А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ | **INSTITUTE OF MECHANICS**
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА" | **JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS**

Т. IV, в. 3, 1940

СИММЕТРИЧНАЯ ДЕФОРМАЦИЯ И КРУЧЕНИЕ АНИЗОТРОПНОГО ТЕЛА ВРАЩЕНИЯ С АНИЗОТРОПИЕЙ ЧАСТНОГО ВИДА

С. Г. ЛЕХНИЦКИЙ

(Саратов)

Из числа различных случаев упругого равновесия тела вращения из однородного изотропного материала особый интерес представляют случаи, когда тело, деформируясь, остается телом вращения. Различают два таких случая, известные под названием: 1) симметричной деформации и 2) кручения [1]. В случае симметричной деформации составляющие напряжения удается выразить через одну функцию, удовлетворяющую дифференциальному уравнению 4-го порядка (бигармоническому). Задача о кручении тела вращения также сводится к определению одной функции, которая удовлетворяет уравнению 2-го порядка.

В настоящей статье рассматривается вопрос о симметричной деформации и кручении тела вращения из однородного анизотропного материала с анизотропией частного вида, которая характеризуется следующим: все направления, лежащие в плоскостях, нормальных к оси тела, эквивалентны в отношении упругих свойств.

Задача о симметричной деформации такого тела сводится, как и в случае изотропного тела, к определению одной функции, только уравнение, которому она удовлетворяет, получается более сложным. То же самое можно сказать и о другом случае — кручении.

В статье дается вывод общих формул для составляющих напряжения и уравнений для функций напряжения, а также рассматриваются частные задачи — задачи об упругом равновесии анизотропного полупространства, сплошного и имеющего цилиндрическую полость, и задача о кручении конического стержня.

1. Общие уравнения

Рассмотрим упругое равновесие тела вращения, изготовленного из однородного анизотропного материала, под действием каких-либо внешних усилий.

Примем следующие ограничения: 1) внутреннее строение тела таково, что все направления, лежащие в плоскостях, нормальных к оси тела, являются эквивалентными в отношении упругих свойств, или, иначе говоря, тело является изотропным в плоскостях, нормальных к его оси[1]; 2) материал

[1] Ляв называет тело, обладающее анизотропией этого рода, „трансверсально-изотропным" [2].

следует обобщенному закону Гука; 3) деформации, испытываемые телом, малы. Поместим начало координат в центре тяжести какого-нибудь поперечного сечения и направим ось z вдоль оси тела, а оси x, y — произвольно (фиг. 1).

Для составляющих напряжения и деформации примем обычные обозначения (как в курсе теории упругости С. П. Тимошенко [3]).

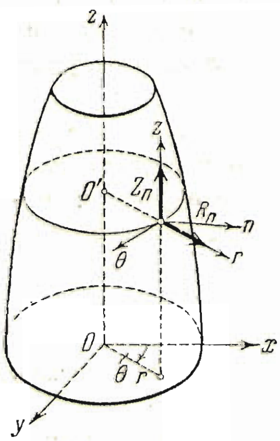
Уравнения обобщенного закона Гука для указанной системы координат запишутся таким образом:

$$\begin{aligned} \varepsilon_x &= a_{11}\sigma_x + a_{12}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, & \gamma_{yz} &= a_{44}\tau_{yz}, \\ \varepsilon_y &= a_{12}\sigma_x + a_{11}\sigma_y + a_{13}\sigma_z, & \gamma_{xz} &= a_{44}\tau_{xz}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_x + a_{13}\sigma_y + a_{33}\sigma_z, & \gamma_{xy} &= 2(a_{11}-a_{12})\tau_{xy}, \end{aligned} \tag{1.1}$$

где a_{11}, a_{12}, a_{13}, a_{33}, a_{44} — упругие постоянные [2],

$$\begin{aligned} a_{11} &= \frac{1}{E}, & a_{33} &= \frac{1}{E_z}, & a_{13} &= -\frac{\nu_z}{E} = -\frac{\nu'}{E_z}, \\ a_{12} &= -\frac{\nu}{E}, & a_{44} &= \frac{1}{G_z}, & 2(a_{11}-a_{12}) &= \frac{1}{G}. \end{aligned} \tag{1.2}$$

Здесь E — модуль Юнга для растяжения-сжатия в плоскостях, нормальных к оси z, ν — коэффициент Пуассона, характеризующий поперечное сокращение в плоскости, нормальной к оси z при растяжении в той же плоскости, E_z — модуль Юнга для растяжения-сжатия в направлении, параллельном оси z, ν_z — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в направлении оси z при растяжении в плоскости, нормальной к оси z, ν' — коэффициент Пуассона, характеризующий сокращение в плоскости, нормальной к оси z при растяжении в направлении оси z, G — модуль сдвига для плоскостей, нормальных к оси z, G_z — модуль сдвига для плоскостей, параллельных оси z.



Фиг. 1.

При исследовании вопроса удобнее пользоваться цилиндрической системой координат r, θ, z с осью z, направленной по оси тела (фиг. 1). В силу эквивалентности всех направлений в плоскостях, нормальных к z, уравнения обобщенного закона Гука для выбранной нами цилиндрической системы координат запишутся аналогично (1.1):

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= a_{11}\sigma_r + a_{12}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, & \gamma_{\theta z} &= a_{44}\tau_{\theta z}, \\ \varepsilon_\theta &= a_{12}\sigma_r + a_{11}\sigma_\theta + a_{13}\sigma_z, & \gamma_{rz} &= a_{44}\tau_{rz}, \\ \varepsilon_z &= a_{13}\sigma_r + a_{13}\sigma_\theta + a_{33}\sigma_z, & \gamma_{r\theta} &= 2(a_{11}-a_{12})\tau_{r\theta}. \end{aligned} \tag{1.3}$$

Между составляющими деформации и проекциями смещения u, v, w на координатные направления r, θ, z в случае малых деформаций существуют зависимости:

$$\begin{aligned} \varepsilon_r &= \frac{\partial u}{\partial r}, & \varepsilon_\theta &= \frac{1}{r}\frac{\partial v}{\partial \theta} + \frac{u}{r}, & \varepsilon_z &= \frac{\partial w}{\partial z}, \\ \gamma_{\theta z} &= \frac{1}{r}\frac{\partial w}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial z}, & \gamma_{rz} &= \frac{\partial u}{\partial z} + \frac{\partial w}{\partial r}, & \gamma_{r\theta} &= \frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial \theta} + \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r}. \end{aligned} \tag{1.4}$$

Составляющие напряжения в цилиндрических координатах удовлетворяют уравнениям равновесия (4):

$$\begin{gathered}
\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}+R=0,\\
\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \sigma_\theta}{\partial \theta}+\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z}+\frac{2\tau_{r\theta}}{r}+\Theta=0,\\
\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{1}{r}\frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial \theta}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}+Z=0
\end{gathered} \tag{1.5}$$

(R, Θ, Z — проекции объемных сил на координатные направления на единицу объема).

2. Симметричная деформация

Рассмотрим случай, когда объемные силы отсутствуют, а распределение внешних усилий обладает симметрией вращения (относительно оси тела — z), или, иначе говоря, внешние усилия не имеют составляющих в направлении касательных к параллелям тела вращения и не меняются вдоль параллелей (фиг. 1).

