (см. ниже).

На фиг. 11 показаны линии равных моментов \bar{M} для абсолютно жесткой квадратной плиты при $\delta = 0.2$. Заметим, что до сих пор картина распре-



Фиг. 10.



Фиг. 11.

симальных моментов при таком расчете (для малых δ) почти не снижается по сравнению с расчетом плиты на упругом полупространстве.

3. Балки на упругом полупространстве

Исследования показывают, что при больших значениях $\alpha = 1/\beta = a/b$, когда можно пренебречь величинами порядка β^2 и меньшими (что имеет место примерно при $\alpha > 7$), значения коэффициентов $c_{u,v,i,j}$ при четных степенях x [см. формулы (1.3, 1.4)] принимают простую форму:

$$\begin{aligned}
 c_{2u, 2v, 2i, 2j} &= 0 && \text{при } v > 0, \quad i \neq u, \\
 c_{2u, 2v, 2i, 2j} &= \frac{4\beta}{2v(2j - 2v + 1)} && \text{при } v > 0, \quad i = u, \\
 c_{2u, 2v, 2i, 2j} &= \frac{4\beta}{(2i - 2u)(2j + 1)} && \text{при } v = 0, \quad i \neq u, \\
 c_{2u, 2v, 2i, 2j} &= \frac{4\beta}{2j + 1} \left(\ln 2\alpha - d_{2u} + \frac{1}{2j + 1} \right) && \text{при } v = 0, \quad i = u,
 \end{aligned} \tag{3.1}$$

где

$$d_{2u} = \sum_{s=1}^{2u} \frac{1}{s}.$$

Значения $c_{2u+1, 2v, 2i+1, 2j}$ (коэффициентов при нечетных степенях x) определяются также по формулам (3.1) с заменой в них $2u$ на $2u + 1$ и $2i$ на $2i + 1$ (значения коэффициентов при нечетных степенях y нас не интересуют, так как мы считаем, что нагрузка симметрична относительно продольной оси x).

Дальнейшее упрощение расчета получим, если используем условие абсолютной жесткости балок на упругом основании в поперечном направлении. Это условие является следствием малого значения ширины балки; при таких

ления моментов в фундаментальных подушках оставалась невыясненной даже при применении гипотезы Винклера, т. е. при равномерных реактивных давлениях, и плиты рассчитывались исходя из неправдоподобной схемы консольной балки с заделкой у колонны.

В случае большого развития пластических деформаций в грунте более близким к действительности будет предположение о равномерных реактивных давлениях. Этот случай может быть рассчитан по изложенному методу без решения системы (2.10), положив $a_{2i, 2j} = 0$ при $2i + 2j > 0$ и $a_{00} = P/F$.

Любопытно отметить, что значение мак-

симальных моментов при таком расчете (для малых δ) почти не снижается по сравнению с расчетом плиты на упругом полупространстве.

размерах (до 1.5—2 м) показатель гибкости [8], [11] оказывается в обычных условиях настолько близким к нулю, что предположение об абсолютной жесткости является практически точным, наподобие того, как это имеет место и при пользовании гипотезой Винклера.

Итак, считая, что перемещения под балкой в поперечном направлении не зависят от y , приравниваем нулю все коэффициенты в уравнении (1.3) при степенях y , отличных от нуля. Согласно двум первым равенствам (3.1) это требование приведет к распадающейся бесконечной системе уравнений:

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{a_{u,2j}}{2j-2v+1} = 0 \quad (u=0, 1, 2, \dots), \quad (3.2)$$

$$(v=1, 2, 3, \dots),$$

точное решение которой относительно коэффициентов $a_{u,0}$ известно [56], [8]:

$$a_{u,2j} = \frac{1.3.5 \dots (2j-1)}{2.4.6 \dots 2j} a_{u,0}. \quad (3.3)$$

Можно показать, что вследствие равенств (3.3) закон давлений на основании будет выражаться формулой:

$$p(x, y) = \sum_{i=0}^{\infty} \frac{a_{i,0} x^i}{\sqrt{1-y^2}}, \quad (3.4)$$

иначе говоря, что давления в поперечном направлении будут подобны эпюре Садовского¹ для бесконечной жесткой полосы [23].

