АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 3, 1940

К МЕХАНИКЕ ПЛАСТИЧЕСКИХ СРЕДИН

Л. М. КАЧАНОВ

(Ленинград)

n° 1. Общие положения. Рассмотрим сплошную изотропную среду, обладающую следующими тремя свойствами:

I. В каждой точке среды тензор деформации

$$\mathbf{E}=\begin{vmatrix} e_{xx} & e_{xy} & e_{xz} \\ e_{yx} & e_{yy} & e_{yz} \\ e_{zx} & e_{zy} & e_{zz} \end{vmatrix}$$

является линейной функцией тензора напряжений

$$\mathbf{S}=\begin{vmatrix} \sigma_x & \tau_{xy} & \tau_{xz} \\ \tau_{yx} & \sigma_y & \tau_{yz} \\ \tau_{zx} & \tau_{zy} & \sigma_z \end{vmatrix},$$

т. е.

$$\mathbf{E}=\alpha\mathbf{I}+\beta\mathbf{S}, \tag{1}$$

где $\mathbf{I}$ — единичный тензор, а α, β, вообще говоря, есть функции координат. Предположение (1) равносильно условию пропорциональности главных сдвигов и главных касательных напряжений.

II. Изменение плотности среды пропорционально среднему давлению:

$$e_{xx}+e_{yy}+e_{zz}=k(\sigma_x+\sigma_y+\sigma_z), \tag{2}$$

причем k постоянно и равно коэффициенту упругого объемного сжатия, т. е.

$$k=\frac{1}{2G}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}, \tag{3}$$

где G — модуль сдвига, а ν — Пуассоново число. Это допущение подтверждается опытом для всех так называемых „твердых" материалов.

III. Приращение удельной работы деформации является точным дифференциалом, т. е.

$$\sigma_x\,\delta e_{xx}+\sigma_y\,\delta e_{yy}+\sigma_z\,\delta e_{zz}+\tau_{xy}\,\delta e_{xy}+\tau_{yz}\,\delta e_{yz}+\tau_{zx}\,\delta e_{zx}=\delta W. \tag{4}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &\sigma_x=\frac{\partial W}{\partial e_{xx}}, \qquad \sigma_y=\frac{\partial W}{\partial e_{yy}}, \qquad \sigma_z=\frac{\partial W}{\partial e_{zz}}, \\ &\tau_{xy}=\frac{\partial W}{\partial e_{xy}}, \qquad \tau_{yz}=\frac{\partial W}{\partial e_{yz}}, \qquad \tau_{zx}=\frac{\partial W}{\partial e_{zx}}. \end{aligned} \tag{5}$$

Функцию W мы будем называть потенциалом работы деформации.

Рассмотрим некоторые следствия, вытекающие из сделанных предположений.

n° 2. Формулы Генки. Согласно (1) имеем:

$$e_1 = \alpha + \beta\sigma_1, \qquad e_2 = \alpha + \beta\sigma_2, \qquad e_3 = \alpha + \beta\sigma_3, \tag{6}$$

причем индексы 1, 2, 3 указывают на соответствующие главные направления.

Уравнение (2) требует, чтобы

$$\alpha = -\beta(1 - k/\beta)(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3. \tag{7}$$

Обозначим:

$$\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3 = 3\sigma, \qquad \beta = (1+\varphi)/(2G) = \psi/(2G). \tag{8}$$

Подставляя (7), (8) в соотношения (6), получим формулы:

$$\begin{aligned} e_1 &= \frac{1+\varphi}{2G}\left[\sigma_1 - \frac{\varphi + 3\nu/(1+\nu)}{\varphi+1}\sigma\right], \\ e_2 &= \frac{1+\varphi}{2G}\left[\sigma_2 - \frac{\varphi + 3\nu/(1+\nu)}{\varphi+1}\sigma\right], \\ e_3 &= \frac{1+\varphi}{2G}\left[\sigma_3 - \frac{\varphi + 3\nu/(1+\nu)}{\varphi+1}\sigma\right]. \end{aligned} \tag{9}$$

Эти уравнения впервые были найдены Генки[1] из других соображений.

Функцию β или пропорциональную ей функцию ψ иногда называют модулем пластичности.

n° 3. Условия существования потенциала работы деформации. Составим выражение для работы деформации, пользуясь формулами Генки. Легко найдем:

$$\delta W = \delta(V + \psi\Phi) + \Phi\,\delta\psi, \tag{10}$$

где обозначено:

$$V = \frac{1}{12G}\,\frac{1-2\nu}{1+\nu}(\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)^2, \tag{11}$$

$$\Phi = \frac{1}{12G}\left[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2\right]. \tag{12}$$

Заметим, что V — удельная работа упругого изменения объема, Φ — удельная работа упругого изменения формы.

Из (10) видно, что δW будет точным дифференциалом лишь в следующих трех случаях:

1. $\psi = \mathrm{const}$; 2. $\Phi = \mathrm{const}$; 3. $\Phi = f(\psi)$.