Естественно предположить, что плоские сечения, проходящие через ось тела, останутся плоскими и после деформации и тело после деформации останется телом вращения, т. е.

$$v=0, \quad u=u(r, z), \quad w=w(r, z). \tag{2.1}$$

На основании зависимостей (1.4) получаем:

$$\varepsilon_r=\frac{\partial u}{\partial r}, \quad \varepsilon_\theta=\frac{u}{r}, \quad \varepsilon_z=\frac{\partial w}{\partial z}, \quad \gamma_{rz}=\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}, \quad \gamma_{\theta z}=0, \quad \gamma_{r\theta}=0. \tag{2.2}$$

Из уравнений обобщенного закона Гука следует:

$$\tau_{\theta z}=0, \qquad \tau_{r\theta}=0. \tag{2.3}$$

Остаются уравнения:

$$\begin{aligned}
\varepsilon_r&=a_{11}\sigma_r+a_{12}\sigma_\theta+a_{13}\sigma_z, & \varepsilon_z&=a_{13}\sigma_r+a_{13}\sigma_\theta+a_{33}\sigma_z,\\
\varepsilon_\theta&=a_{12}\sigma_r+a_{11}\sigma_\theta+a_{13}\sigma_z, & \gamma_{rz}&=a_{44}\tau_{rz}.
\end{aligned} \tag{2.4}$$

Уравнения равновесия принимают вид:

$$\frac{\partial \sigma_r}{\partial r}+\frac{\partial \tau_{rz}}{\partial z}+\frac{\sigma_r-\sigma_\theta}{r}=0, \qquad \frac{\partial \tau_{rz}}{\partial r}+\frac{\partial \sigma_z}{\partial z}+\frac{\tau_{rz}}{r}=0. \tag{2.5}$$

Исключая u и w из выражений (2.2), получаем зависимости:

$$\varepsilon_r-\frac{\partial}{\partial r}(r\varepsilon_\theta)=0, \qquad \frac{\partial^2 \varepsilon_r}{\partial z^2}+\frac{\partial^2 \varepsilon_z}{\partial r^2}-\frac{\partial^2 \gamma_{rz}}{\partial r\,\partial z}=0. \tag{2.6}$$

Выражая составляющие деформации через составляющие напряжения [на основании (2.4)], получаем два уравнения, содержащие только составляющие напряжения:

$$\begin{gathered}
a_{11}\sigma_r+a_{12}\sigma_\theta+a_{13}\sigma_z-\frac{\partial}{\partial r}\left[r\left(a_{12}\sigma_r+a_{11}\sigma_\theta+a_{13}\sigma_z\right)\right]=0,\\
\frac{\partial^2}{\partial z^2}\left(a_{11}\sigma_r+a_{12}\sigma_\theta+a_{13}\sigma_z\right)+\frac{\partial^2}{\partial r^2}\left(a_{13}\sigma_r+a_{13}\sigma_\theta+a_{33}\sigma_z\right)-a_{44}\frac{\partial^2 \tau_{rz}}{\partial r\,\partial z}=0.
\end{gathered} \tag{2.7}$$

Присоединяя к последним уравнениям уравнения равновесия (2.5), получим систему четырех уравнений для определения четырех неизвестных функций: σ_r, σ_θ, σ_z и τ_{rz}.

Как и в случае изотропного тела, в нашем случае оказывается возможным выразить составляющие напряжения через одну функцию напряжений $\varphi(r, z)$.

Положим:

$$\sigma_r = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{b}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right], \quad \sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[c\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right) + d\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],$$
$$\sigma_\theta = -\frac{\partial}{\partial z}\left[b\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right], \quad \tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right]. \tag{2.8}$$

Требуя, чтобы эти выражения удовлетворяли первому уравнению равновесия (2.5) и уравнениям (2.7), получаем следующие значения для постоянных a, b, c, d:

$$a = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12})}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}, \qquad b = \frac{a_{13}(a_{13} + a_{44}) - a_{12}a_{33}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2},$$
$$c = \frac{a_{13}(a_{11} - a_{12}) + a_{11}a_{44}}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}, \qquad d = \frac{a_{11}^2 - a_{12}^2}{a_{11}a_{33} - a_{13}^2}. \tag{2.9}$$

Требуя, чтобы выражения (2.8) удовлетворяли также и второму уравнению равновесия (2.5), получаем уравнение, которому должна удовлетворять функция напряжений:

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[c\left(\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial z}\right) + d\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right] = 0. \tag{2.10}$$

Это уравнение можно записать и так:

$$\nabla^2\nabla^2\varphi + (a + c - 2)\frac{\partial^2}{\partial z^2}\nabla^2\varphi + (d - a - c + 1)\frac{\partial^4\varphi}{\partial z^4} = 0, \tag{2.11}$$

где

$$\nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

При заданных внешних усилиях условия на поверхности представятся таким образом:

$$\sigma_r\cos(n, r) + \tau_{rz}\cos(n, z) = R_n, \qquad \tau_{rz}\cos(n, r) + \sigma_z\cos(n, z) = Z_n \tag{2.12}$$

(n — внешняя нормаль, R_n, Z_n — проекции внешних усилий на координатные направления — на единицу площади).

Таким образом задача сводится к определению одной функции $\varphi(r, z)$, удовлетворяющей уравнению 4-го порядка и некоторым условиям на поверхности.

В формулы для составляющих напряжения и в уравнение для функции φ входят постоянные a, b, c, d, зависящие от упругих постоянных. Предполагая, что коэффициенты Пуассона — числа положительные, во всяком случае меньшие единицы или в крайнем случае нули, имеем:

$$a_{12} \leqslant 0, \qquad a_{13} \leqslant 0, \qquad a_{11} - a_{12} > 0,$$
$$a_{11} + a_{12} > 0, \qquad a_{11}^2 - a_{12}^2 > 0, \qquad a_{11}a_{33} - a_{13}^2 > 0.$$

Следовательно,

$$a < 0, \qquad d > 0.$$

В случае изотропного тела

$$a_{11}=a_{33}=\frac{1}{E}, \qquad a_{12}=a_{13}=-\frac{\nu}{E}, \qquad a_{44}=\frac{2(1+\nu)}{E},$$

$$a=b=-\frac{\nu}{1-\nu}, \qquad c=\frac{2-\nu}{1-\nu}>0, \qquad d=1, \qquad a+c=2$$

(E — модуль Юнга, ν — коэффициент Пуассона).