Для давлений на погонную единицу длины балки интегрированием по y уравнения (3.4) получим:

$$p(x) = \sum_{i=0}^{\infty} a_i x^i, \quad a_i = b\pi a_{i,0}. \quad (3.5)$$

Воспользовавшись равенствами

$$\sum_{j=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2j-1)}{2.4 \dots 2j} \frac{1}{2j+1} = \frac{\pi}{2}, \quad \sum_{j=0}^{\infty} \frac{1.3 \dots (2j-1)}{2.4 \dots 2j} \frac{1}{(2j+1)^2} = \frac{\pi}{2} \ln 2,$$

а также уравнениями (3.3) и (3.5), напишем уравнение перемещений в случае симметричной относительно середины балки нагрузки в следующей форме:

$$w(x) = \frac{2(1-\nu_0^2)}{\pi E_0} \sum_{n=0}^{\infty} \left[\sum_{\substack{i=0 \\ i \neq n}}^{\infty} \frac{a_{2i}}{2i-2n} + (\ln 4\alpha - d_{2n}) a_{2n} \right] x^{2n}. \quad (3.6)$$

¹ На основе формулы (3.4) можно заключить, что вследствие бесконечно больших реактивных давлений вдоль краев балки неизбежно образование пластических деформаций. В нашем изложении мы предполагаем, что зона этих деформаций невелика, ограничиваясь областями, где $p(x, y)$ превышает достаточно высокий предел, и что поэтому результаты решения практически не искажаются. Однако в действительности возможны случаи (например, при песчаном грунте, больших нагрузках, малой ширине балки), когда зона пластических деформаций охватывает значительную часть основания под подошвой балки. Для таких случаев следует отказаться от всяких попыток решить задачу на основе теории упругости, так как теоретическая картина совместной работы балки и грунта будет искажаться не только для поперечного, но в равной мере и для продольного направления.

В случае нагрузки несимметричной прибавляем аналогичные члены с заменой $2i$ на $2i+1$ и $2i$ на $2i-1$.

Неизвестные коэффициенты a_i можно определить приравнованием коэффициентов при одинаковых степенях в ряду осадок грунта (3.6) и в ряду, выражающем прогибы балки y , исходя из тождества $y(x) \equiv w(x)$. Определить ряд для $y(x)$ в случае нагрузки, непрерывно распределенной по какому-либо закону $q=q(x)$, разложимому в степенной ряд, не представляет затруднений путем интегрирования дифференциального уравнения изгиба балки:

$$\frac{E_1 J}{a^4} y^{IV}(x) = q(x) - p(x) \quad (3.7)$$

($E_1 J$ — жесткость балки).

В случае же, если нагрузка прерывна или представляет собой сосредоточенные силы или моменты, написать ряд, выражающий точно прогибы для всей балки в целом, нельзя. Однако эту задачу можно выполнить с хорошим приближением. Так например, при нагрузке сосредоточенной силой P , приложенной на приведенном расстоянии δ вправо от середины балки, после интегрирования уравнения (3.7) получим следующее выражение для прогибов балки:

$$y(x) = y(0) + xy'(0) + \frac{a^4}{E_1 J} [f_1(x) + f_2(x)], \quad (3.8)$$

где

$f_1(x)$ — некоторый степенный ряд, а

$$\begin{aligned} f_2(x) &= 0 && \text{при } -1 \leq x \leq \delta, \\ f_2(x) &= \frac{P}{a} \frac{(x-\delta)^3}{6} && \text{при } \delta \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

Функцию $f_2(x)$ можно приближенно заменить полиномом, коэффициенты которого определяются приравнованием значений полинома значениям функции $f_2(x)$ в равноотстоящих узлах интерполяции. После такой замены поставленная задача будет выполнена.