В первом случае мы имеем упругое тело; приняв $\psi = 1$ (если взять $\psi \neq 1$, то тем самым будет выбрана некоторая система упругих постоянных, отличная от системы G, ν), приходим к закону Гука:

$$e_i = \frac{1}{2G}\left[\sigma_i - \frac{3\nu}{1+\nu}\sigma\right] \qquad (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{13}$$

Формула (10) приобретает известный вид:

$$\delta W = \delta (V + \Phi). \tag{14}$$

Во втором случае мы узнаем пластическую среду Генки [1], так как уравнение $\Phi = \text{const}$ совпадает с условием пластичности Мизеса:

$$\frac{1}{12G}[(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2] = \text{const} = \frac{\sigma_s^2}{6G} = K, \tag{15}$$

где σ_s — предел текучести. Для среды Генки

$$\delta W = \delta (V + 2K\psi). \tag{16}$$

Рассмотрим теперь третий случай; здесь $\Phi = f(\psi)$. Разрешая это уравнение относительно ψ (что всегда возможно, ибо $\psi \neq \text{const}$, $\Phi \neq \text{const}$), найдем:

$$\psi = F(\Phi).$$

Соотношения (9) примут вид:

$$e_i = \frac{F(\Phi)}{2G}\left[\sigma_i - \frac{F(\Phi) - (1-2\nu)/(1+\nu)}{F(\Phi)}\sigma\right] \qquad (i = 1, 2, 3). \tag{17}$$

Пользуясь этими формулами, легко получим:

$$\mathscr{E} = \frac{3}{G}\Phi F^2(\Phi), \tag{18}$$

где

$$\mathscr{E} = (e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2. \tag{19}$$

Но, как известно [2], зависимость вида (18) является условием пластичности для материала, обладающего свойством упрочнения. Следовательно, в третьем случае мы имеем упрочняющуюся пластическую среду, для которой

$$\delta W = \delta [V + \Phi F(\Phi)] + \Phi \delta F(\Phi). \tag{20}$$

Функция $F(\Phi)$ считается заданной и находится опытным путем. Заметим, что при $F(\Phi) = 1$ мы возвращаемся к упругому телу.

Итак, требование существования потенциала работы деформации приводит к трем различным средам, экспериментально установленным. Общим свойством подобных сред является их относительная жесткость; при деформации таких материалов можно обычно допустить, что приращение внутренней энергии тела равно работе деформации [3]. С этой точки зрения становится ясным смысл условия (4), отражающего, по существу, идеализированный характер подобных сплошных средин.

Условие пластичности Мизеса выражает собой „идеальность“ связей в той среде, в которой максимальное касательное напряжение „почти постоянно“.

Обратимся теперь к некоторым общим теоремам, относящимся к затронутым срединам.

n° 4. Работа внешних сил. При равновесии всякого сплошного тела, характеризуемом напряжениями $\sigma_x, \sigma_y, \ldots, \tau_{zx}$, смещениями u, v w и деформациями $e_{xx}, e_{yy}, \ldots, e_{zx}$, имеет место равенство [3]:

$$\sum (X_e u + Y_e v + Z_e w) = \iiint (\sigma_x e_{xx} + \sigma_y e_{yy} + \ldots + \tau_{zx} e_{zx})\, dx\, dy\, dz, \tag{21}$$

где слева стоит сумма работ всех внешних сил (поверхностных и объемных) на отвечающих им перемещениях. Так как

$$\sigma_x e_{xx} + \sigma_y e_{yy} + \ldots + \tau_{zx} e_{zx} = 2(V + \psi\Phi),$$

то получаем:

1. Для упругого тела (теорема Клапейрона):

$$\sum (X_e u + Y_e v + Z_e w) = 2 \iiint (V + \Phi)\, dx\, dy\, dz. \tag{22}$$

2. Для пластической среды Генки:

$$\sum (X_e u + Y_e v + Z_e w) = 2 \iiint (V + K\psi)\, dx\, dy\, dz. \tag{23}$$

3. Для упрочняющейся пластической среды:

$$\sum (X_e u + Y_e v + Z_e w) = 2 \iiint \big(V + \Phi F(\Phi)\big)\, dx\, dy\, dz. \tag{24}$$

Соответствующие результаты для упругой среды приводятся для сравнения.

n° 5. Начало возможных перемещений. Для любой сплошной среды работа всех внешних сил [3] на возможных перемещениях δu, δv, δw

$$\sum (X_e \delta u + Y_e \delta v + Z_e \delta w) = \iiint (\sigma_x \delta e_{xx} + \sigma_y \delta e_{yy} + \ldots + \tau_{zx} \delta e_{zx})\, dx\, dy\, dz,$$

или, в силу (4),

$$\sum (X_e \delta u + Y_e \delta v + Z_e \delta w) = \delta \iiint W dx\, dy\, dz. \tag{25}$$

Отсюда находим:

1. Для упругого тела:

$$\sum (X_e \delta u + Y_e \delta v + Z_e \delta w) = \delta \iiint (V + \Phi)\, dx\, dy\, dz. \tag{26}$$

2. Для пластической среды Генки:

$$\sum (X_e \delta u + Y_e \delta v + Z_e \delta w) = \delta \iiint (V + 2K\psi)\, dx\, dy\, dz. \tag{27}$$

3. Для упрочняющейся пластической среды:

$$\sum (X_e \delta u + Y_e \delta v + Z_e \delta w) = \delta \iiint \left(V + 2\Phi F(\Phi) - \int^{\Phi} F(\lambda)\, d\lambda\right) dx\, dy\, dz. \tag{28}$$

n° 6. Начало возможных изменений напряженного состояния. Если сравниваемые напряженные состояния удовлетворяют уравнениям равновесия и граничным условиям, то для всякого сплошного тела справедливо соотношение [3]:

$$\sum (u\delta X_e + v\delta Y_e + w\delta Z_e) = \iiint (e_{xx} \delta\sigma_x + e_{yy} \delta\sigma_y + \ldots + e_{zx} \delta\tau_{zx})\, dx\, dy\, dz. \tag{29}$$

В нашем случае

$$e_{xx} \delta\sigma_x + e_{yy} \delta\sigma_y + \ldots + e_{zx} \delta\tau_{zx} = \delta V + \psi\delta\Phi.$$

Следовательно:

1. Для упругого тела:

$$\sum (u\delta X_e + v\delta Y_e + w\delta Z_e) = \delta \iiint (V + \Phi)\, dx\, dy\, dz. \tag{30}$$

2. Для пластической среды Генки:

$$\sum (u\delta X_e + v\delta Y_e + w\delta Z_e) = \delta \iiint V\, dx\, dy\, dz. \tag{31}$$

Заметим, что здесь всякое напряженное состояние должно также удовлетворять условию пластичности Мизеса.

3. Для упрочняющейся пластической среды:

$$\sum (u\delta X_e + v\delta Y_e + w\delta Z_e) = \delta \iiint \left(V + \int^{\Phi} F(\lambda)\, d\lambda \right) dx\, dy\, dz. \tag{32}$$

n° 7. Начало наименьшей работы для пластической среды Генки. Пусть внешние силы не изменяются, тогда

$$\sum (u\delta X_e + v\delta Y_e + w\delta Z_e) = 0.$$

Следовательно,

$$\delta \iiint V\, dx\, dy\, dz = 0. \tag{33}$$

Как известно, Хаар и Карман [4], а вслед за ними Генки в основу теории пластичности кладут требование минимальности интеграла:

$$\iiint (V + \Phi)\, dx\, dy\, dz, \tag{34}$$

где $V + \Phi$ — удельная упругая работа деформации.

Постулированный указанными авторами принцип (34) для теории Генки по существу совпадает с выведенным началом (33), так как в последней $\Phi = \mathrm{const}$; и действительно, основываясь на (33), можно легко получить уравнения (9).

Поступила в редакцию 15 III 1940.

Научно-исследовательский институт математики и механики при Ленинградском университете.

ЛИТЕРАТУРА

1. Hencky H. Zur Theorie plastischer Deformationen und der hierdurch im Material hervorgerufenen Nachspannungen. „Zeitsch. f. angew. Math. u. Mech.“ 1924. Bd. 4. H. 4 [S. 324—334].

2. Беляев Н. М. Теории пластических деформаций. „Труды конференции по пластическим деформациям“. Изд. АН СССР. 1938.

3. Папкович П. Ф. Теория упругости. Оборонгиз. 1939.

4. Haar A. und Kármán T. Zur Theorie der Spannungzustände in plastischen und sandartigen Zuständen. Göttingen Nachrichten. 1909. [S. 204—218].

ON THE MECHANICS OF PLASTIC SOLIDS

L. M. KACHANOV

(Summary)

The author considers solids which satisfy the three following conditions:

1. The deformation tensor is a linear function of the stress tensor.

2. The cubical dilatation is proportional to the mean pressure at the given point:

$$e_{xx} + e_{yy} + e_{zz} = \frac{1}{2G} \frac{1-2\nu}{1+\nu} (\sigma_x + \sigma_y + \sigma_z).$$

3. The increase of the specific work of deformation is a complete differential:

$$\sigma_x \delta e_{xx} + \sigma_y \delta e_{yy} + \ldots + \tau_{zx} \delta e_{zx} = \delta W.$$

The conditions given lead to:

1. The theory of an elastic solid.

2. Hencky's theory of plasticity.

3. The theory of the hardening of a plastic solid, the condition of hardening being:

$$(\sigma_1 - \sigma_2)^2 + (\sigma_2 - \sigma_3)^2 + (\sigma_3 - \sigma_1)^2 = f[(e_1 - e_2)^2 + (e_2 - e_3)^2 + (e_3 - e_1)^2].$$

At the end of the paper some general theorems for such plastic solids are considered.