Формулы (2.8) принимают вид:

$$\begin{aligned} \sigma_r&=\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right], & \sigma_z&=\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[(2-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial z^2}\right],\\ \sigma_\theta&=\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial z}\left[\nu\nabla^2\varphi-\frac{1}{r}\frac{\partial\varphi}{\partial r}\right], & \tau_{rz}&=\frac{1}{1-\nu}\frac{\partial}{\partial r}\left[(1-\nu)\nabla^2\varphi-\frac{\partial^2\varphi}{\partial r^2}\right]. \end{aligned} \tag{2.13}$$

Для функции φ получается уравнение:

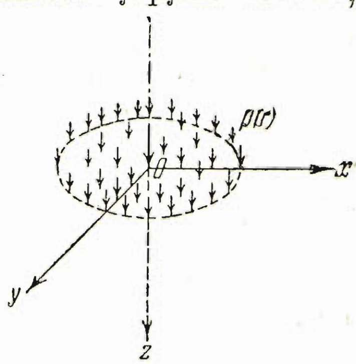
$$\nabla^2\nabla^2\varphi=0. \tag{2.14}$$

Формулы (2.13) по существу совпадают с известными формулами Лява[5]. Постоянную $1/(1-\nu)$ можно отбросить (это равносильно введению новой функции $\chi=\varphi/(1-\nu)$, отличающейся от φ на постоянный множитель).

3. Распределение напряжений в упругом полупространстве под действием симметричной нормальной нагрузки

Рассмотрим упругое равновесие бесконечного упругого анизотропного полупространства, ограниченного плоскостью, под действием нагрузки, распределенной по ограничивающей плоскости.

Предполагаем, что 1) все направления, лежащие в плоскостях, параллельных ограничивающей, эквивалентны в отношении упругих свойств, 2) в распределении нагрузки имеется симметрия вращения относительно некоторой оси, нормальной к ограничивающей плоскости. Очевидно, такое полупространство можно рассматривать как тело вращения, находящееся в условиях симметричной деформации.



Фиг. 2.

Поместим начало координат на ограничивающей плоскости в точку пересечения оси симметрии нагрузки и ограничивающей плоскости и направим ось z цилиндрической системы координат по оси симметрии вглубь тела (фиг. 2). Обозначим нагрузку на единицу площади через $p(r)$; условимся считать положительной нагрузку сжимающую.

Предположим также, что функция $p(r)$ удовлетворяет следующим условиям: 1) функция $p(r)$ конечна при всяком r, 2) в любом конечном интервале $r>0$ число точек разрыва и экстремальных точек конечно, 3) интеграл

$$\int_0^\infty p(r)\sqrt{r}\,dr$$

абсолютно сходится (главный вектор нагрузки конечен или равен нулю). Эти ограничения (довольно общие) дают возможность представить нагрузку как функцию r интегралом Фурье-Бесселя, т. е.

$$p(r)=\int_0^\infty tJ_0(tr)\,dt\int_0^\infty p(\rho)\,J_0(t\rho)\,\rho\,d\rho, \tag{3.1}$$

где $J_0(\xi)$ — функция Бесселя 1-го рода нулевого порядка [6].

Условия на поверхности тела запишутся таким образом:

1) при $z=0$

$$\sigma_z=-p(r)=-\int_0^\infty \psi(t)\,tJ_0(tr)\,dt, \qquad \tau_{rz}=0, \tag{3.2}$$

где

$$\psi(t)=\int_0^\infty p(\rho)\,J_0(t\rho)\,\rho\,d\rho. \tag{3.3}$$

2) Так как по условию главный вектор внешних усилий конечен, то естественно предположить, что на бесконечности все составляющие напряжения равны нулю; т. е. при $z=\infty$

$$\sigma_r=\sigma_\theta=\sigma_z=\tau_{rz}=0. \tag{3.4}$$

Будем искать частное решение уравнения (2.10) в виде:

$$\varphi=Z(tz)\,J_0(tr) \tag{3.5}$$

(t не зависит от r и z).

Для функции $Z(tz)$ получаем уравнение:

$$dZ^{\mathrm{IV}}-(a+c)\,Z''+Z=0 \tag{3.6}$$

(производные берутся по аргументу tz).

Составим характеристическое уравнение:

$$ds^4-(a+c)\,s^2+1=0. \tag{3.7}$$

Корни его определяются по формуле:

$$s=\pm\sqrt{\frac{a+c\pm\sqrt{(a+c)^2-4d}}{2d}}\,. \tag{3.8}$$

Возможны следующие случаи: 1) все корни уравнения (3.7) вещественные, не равные нулю, различные или попарно равные, 2) все корни уравнения (3.7) комплексные, неравные, с вещественными частями, отличными от нуля, 3) все корни уравнения (3.7) чисто мнимые (различные или попарно равные).

Если упругие постоянные тела удовлетворяют условию

$$a+c\geqslant 0, \tag{3.9}$$

корни могут получиться вещественными или комплексными.

Если упругие постоянные удовлетворяют условию

$$(a+c)^2-4d<0, \tag{3.10}$$

корни получатся комплексными.

Мнимые корни получатся, если упругие постоянные удовлетворяют одновременно двум неравенствам:

$$a + c < 0, \qquad (a + c)^2 - 4d \geqslant 0. \tag{3.11}$$

Случай, когда два корня вещественные и два чисто мнимые, при $d > 0$ невозможен. Случай, когда два или четыре корня равны нулю, также невозможен при $d > 0$.

Рассмотрим случаи, когда упругие постоянные тела удовлетворяют либо условию (3.9), либо условию (3.10), т. е. когда корни уравнения (3.7) получаются вещественными или комплексными[1].

Обозначим s_1, s_2 корни уравнения (3.7), у которых вещественные части положительны. В случае когда $s_1 \neq s_2$,

$$Z(tz) = Ae^{s_1 tz} + Be^{s_2 tz} + Ce^{-s_1 tz} + De^{-s_2 tz}, \tag{3.12}$$

где A, B, C, D — произвольные постоянные. Если $s_1 = s_2$, то

$$Z(tz) = (A + Bz)\, e^{s_1 tz} + (C + Dz)\, e^{-s_1 tz}. \tag{3.13}$$

В случае изотропного тела корни получаются попарно равными:

$$s_1 = s_2 = 1.$$

Требуя, чтобы на бесконечности выражение (3.5) обращалось в нуль, положим $A = B = 0$.

Окончательно частное решение уравнения (2.10) в форме (3.5), обращающееся в нуль на бесконечности, принимает вид:

$$\varphi = (Ce^{-s_1 tz} + De^{-s_2 tz})\, J_0(tr) \tag{3.14}$$

(в случае неравных корней) или

$$\varphi = (C + Dz)\, e^{-s_1 tz} J_0(tr) \tag{3.15}$$

(в случае равных корней).

Случай равных корней мы в дальнейшем рассматривать не будем; решения частных задач для случая равных корней можно получить из решений для случая неравных корней путем предельного перехода.

По общим формулам (2.8) найдем выражения для составляющих напряжения, которые будут удовлетворять всем нужным уравнениям теории упругости при всяком значении t.