Введя условие равновесия балки и выполнив указанное выше приравнование коэффициентов в уравнениях (3.6) и (3.7), получим бесконечную систему для определения неизвестных a_i . Эту систему решаем приближенно, заменив ее укороченной системой. Так например, для случая сосредоточенной силы P , приложенной в середине балки, такая укороченная система из шести уравнений имеет вид:

$$\begin{aligned} \sum_{i=0}^5 \frac{a_{2i}}{2i+1} &= \frac{P}{2a}, \\ \sum_{i=0}^5 \left(\frac{1}{2i-2} - \frac{\alpha}{2} x_{2i} \right) a_{2i} + \left(\ln 4\alpha - d_2 - \frac{\alpha}{2} x_2 \right) a_2 &= -\frac{\alpha}{2} \left(\frac{Pt}{2a} + r_2 \right), \\ \sum_{i=0}^5 \frac{a_{2i}}{2i-2u} + (\lg 4\alpha - d_{2u}) a_{2u} + \frac{\alpha}{2u} \lambda_{2u-4} a_{2u-4} &= -\frac{\alpha}{2u} r_{2u} \quad (u=2, 3, 4, 5). \end{aligned} \quad (3.9)$$

В этих уравнениях отвлеченная величина t — показатель гибкости балки:

$$t = \frac{\pi E_0 b a^3}{2(1 - \nu_0^2) E_1 J}, \quad (3.10)$$

$$\chi_{2i} = \frac{t}{(2i+1)(2i+2)}, \quad \lambda_{2u-4} = \frac{t}{(2u-3)(u-2)(2u-1)},$$

$$r_{2u} = t \rho_{2u} \frac{P}{a}, \quad \rho_2 = -0.0185, \quad \rho_4 = -0.7963, \quad \rho_6 = 2.1943, \\ \rho_8 = -3.3384, \quad \rho_{10} = 1.7657.$$

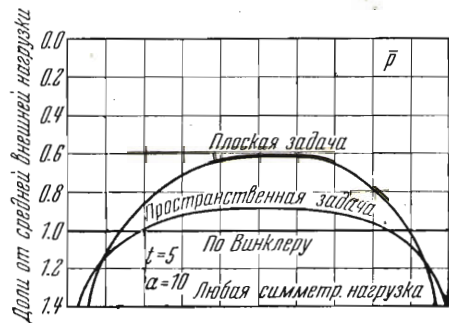
Все другие случаи нагрузки решаются также с помощью системы (3.9) с заменю в ней свободных членов другими, как это подробно объяснено нами в статье о расчете балок в условиях плоской задачи^[8], где приведены значения этих членов для всевозможных нагрузок. При несимметричной нагрузке к системе (3.9) добавляется вторая система относительно a_{2i+1} , состоящая из 5 уравнений и почти аналогичная первой. Последовательно проинтегрировав уравнение реактивных давлений, можно получить формулы для определения перерезывающих сил, моментов и прогибов, общие для всех видов нагрузки. Таким образом предлагаемый расчет, будучи более сложным, чем расчет по таблицам^[11], все же вполне может быть использован в инженерной практике.

При решении бесконечных систем уравнений, вообще говоря, требуется исследовать вопросы существования и единственности решения^[26]. Провести подобное исследование в отношении нашей системы (3.9) было бы весьма сложно. Однако существует другой способ, позволяющий исчерпывающим образом убедиться как в правильности, так и в достаточной точности решения, причем этим путем контролируется не только влияние замены бесконечной системы системой укороченной, но и величина ошибки, связанной с введением интерполяционного полинома. Именно мы можем, определив по предлагаемому методу приближенный закон реактивных давлений, определить затем точные значения осадок грунта и прогибов балки при нагрузке этим приближенным давлением. Степень расхождения этих величин и будет служить критерием правильности и точности решения. Такая проверка показывает практически полное совпадение осадок и прогибов почти вдоль всей балки и незначительное расхождение у самых ее концов, быстро уменьшающееся по мере увеличения числа уравнений в системе (3.9), причем это увеличение почти не оказывает влияния на другие эпюры.