Выражения для составляющих напряжения, полученные из предыдущих путем интегрирования по t от 0 до ∞, формально также будут удовлетворять всем уравнениям теории упругости (2.5) и (2.7). Эти выражения имеют вид:

$$\sigma_r = -\int_0^\infty [Cs_1 (1 - as_1^2)\, e^{-s_1 tz} + Ds_2 (1 - as_2^2)\, e^{-s_2 tz}]\, t^3 J_0(tr)\, dt -$$

$$- \frac{b-1}{r} \int_0^\infty (Cs_1\, e^{-s_1 tz} + Ds_2\, e^{-s_2 tz})\, t^2 J_1(tr)\, dt, \tag{3.16}$$

$$\sigma_0 = -\int_0^\infty [Cs_1 (b - as_1^2)\, e^{-s_1 tz} + Ds_2 (b - as_2^2)\, e^{-s_2 tz}]\, t^3 J_0(tr)\, dt +$$

[1] Одновременное выполнение условий (3.9) и (3.10) не исключается.

$$+\frac{b-1}{r}\int_0^\infty (Cs_1 e^{-s_1tz}+Ds_2 e^{-s_2tz})\,t^2 J_1(tr)\,dt,$$

$$\sigma_z=-\int_0^\infty [Cs_1(ds_1^2-c)\,e^{-s_1tz}+Ds_2(ds_2^2-c)\,e^{-s_2tz}]\,t^3 J_0(tr)\,dt, \tag{3.16}$$

$$\tau_{rz}=-\int_0^\infty [C(as_1^2-1)\,e^{-s_1tz}+D(as_2^2-1)\,e^{-s_2tz}]\,t^3 J_1(tr)\,dt,$$

где $J_1(tr)$ — функция Бесселя первого рода 1-го порядка. Удовлетворяя условиям на поверхности $z=0$, получаем уравнения:

$$[Cs_1(ds_1^2-c)+Ds_2(ds_2^2-c)]\,t^3=\psi(t)\,t,\quad [C(as_1^2-1)+D(as_2^2-1)]\,t^3=0. \tag{3.17}$$

Отсюда после элементарных преобразований находим:

$$C=-\frac{\psi(t)}{t^2}\frac{(1-as_2^2)\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(ac-d)},\qquad D=\frac{\psi(t)}{t^2}\frac{(1-as_1^2)\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(ac-d)}. \tag{3.18}$$

Выражение $ac-d$ не может обратиться в нуль, если упругие постоянные удовлетворяют условиям (3.9) и (3.10). В самом деле, равенство $ac=d$ возможно лишь при $c<0$ (так как $a<0$ и $d>0$). Но тогда $a+c<0$, $(a+c)^2-4d=(a-c)^2>0$, что соответствует случаю мнимых корней уравнения (3.7).

Вводя для сокращения записи обозначения

$$\begin{aligned} p_1&=1-as_1^2, & q_1&=(b-as_2^2)(1-as_1^2), & \lambda&=\frac{(b-1)\sqrt{d}}{ac-d},\\ p_2&=1-as_2^2, & q_2&=(b-as_1^2)(1-as_2^2), & \mu&=\frac{(b-1)(a+\sqrt{d})}{ac-d}, \end{aligned} \tag{3.19}$$

получаем окончательные формулы для составляющих напряжения:

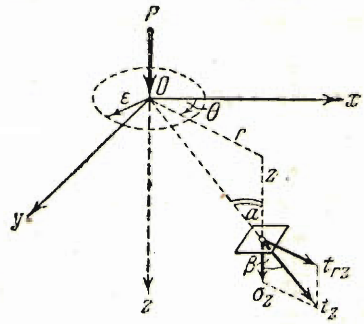
$$\begin{aligned}
\sigma_r&=-\frac{1}{(s_1-s_2)\sqrt{d}}\int_0^\infty t\psi(t)(s_1 e^{-s_1tz}-s_2 e^{-s_2tz})\,J_0(tr)\,dt+\\
&+\frac{\lambda}{s_1-s_2}\cdot\frac{1}{r}\int_0^\infty \psi(t)(s_1p_2 e^{-s_1tz}-s_2p_1 e^{-s_2tz})\,J_1(tr)\,dt,\\
\sigma_\theta&=\frac{\sqrt{d}}{(s_1-s_2)(ac-d)}\int_0^\infty t\psi(t)(s_1q_2 e^{-s_1tz}-s_2q_1 e^{-s_2tz})\,J_0(tr)\,dt-\\
&-\frac{\lambda}{s_1-s_2}\frac{1}{r}\int_0^\infty \psi(t)(s_1p_2 e^{-s_1tz}-s_2p_1 e^{-s_2tz})\,J_1(tr)\,dt,\\
\sigma_z&=\frac{1}{s_1-s_2}\int_0^\infty t\psi(t)(s_2 e^{-s_1tz}-s_1 e^{-s_2tz})\,J_0(tr)\,dt,\\
\tau_{rz}&=\frac{1}{(s_1-s_2)\sqrt{d}}\int_0^\infty t\psi(t)(e^{-s_1tz}-e^{-s_2tz})\,J_1(tr)\,dt.
\end{aligned} \tag{3.20}$$

В случае мнимых корней уравнения (3.7) задачу указанным методом решить не удается, так как нельзя найти решение типа (3.5), обращающееся в нуль на бесконечности. Таким образом выведенные здесь формулы, а также все формулы следующих $n^0 n^0$ 4 и 5, касающихся упругого полупространства, справедливы, если упругие постоянные удовлетворяют условию (3.9) или условию (3.10). Вопрос о том, возможны ли вообще идеально упругие тела, упругие постоянные которых удовлетворяют одновременно двум неравенствам (3.11), пока представляется неясным.

4. Распределение напряжений в упругом полупространстве под действием сосредоточенной силы

Рассмотрим в виде примера распределение напряжений в упругом полупространстве под действием нормальной сосредоточенной силы, приложенной в точке ограничивающей плоскости. В случае изотропного полупространства эта задача известна под названием „задачи Буссине“.

Поместим начало координат в точке приложения силы и направим ось z по линии действия силы вглубь тела. Предполагая силу P сжимающей, рассмотрим предварительно распределение напряжений от сжимающей нагрузки, распределенной равномерно по кругу радиуса ε с центром в начале координат (фиг. 3). В этом случае



Фиг. 3.

$$\psi(t) = p\int_0^{\varepsilon} \rho J_0(t\rho)\, d\rho = \frac{p\varepsilon}{t} J_1(t\varepsilon) \tag{4.1}$$

(p — интенсивность нагрузки).

Формулы (3.17) принимают вид:

$$\begin{aligned}
\sigma_r = &-\frac{1}{(s_1 - s_2)\sqrt{d}} \int_0^{\infty} (s_1 e^{-s_1 tz} - s_2 e^{-s_2 tz})\, p\varepsilon J_1(t\varepsilon) J_0(tr)\, dt + \\
&+ \frac{\lambda}{s_1 - s_2} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} (s_1 p_2 e^{-s_1 tz} - s_2 p_1 e^{-s_2 tz}) \frac{p\varepsilon}{t} J_1(t\varepsilon) J_1(tr)\, dt, \\
\sigma_\theta = &\frac{\sqrt{d}}{(s_1 - s_2)(ac - d)} \int_0^{\infty} (s_1 q_2 e^{-s_1 tz} - s_2 q_1 e^{-s_2 tz})\, p\varepsilon J_1(t\varepsilon) J_0(tr)\, dt - \\
&- \frac{\lambda}{s_1 - s_2} \frac{1}{r} \int_0^{\infty} (s_1 p_2 e^{-s_1 tz} - s_2 p_1 e^{-s_2 tz}) \frac{p\varepsilon}{t} J_1(t\varepsilon) J_1(tr)\, dt, \\
\sigma_z = &\frac{1}{s_1 - s_2} \int_0^{\infty} (s_2 e^{-s_1 tz} - s_1 e^{-s_2 tz})\, p\varepsilon J_1(t\varepsilon) J_0(tr)\, dt, \\
\tau_{rz} = &\frac{1}{(s_1 - s_2)\sqrt{d}} \int_0^{\infty} (e^{-s_1 tz} - e^{-s_2 tz})\, p\varepsilon J_1(t\varepsilon) J_1(tr)\, dt.
\end{aligned} \tag{4.2}$$

Требуя, чтобы равнодействующая нагрузки равнялась силе P, мы должны положить:

$$p = \frac{P}{\pi \varepsilon^2}.$$

Устремляя радиус ε к нулю, получим в пределе сосредоточенную силу, приложенную в начале координат. При $\varepsilon \to 0$ подинтегральные выражения стремятся к определенным пределам, так как

$$\lim_{\varepsilon \to 0} [p \varepsilon J_1(t\varepsilon)] = \frac{Pt}{2\pi}.$$

Переходя к пределу, получим в формулах (4.2) простые интегралы, которые легко вычисляются. Все интегралы сводятся к интегралам четырех типов, которые мы приводим.

Нижеследующие формулы справедливы для значений $z > 0$ и для случая, когда вещественная часть s положительна[7] (7):

$$1.\ \int_0^\infty e^{-stz} J_0(tr)\, dt = \frac{1}{\sqrt{r^2 + s^2 z^2}}, \qquad 3.\ \int_0^\infty e^{-stz} J_1(tr)\, dt = \frac{1}{r}\left(1 - \frac{sz}{\sqrt{r^2 + s^2 z^2}}\right),$$

$$2.\ \int_0^\infty e^{-stz} t J_0(tr)\, dt = \frac{sz}{(r^2 + s^2 z^2)^{3/2}}, \qquad 4.\ \int_0^\infty e^{-stz} t J_1(tr)\, dt = \frac{r}{(r^2 + s^2 z^2)^{3/2}}.$$

Для распределения напряжений от сосредоточенной силы получаем формулы:

$$\begin{aligned}
\sigma_r &= -\frac{P}{2\pi}\left\{\frac{z}{(s_1 - s_2)\sqrt{d}}\left[\frac{s_1^2}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{s_2^2}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}}\right] + \right.\\
&\quad \left. + \frac{\lambda}{s_1 - s_2}\frac{z}{r^2}\left[\frac{s_1^2 P_2}{\sqrt{r^2 + s_1^2 z^2}} - \frac{s_2^2 P_1}{\sqrt{r^2 + s_2^2 z^2}}\right] - \frac{\mu}{r^2}\right\},\\
\sigma_\theta &= -\frac{P}{2\pi}\left\{\frac{\sqrt{d}}{ac - d}\frac{z}{s_1 - s_2}\left[-\frac{s_1^2 q_2}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} + \frac{s_2^2 q_1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}}\right] - \right.\\
&\quad \left. - \frac{\lambda}{s_1 - s_2}\frac{z}{r^2}\left[\frac{s_1^2 P_2}{\sqrt{r^2 + s_1^2 z^2}} - \frac{s_2^2 P_1}{\sqrt{r^2 + s_2^2 z^2}}\right] + \frac{\mu}{r^2}\right\},\\
\sigma_z &= \frac{P}{2\pi\sqrt{d}}\frac{z}{s_1 - s_2}\left[\frac{1}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}}\right],\\
\tau_{rz} &= \frac{P}{2\pi\sqrt{d}}\frac{r}{s_1 - s_2}\left[\frac{1}{(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2}} - \frac{1}{(r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}}\right].
\end{aligned} \tag{4.3}$$

Выражениям для σ_z и τ_{rz} можно придать и следующую форму:

$$\sigma_z = -\frac{P(s_1 + s_2)}{2\pi d} z^3 \frac{3d^2 r^4 + 3(a + c) d r^2 z^2 + [(a + c)^2 - d] z^4}{[dr^4 + (a + c) r^2 z^2 + z^4]^{3/2}[(r^2 + s_1^2 z^2)^{3/2} + (r^2 + s_2^2 z^2)^{3/2}]}, \tag{4.4}$$

$$\tau_{rz} = \frac{r}{z}\sigma_z.$$

Переходя к пределу при $s_1 = s_2 = 1$, получим из формул (4.3) и (4.4) известные формулы для изотропного полупространства (8) (решение задачи Буссине):

$$\sigma_r = \frac{P}{2\pi}\left[-\frac{3r^2 z}{R^5} + \frac{(1-2\nu)}{r^2}\left(1-\frac{z}{R}\right)\right], \quad \sigma_z = -\frac{3P}{2\pi}\frac{z^3}{R^5},$$
$$\sigma_\theta = \frac{P}{2\pi}(1-2\nu)\left[\frac{z}{R^3} - \frac{1}{r^2}\left(1-\frac{z}{R}\right)\right], \tau_{rz} = -\frac{3P}{2\pi}\frac{rz^2}{R^5}, \tag{4.5}$$

где

$$R = \sqrt{r^2 + z^2}.$$

В случае изотропного полупространства интересны следующие свойства напряженного состояния: 1) полное напряжение t_z на площадке, параллельной ограничивающей плоскости, изображается вектором, продолжение которого проходит через точку приложения силы; 2) точки, где полное напряжение t_z (на площадках, параллельных ограничивающей плоскости) имеет одно и то же заданное значение, лежат на поверхности сферы с центром на линии действия силы и проходящей через точку приложения силы.

В случае анизотропного полупространства (с анизотропией рассматриваемого вида) первое свойство сохраняется. В самом деле, выделяя около точки с координатами r, z площадку, параллельную ограничивающей плоскости, и рассматривая напряжение на ней, имеем (фиг. 3):

$$\operatorname{tg}\beta = \frac{r}{z}, \ \operatorname{tg}\alpha = \frac{\tau_{rz}}{\sigma_z}.$$

Но $\tau_{rz} : \sigma_z = r : z$; следовательно,

$$\operatorname{tg}\beta = \operatorname{tg}\alpha, \ \beta = \alpha.$$

Полное напряжение t_z на упомянутой площадке:

$$t_z = \sqrt{\sigma_z{}^2 + \tau_{rz}{}^2},$$

или

$$t_z = \frac{P(s_1+s_2)}{2\pi d} z\sqrt{r^2+z^2} \frac{3dr^4 + 3(a+c)dr^2z^2 + [(a+c)^2 - d]z^4}{[dr^4 + (a+c)r^2z^2 + z^4]^{3/2}\left[(r^2+s_1{}^2z^2)^{3/2} + (r^2+s_2{}^2z^2)^{3/2}\right]}. \tag{4.6}$$

Точки, где t_z имеет одинаковую величину, располагаются, очевидно, не на поверхности сферы, а на более сложной поверхности вращения. Уравнение этой поверхности получим из (4.6), полагая $t_z = \text{const}$.

Заметим, что задача о напряжениях в полупространстве от сосредоточенной силы рассматривалась Вольфом [9]. Вольф получил решение для специального, более частного случая анизотропии. Он полагал, что коэффициенты Пуассона равны нулю.