Приводим примеры расчета:

1) Балка, принимаемая за абсолютно жесткую, имеет отношение длины к ширине $\alpha = 10$. Нагрузка, равномерно распределенная, q . Реактивные давления по расчету оказались:

$$p = q(0.88 + 0.14 x^2 + 0.11 x^4 + 0.10 x^6 + 0.09 x^8 + 0.26 x^{10}).$$

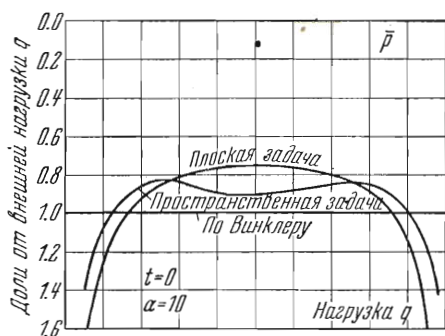


Фиг. 12.

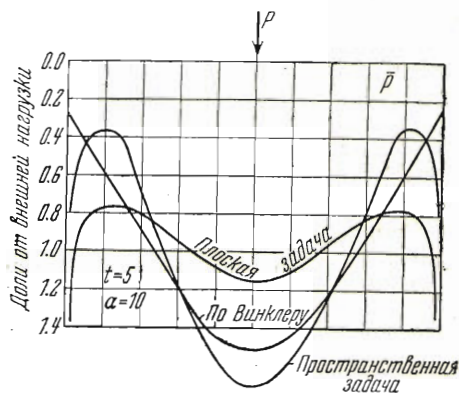
Эпюра этих давлений изображена на фиг. 12.

Если такая балка нагружена в середине сосредоточенной силой P , уравнение реактивных давлений остается тем же с заменой множителя q на $P/2a$.

2) Балка с показателем гибкости $t=5$ и отношением сторон $\alpha=10$. Это соответствует, например, случаю, когда железобетонная балка ($E_1=21 \times 10^4$ кг/см²) прямоугольного сечения высотой $h=50$ см и шириной $2b=60$ см при длине $2a=6$ м лежит на глинистом основании средней плотности с модулем упругости (сжимаемости) $E_0=500$ кг/см² и коэффициентом Пуассона $\nu_0=0.35$. Результаты будут верны и для любой другой балки, если ее геометрические размеры пропорциональны тем, что приведены в примере, а отношение модулей упругости E_1 и E_0 неизменно.



Фиг. 13.



Фиг. 14.

При равномерно распределенной нагрузке q получаем (фиг. 13):

$$p = q(0.92 - 0.64x^2 + 0.95x^4 + 0.30x^6 + 0.16x^8 + 0.43x^{10}).$$

При нагрузке сосредоточенной силой в середине балки (фиг. 14):

$$p = \frac{P}{a}(0.85 - 2.46x^2 + 7.81x^4 - 17.39x^6 + 16.49x^8 - 4.85x^{10}).$$

На всех приведенных чертежах, кроме эпюр, полученных из решения в пространственных условиях, приведены эпюры, вычисленные: 1) согласно решению в условиях плоской задачи и 2) согласно гипотезе Винклера. Последние вычислены, исходя из условного коэффициента постели K , под которым понималось отношение средних реактивных давлений к средним осадкам, причем за последние принимались осадки, установленные при решении в пространственных условиях. Для случая $t=5$ и нагрузки P , таким образом, получено $K=0.072\pi E_0/(1-\nu_0^2)b$, что, например, для приведенных выше числовых значений E_0 , ν_0 и b дает $K=4$ кг/см³. Для случая нагрузки q в тех же условиях $K=0.082\pi E_0/(1-\nu_0^2)b=4.5$ кг/см³.