5. Напряжения в полупространстве от нормальной нагрузки, распределенной по произвольному закону

Зная распределение напряжений в полупространстве от сосредоточенной силы, легко получить напряжения от нормальной нагрузки, распределенной по ограничивающей плоскости по произвольному закону (путем суммирования напряжений от бесконечно малых элементов нагрузки).

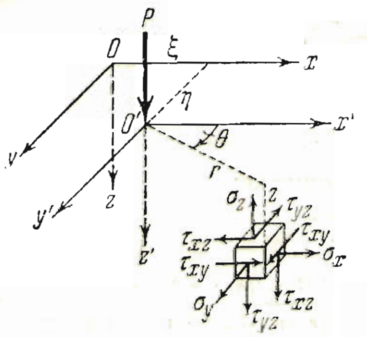
При исследовании удобнее пользоваться декартовыми координатами. Предварительно следует найти составляющие напряжения в декартовых координатах от сосредоточенной силы, приложенной не в начале координат, а в некоторой точке $x = \xi$, $y = \eta$, $z = 0$ (фиг. 4).

Эти составляющие напряжения найдутся по формулам, полученным на основании общих формул преобразования компонентов напряжения к новым осям:

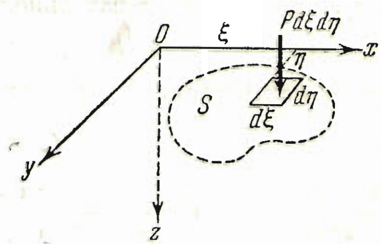
$$
\begin{gathered}
\sigma_x = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) + \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \\
\sigma_y = \frac{1}{2}(\sigma_r + \sigma_\theta) - \frac{1}{2}(\sigma_r - \sigma_\theta)\frac{(x-\xi)^2-(y-\eta)^2}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \\
\tau_{xy} = (\sigma_r - \sigma_\theta)\frac{(x-\xi)(y-\eta)}{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}, \\
\tau_{xz} = \tau_{rz}\frac{x-\xi}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}, \quad \tau_{yz} = \tau_{rz}\frac{y-\eta}{\sqrt{(x-\xi)^2+(y-\eta)^2}}.
\end{gathered} \tag{5.1}
$$

Здесь σ_r, σ_θ, τ_{rz} определяются по формулам (4.3), в которых необходимо всюду вместо r^2 подставить $(x-\xi)^2+(y-\eta)^2$.

Теперь легко определить напряжения $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{xy}$ для случая сплошной нормальной нагрузки, распределенной по закону $p=p(x, y)$, путем суммирования напряжений от сосредоточенных сил $p(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta$ по всей загруженной площади S ограничивающей плоскости (фиг. 5).



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Не приводя всех окончательных формул, довольно сложных, приведем лишь формулу:

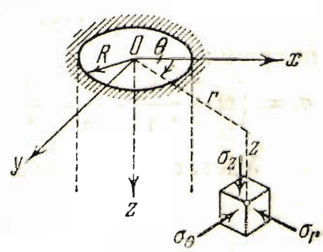
$$
\begin{aligned}
\sigma_z = \frac{z}{2\pi\sqrt{d}\,(s_1-s_2)}\iint\limits_S \Bigg\{ & \frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+s_1^2z^2]^{3/2}} - \\
& - \frac{1}{[(x-\xi)^2+(y-\eta)^2+s_2^2z^2]^{3/2}}\Bigg\} p(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta.
\end{aligned} \tag{5.2}
$$

6. Распределение напряжений в упругом полупространстве с цилиндрической полостью под действием силы тяжести и гидростатического давления

Рассмотрим следующую задачу, представляющую некоторый интерес для горного дела.

Имеется тяжелый однородный массив, ограниченный сверху горизонтальной плоскостью и ослабленный полостью (выработкой) в виде кругового цилиндра с осью, нормальной к ограничивающей плоскости (т. е. с вертикальной осью). Предполагается, что полость начинается у плоскости и уходит вглубь на бесконечность, так что массив представляет собой бесконечное упругое полупространство с полостью в виде бесконечного кругового цилиндра. Требуется определить напряжения от собственного веса и нормального давления, распределенного по поверхности полости по линейному закону (гидростатического давления). Эта задача была решена автором для случая изотропного массива [10]. В случае, если все направления, параллельные ограничивающей (горизонтальной) плоскости, эквивалентны в отношении упругих свойств, задача имеет также элементарное решение, которое мы и приведем.

Поместим начало координат в центре тяжести круга на пересечении ограничивающей плоскости и полости и направим ось z по оси цилиндра вглубь тела. (фиг. 6). Сила тяжести действует нормально к ограничивающей плоскости, а поэтому массив можно рассматривать как тело вращения, находящееся в условиях симметричной деформации.



Фиг. 6.

Найдем предварительно составляющие напряжения в сплошном массиве, без полости, от собственного веса (отмечаем эти величины значком °).

Полагая $u^\circ = 0$, $w^\circ = w^\circ(z)$, находим из уравнений обобщенного закона Гука (2.4):

$$\sigma_r^\circ = \sigma_\theta^\circ = -\frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \sigma_z^\circ.$$

Интегрируя далее уравнения равновесия с учетом объемной силы и оставшиеся уравнения обобщенного закона Гука и удовлетворяя условиям на поверхности, получаем:

$$\sigma_r^\circ = \sigma_\theta^\circ = \frac{a_{13}}{a_{11} + a_{12}} \gamma z, \qquad \sigma_z^\circ = -\gamma z, \qquad \tau_{rz}^\circ = 0, \tag{6.1}$$

$$u^\circ = 0, \ w^\circ = \frac{2a_{13}^2 - a_{33}(a_{11} + a_{12})}{2(a_{11} + a_{12})} \gamma z^2 + c, \tag{6.2}$$

где γ — удельный вес массива, c — произвольная постоянная.

Составляющие напряжения и проекции смещения в ослабленном массиве получим по формулам:

$$\sigma_r = \sigma_r^\circ + \sigma_r', \ \sigma_\theta = \sigma_\theta^\circ + \sigma_\theta', \ \sigma_z = \sigma_z^\circ + \sigma_z', \ \tau_{rz} = \tau_{rz}', \ u = u', \ w = w^\circ + w', \tag{6.3}$$

где σ_r', σ_θ', σ_z', τ_{rz}' — некоторые добавочные напряжения, определяемые с помощью функции $\varphi(r, z)$ по общим формулам (2.8), а u', w' — соответствующие смещения.

Условия на поверхности будут:

$$\sigma_z = 0, \qquad \tau_{rz} = 0 \qquad \text{при} \qquad z = 0, \tag{6.4}$$

$$\sigma_r = -kz, \qquad \tau_{rz} = 0 \qquad \text{при} \qquad r = R \tag{6.5}$$

(R — радиус полости, k — коэффициент, характеризующий интенсивность гидростатического давления).