Для сравнения на фиг. 15 и 16 приведены также безразмерные осадки \bar{u} при $t=5$ для обеих нагрузок, определенные тремя методами. При этом осадки по „плоскому“ решению условно приравнены в середине к осадкам по „пространственному“ решению, так как в условиях плоской задачи могут

быть вычислены только относительные осадки, а не абсолютные. Действительные осадки определяются по формулам:

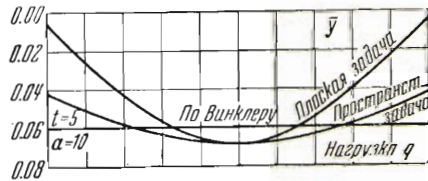
$$y = \bar{y} \frac{qa^4}{E_1 J} \quad \text{и} \quad y = \bar{y} \frac{Pa^3}{E_1 J}.$$

Максимальное значение изгибающих моментов для всех разобранных выше случаев приведено ниже.

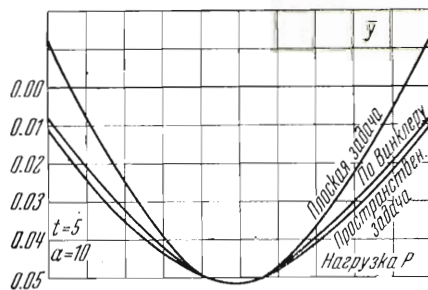
	Пространственная задача	Плоская задача	По Винклеру
Абсолютно жесткая балка, нагрузка q	$0.039 qa^2$	$0.136 qa^2$	0
Та же балка при нагрузке P	$0.270 Pa$	$0.318 Pa$	$0.25 Pa$
Балка при $t=5$ и нагрузке q	$0.050 qa^2$	$0.088 qa^2$	0
Балка при $t=5$ и нагрузке P	$0.184 Pa$	$0.249 Pa$	$0.196 Pa$

Отметим, что в большинстве приведенных примеров данные „пространственного“ решения чуть ли не ближе к данным по Винклеру, чем по „плоскому“ решению. Однако было бы ошибочно сделать отсюда вывод, что решение в условиях плоской задачи не дает преимуществ по сравнению с „классической“ теорией Винклера. Прежде всего сравнительная близость между эпюрами по пространственному решению и по Винклеру обуславливается в основном тем, что коэффициент постели определяется, исходя из полученного пространственного решения, а это механически повлекло за собой сближение результатов расчета. Во-вторых, — что особенно важно, — плоская задача дает, так же как и пространственная, положительные моменты в случае равномерной нагрузки, в то время как по гипотезе Винклера эти моменты вообще отсутствуют. Правда, указанные моменты оказываются для жестких балок при „плоском“ решении значительно преувеличенными. Однако по мере уменьшения жесткости балки или увеличения ее длины эти моменты сближаются с моментами по „пространственному“ решению.

Значение этого вывода делается ясным, если принять во внимание, что в большинстве случаев нагрузка на балку состоит из ряда сосредоточенных сил (ленточные фундаменты). А нагрузка в виде ряда сосредоточенных сил является приближением к распределенной нагрузке. Именно этим и объясняется, почему по гипотезе Винклера в ленточных фундаментах наблюдаются как положительные (под колоннами), так и отрицательные (в пролетах) моменты; кривизна по Винклеру направлена то в одну, то в другую сторону.

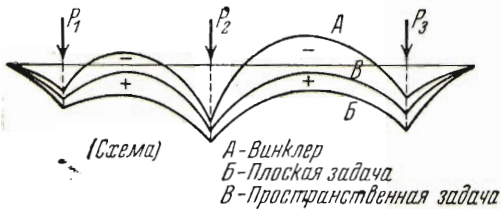


Фиг. 15.



Фиг. 16.