По мере удаления от полости напряжения должны стремиться к напряжениям в сплошном массиве, т. е. при $r=\infty$

$$\sigma_r=\sigma_\theta=\frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\gamma z,\qquad \sigma_z=-\gamma z,\qquad \tau_{rz}=0. \tag{6.6}$$

Всем этим условиям можно удовлетворить, воспользовавшись элементарным решением уравнения (2.10):

$$\varphi=A\,(3adr^4-24dr^2z^2+8cz^4)+B\,(2z^2-ar^2)\lg r, \tag{6.7}$$

где A, B — произвольные постоянные, a, c, d — постоянные из формул (2.8) вычисляются по формулам (2.9).

Определяя напряжения по формулам (2.8) и вводя новые обозначения

$$m=96\,[d\,(1+b)-2ac]\,A,\qquad n=4\,(b-1)\,B, \tag{6.8}$$

получим:

$$\sigma_r=\left(m+\frac{a_{13}\gamma}{a_{11}+a_{12}}-\frac{n}{r^2}\right)z,\ \sigma_\theta=\left(m+\frac{a_{13}\gamma}{a_{11}+a_{12}}+\frac{n}{r^2}\right)z,\ \sigma_z=-\gamma z,\ \tau_{rz}=0. \tag{6.9}$$

Удовлетворяя условиям на поверхности и на бесконечности, получим:

$$m=0,\qquad n=\frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\gamma R^2+kR^2. \tag{6.10}$$

Для распределения напряжений получим:

$$\begin{aligned}\sigma_r&=\frac{a_{12}\gamma}{a_{11}+a_{12}}\left(1-\frac{R^2}{r^2}\right)z-\frac{kR^2}{r^2}z,\qquad \sigma_z=-\gamma z,\\ \sigma_\theta&=\frac{a_{13}\gamma}{a_{11}+a_{12}}\left(1+\frac{R^2}{r^2}\right)z+\frac{kR^2}{r^2}z,\qquad \tau_{rz}=0,\end{aligned} \tag{6.11}$$

где первые слагаемые — составляющие напряжения от собственного веса вторые — составляющие напряжения от гидростатического давления.

Соответствующие смещения будут:

$$\begin{aligned}u&=(a_{11}-a_{12})\left(\frac{a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\gamma+k\right)\frac{R^2}{r}z,\\ w&=\frac{2a_{13}{}^2-a_{33}\,(a_{11}+a_{12})}{2\,(a_{11}+a_{12})}\gamma z^2-\frac{a_{13}\,(a_{11}-a_{12})}{a_{11}+a_{12}}\gamma R^2\lg r-k\,(a_{11}-a_{12})\,R^2\lg r+c.\end{aligned} \tag{6.12}$$

У поверхности полости:

$$\sigma_\theta=\left(\frac{2a_{13}}{a_{11}+a_{12}}\gamma+k\right)z=\left(\frac{2a}{d}\gamma+k\right)z. \tag{6.13}$$

С помощью функции напряжений в виде суммы функции (6.7) и функции

$$\varphi=Cr^2z+Dz^3+Ez\lg r \tag{6.14}$$

можно получить распределение напряжений в цилиндрической трубе под действием нормальных давлений, распределенных по внешней и внутренней поверхностям и меняющихся по длине трубы по линейному закону.

7. Кручение

Рассмотрим упругое равновесие тела вращения из однородного анизотропного материала с теми же упругими свойствами, какие предполагались выше, под действием следующих внешних нагрузок:

1) скручивающих моментов, приложенных по концам,

2) усилий, направленных по касательным к контурам поперечных сечений и не меняющихся вдоль этих контуров.

Поместим начало координат на оси тела и направим ось z по этой оси (фиг. 7).

Предположим, как и в соответствующем случае изотропного тела, что

$$u = 0,\ w = 0,\ v = v(r,\ z). \tag{7.1}$$

Тогда

$$\varepsilon_r = \varepsilon_\theta = \varepsilon_z = \gamma_{rz} = 0,\ \gamma_{\theta z} = \frac{\partial v}{\partial z},$$

$$\gamma_{r\theta} = \frac{\partial v}{\partial r} - \frac{v}{r},\ \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0, \tag{7.2}$$

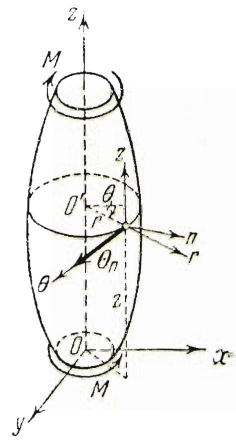
а $\tau_{\theta z}$, $\tau_{r\theta}$ зависят только от r и z.

Из уравнений равновесия (1.5) остается только второе:

$$\frac{\partial \tau_{r\theta}}{\partial r} + \frac{\partial \tau_{\theta z}}{\partial z} + \frac{2\tau_{r\theta}}{r} = 0. \tag{7.3}$$

Из уравнений обобщенного закона Гука остаются:

$$\gamma_{\theta z} = a_{44}\tau_{\theta z},\qquad \gamma_{r\theta} = 2(a_{11} - a_{12})\tau_{r\theta}. \tag{7.4}$$



Фиг. 7.

Исключая v из выражений для $\gamma_{\theta z}$ и $\gamma_{z\theta}$, получаем зависимость:

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\gamma_{\theta z}}{r}\right) - \frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\gamma_{r\theta}}{r}\right) = 0, \tag{7.5}$$

или

$$a_{44}\frac{\partial}{\partial r}\left(\frac{\tau_{\theta z}}{r}\right) - 2(a_{11} - a_{12})\frac{\partial}{\partial z}\left(\frac{\tau_{r\theta}}{r}\right) = 0. \tag{7.6}$$

Уравнению равновесия (7.3) мы удовлетворим, введя функцию напряжений $\psi(r,\ z)$ таким образом:

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial r},\qquad \tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}. \tag{7.7}$$

Из уравнения (7.6) получаем уравнение, которому удовлетворяет функция напряжений:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0, \tag{7.8}$$

где

$$\beta = \sqrt{\frac{a_{44}}{2(a_{11} - a_{12})}} = \sqrt{\frac{G}{G_z}}. \tag{7.9}$$

Условие на поверхности вращения имеет вид:

$$\tau_{r\theta}\cos(n,\ r) + \tau_{\theta z}\cos(n,\ z) = \Theta_n. \tag{7.10}$$

где n — внешняя нормаль и Θ_n — внешнее усилие на единицу площади.

Уравнение (7.8) отличается от уравнения для функции напряжений в случае изотропного тела лишь множителем $1/\beta^2$, который для изотропного тела равен единице [11]. Задача сводится к определению функции ψ по заданному значению ее на боковой поверхности, или, что то же самое, на линии пересечения плоскости, проходящей через ось тела (меридиональной плоскости) с боковой поверхностью.

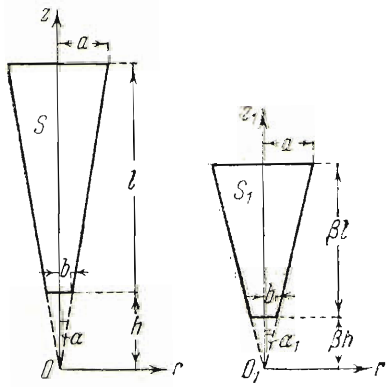
Остановимся на случае сплошного тела (не имеющего внутренних полостей), скручиваемого лишь моментами M, приложенными по концам. В этом случае функция ψ на боковой поверхности должна равняться постоянной величине [1], причем разность значений ψ на боковой поверхности и на оси z равна $\frac{M}{2\pi}$.