По расчету же в условиях плоской задачи балка при нагрузках, обычных для ленточных фундаментов, имеет кривизну одного знака, т. е. выпуклость у нее направлена вниз, как в предельном случае — равномерной нагрузки. Пространственное решение приводит в основном к тем же результатам, хотя здесь возможны и небольшие отрицательные пролетные моменты (фиг. 17). Более точное исследование вопроса может быть получено только после решения задачи о бесконечной и полубесконечной балках на упругом полупространстве.



Фиг. 17.

Пространственный расчет для большинства обычных на практике нагрузок будет давать по сравнению с „плоским“ снижение излишнего запаса прочности.

Приведем еще для сопоставления результаты расчета балки на упругом полупространстве согласно упрощенной схеме Проктора-Кузнецова^[7] и Жемочкина^[6]. Этот расчет можно провести, воспользовавшись равенствами (3.1), причем вместо того, чтобы вводить условие о поперечной жесткости балки, положить все $a_{ij} = 0$ при $j \neq 0$. Затем следует положить в уравнении (1.3) $y = 0$, а далее решать задачу приравниванием коэффициентов в уравнениях осадок и прогибов, как и по предлагаемому нами методу.

Для гибкой балки при $t = 5$, $\alpha = 10$ и равномерно распределенной нагрузке q таким путем при упрощенной схеме получено:

$$p = q(0.95 - 0.04x^2 + 0.12x^4 + 0.09x^6 + 0.08x^8 + 0.16x^{10}),$$

$$M_0 = 0.019qa^2.$$

Для той же балки при сосредоточенной силе P в середине балки:

$$p = \frac{P}{a}(0.82 - 2.08x^2 + 6.04x^4 - 13.62x^6 + 13.51x^8 - 4.23x^{10});$$

$$M_0 = 0.190Pa.$$

Таким образом при нагрузке сосредоточенной силой упрощенная схема дает моменты, более близкие к моментам, вычисленным в точных условиях пространственной задачи, чем „плоское“ решение. Однако при распределенной нагрузке, а следовательно, и при нагрузке рядом сосредоточенных сил, моменты по упрощенной схеме окажутся преуменьшенными, в то время как плоское решение будет давать добавочный запас прочности. Расчет же по гипотезе Винклера приводит к большим отрицательным моментам, заставляя бесцельно ставить лишнюю верхнюю арматуру.

Поступила в редакцию 14/XI 1939.

Доложена на Всесоюзном совещании по строительной механике при Институте механики Акад. Наук СССР (22—26 XI 1939).

ЛИТЕРАТУРА

1. Проктор Г. Э. Об изгибе балок, лежащих на сплошном упругом основании, без гипотезы Винклера-Циммермана. Дипломная работа в Ленингр. технолог. ин-те. 1922. Доклад о работе был сделан в Геттингенском институте прикладной математики на семинаре А. Прандтля в 1927 г. Краткое изложение (не совсем точное) приведено в книге В. Н. Кузнецова [7а] в § 3.
2. Wiegardt K. Über den Balken auf nachgiebiger Unterlage. „Zs. für ang. Math. u. Mech.“ 1922. Bd. 2. H. 3.
3. Герсеванов Н. М. Основы динамики грунтовой массы. 1937.
4. Герсеванов Н. М. и Мачерет Я. А. К вопросу о бесконечно длинной балке на упругой почве, нагруженной силой. „Сборник НИИС Фундаментстроя“. 1937. № 8.
5. Флорин В. А. а) К расчету сооружений на слабых грунтах. б) Определение реакций полуплоскости посредством применения строки Маклорена. „Сборник Гипроэнергопроекта“. 1936—1937, №№ 1 и 2.
6. Жемочкин Б. Н. Расчет балок на упругом пространстве и полуплоскости. 1937.
7. Кузнецов В. И. а) Балки на сплошном упругом основании. 1938. б) Теория расчета прямоугольных балок, лежащих на сплошном упругом основании, как на изотропном упругом полупространстве. „Труды Моск. ин-та инж. транспорта им. Сталина“. 1939. Вып. 55.
8. Горбунов-Посадов Н. И. Расчет балок на упругом основании в условиях плоской задачи теории упругости. „Сборник НИИС Фундаментстроя“. 1937. № 8.
9. Schleicher F. Senkungsmittelwert und Aehnlichkeitsbedingung für Platten und Balken auf isotroper elastischer Unterlage. „Zs. für ang. Math. u. Mech.“ 1928. Bd. 8.
10. Habel A. „Der Bauingenieur“. Febr. 1938.
11. Горбунов-Посадов М. И. Таблицы для расчета балок на упругом основании. 1939.
12. Marguerre K. Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in den dicken Platten. „Ingenieur Archiv“. 1933. Bd. IV.
13. Альперин И. Г. Задача о бесконечно длинной балке на упругой полуплоскости. „Приклад. мат. и мех.“ 1939. Т. II. Вып. 3.
14. Borowicka H. Influence of Rigidity of a Circular Foundation Slab of the Distribution of Pressure over the Contact Surface. „Proceedings of the International Conference on Soil Mechanics“. 1936. Vol. II.
15. Habel A. „Der Bauingenieur“. 1937. H. 15—16.
16. Жемочкин Б. Н. Расчет круглых плит на упругом основании на симметричную нагрузку. 1938.
17. Шехтер О. Я. Расчет бесконечной фундаментной плиты на упругом основании конечной и бесконечной жесткости при нагрузке сосредоточенной силой. „Сборник лаборатории оснований и фундаментов ВОДГЕО“. № 9.
18. Holl D. Thin Plates of Elastic Foundation. „Journal of Applied Mechanics“. 1938. № 3.
19. Hogg A. Equilibrium of Thin Plate Symmetrically Loaded Resting on an Elastic Foundation of Infinite Depth. „The London Philosophical Magazine“. 1938. № 168.
20. Schleicher F. Die Verteilung der Bodenpressungen unter starren Gründungskörpern. „Der Bauingenieur“. 1933. H. 17—18.
21. Короткий В. Г. Приближенное решение объемной задачи о жестком фундаменте. „Гидротехническое строительство“. 1938. № 10.
22. Горбунов-Посадов М. И. Балки и прямоугольные плиты, лежащие на основании, принимаемом за упругое полупространство. ДАН. 1939. Т. XXIV. № 5.
23. Тимошенко С. Т. Теория упругости. 1927.
24. Абрамов В. М. Исследование случая несимметричного давления штампа круглого сечения на упругое полупространство. ДАН. Т. XXIII. № 8.
25. Егоров К. Е. Коэффициент неравномерного сжатия для круглого фундамента. „Строительная промышленность“. 1940. № 6.
26. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений частных производных.

CONCERNING THE CALCULATION OF BEAMS AND PLATES ON THE ELASTIC HALF-SPACE**M. I. GORBOUNOV-POSADOV**

(Summary)

The article begins with a short historical introduction dealing with the calculation of beams and plates resting on an elastic foundation, on the basis of the new hypothesis regarding the ground as an elastic medium. The author then deals, in a more detailed manner, with his procedure for computing the rectangular plates and beams resting on the elastic half-space.

By means of expressions (1.3) and (1.4) for the displacements of the ground due to the pressure distributed over the rectangular area of its surface (in accordance with law (1.2)) the author works out a procedure for complete computation of flexible and absolutely rigid rectangular plates loaded throughout their whole length as well as in part. For the larger ratios of the sides of a rectangle $\alpha = a/b$ the formula (1.4) is simplified and becomes appropriate for the beams (3.1).

Further, by introducing the assumption of absolute rigidity of beam in the transversal direction a more simple expression (3.6) for the displacements of ground is obtained.

Taking equality of displacements of ground and deflections of beam as a starting point and then equating the coefficients of the terms of infinite power series, the author establishes a system of equations (3.9). By means of this system the problem can be solved.

At the end of the paper the results regarding the calculation of the beam as a spacial problem, and the results according to Winkler, and also as a plane problem are compared.