Пусть уравнение боковой поверхности тела есть $r=f(z)$. Введем новую переменную $z_1=\beta z$. Уравнение (7.8) приведется к виду:

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2}-\frac{3}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r}+\frac{\partial^2 \psi}{\partial z_1^2}=0. \tag{7.11}$$

Теперь задача о кручении анизотропного тела сводится к определению функции $\psi(r, z_1)$, удовлетворяющей уравнению (7.11) и принимающей на поверхности $r=f\left(\frac{z_1}{\beta}\right)$ постоянное значение.

Отсюда можно сделать следующий вывод. Задача определения функции напряжений ψ для анизотропного тела с областью меридионального сечения S, скручиваемого моментами, приложенными по концам, равносильна такой же задаче для изотропного тела с измененной областью меридионального сечения S_1. Именно область S_1 получится из S путем однородной деформации плоскости — растяжения или сжатия в направлении оси z.



Фиг. 8.

Пусть, например, нужно решить задачу о кручении конического анизотропного стержня, сечение S которого показано на рис. 8 слева. Рассматриваем конический изотропный стержень с областью сечения S_1, которая получается из S путем однородной деформации плоскости r, z именно растяжения в направлении оси z, если $\beta > 1$, или сжатия, если $\beta < 1$. На фиг. 8 справа показана область S_1 для случая, когда $\beta={}^2/_3$. Как известно, функция напряжений для такого изотропного стержня есть [12]:

$$\psi=\frac{3M}{2\pi\,[3\cos\alpha_1+\cos^3\alpha_1-2]}\left[\frac{z_1}{\sqrt{r^2+z_1^2}}-\frac{1}{3}\,\frac{z_1^3}{(r^2+z_1^2)^{3/2}}\right] \tag{7.12}$$

(M — величина скручивающего момента).

[1] См. соответствующий вывод для изотропного тела, например, у С. П. Тимошенко [12].

Отсюда получаем для анизотропного стержня после замены z_1 на βz:

$$\psi = \frac{3M}{2\pi\left[3\cos\alpha_1 + \cos^3\alpha_1 - 2\right]}\left[\frac{\beta z}{\sqrt{r^2+\beta^2 z^2}} - \frac{1}{3}\frac{\beta^3 z^3}{(r^2+\beta^2 z^2)^{3/2}}\right]. \tag{7.13}$$

Угол α_1, как это ясно из рис. 8, определится по формуле:

$$\operatorname{tg}\alpha_1 = \frac{1}{\beta}\operatorname{tg}\alpha. \tag{7.14}$$

Приведенные выше рассуждения легко обобщить и на случай тела, скручиваемого усилиями, распределенными по боковой поверхности.

Поступила в редакцию 15 X 1939.
Доложена на Всесоюзном совещании по строительной механике при Институте механики Акад. Наук СССР.

IV 1939.
Саратовский госуниверситет им. Н. Г. Чернышевского.
Кафедра теории упругости.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв А. Математическая теория упругости. ОНТИ НКТП СССР. 1935. n°n° 188, 226 A [Стр. 286 и 340].
2. Ляв А. *L. c.* n° 110. [Стр. 172].
3. Тимошенко. С. П. Теория упругости. ОНТИ. 1937.
4. Тимошенко С. П. *L. c.* n° 87. [Стр. 305—307].
5. Ляв А. *L. c.* n° 188. [Стр. 288]. Тимошенко С. П. *L. c.* n° 98. [Стр. 339].
6. Кузьмин Р. О. Бесселевы функции. ОНТИ. 1935. [Стр. 154].
7. Кузьмин Р. О. *L. c.* [Стр. 143, 144].
8. Тимошенко С. П. *L. c.* n° 105. [Стр. 362].
9. Wolf K. Ausbreitung der Kraft in der Halbebene und im Halbraum bei anisotropem Material. „Zeitschr. f. Angew. Math. u. Mech". 1935. Bd. 15. H. 5.
10. Лехницкий С. Г. Определение напряжений в упругом изотропном массиве вблизи вертикальной цилиндрической выработки кругового сечения. „Известия АН СССР. Отд. технических наук". 1938. № 7.
11. Ляв А. *L. c.* n° 226 A. [Стр. 341]. Тимошенко С. П. *L. c.* n° 87. [Стр. 308].
12. Тимошенко С. П. *L. c.* n° 87. [Стр. 308].

DÉFORMATION SYMÉTRIQUE ET TORSION DU CORPS DE RÉVOLUTION AYANT L'ANISOTROPIE D'UN CAS PARTICULIER

S. G. LEKHNITSKY

(Résumé)

Dans le présent ouvrage l'auteur examine le problème de l'équilibre elastique d'un corps de révolution sous l'action des efforts extérieurs, qui les déforment en un autre corps de révolution. On suppose que les matériaux du corps suivent la loi généralisée de Hooke et ont une anisotropie transversale, c'est-à-dire toutes les directions normales à l'axe de rotation, sont équivalentes. On suppose aussi que les déformations sont petites. L'auteur distingue deux espèces de déformations: la deformation symétrique et la torsion. L'auteur emploie le système des coordonnées avec l'axe z dirigée le long de l'axe de la rotation.

Dans le cas de la déformation symétrique ont lieu les formules générales suivantes:

$$\sigma_r = -\frac{\partial}{\partial z}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{b}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right],$$

$$\sigma_\theta = -\frac{\partial}{\partial z}\left[b\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right],$$

$$\sigma_z = \frac{\partial}{\partial z}\left[c\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + d\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right],$$

$$\tau_{rz} = \frac{\partial}{\partial r}\left[\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right].$$

$$\tau_{r\theta} = \tau_{\theta z} = 0,$$

où les coefficients a, b, c, d dépendent les constantes élastiques et la fonction $\varphi(r, z)$ satisfait à l'équation

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}\right)\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r} + a\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right) + \frac{\partial^2}{\partial z^2}\left[c\left(\frac{\partial^2 \varphi}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial \varphi}{\partial r}\right) + d\frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2}\right] = 0.$$

L'auteur donne la résolution de deux problèmes: 1) l'équilibre élastique d'un corps infini limité d'un plan sous l'action d'une force normale ou des efforts distribués, 2) l'équilibre élastique d'un massif ayant une cavité en forme d'un cylindre circulaire.

Dans le cas de la torsion on obtient les formules générales suivantes:

$$\tau_{\theta z} = \frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial r}, \quad \tau_{r\theta} = -\frac{1}{r^2}\frac{\partial \psi}{\partial z}, \qquad \sigma_r = \sigma_\theta = \sigma_z = \tau_{rz} = 0.$$

La fonction $\psi(r, z)$ satisfait l'équation

$$\frac{\partial^2 \psi}{\partial r^2} - \frac{3}{r}\frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{\beta^2}\frac{\partial^2 \psi}{\partial z^2} = 0.$$

Dans l'ouvrage l'auteur donne la solution du problème de la torsion d'une tige conique.