А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 3, 1940

РАЗВИТИЕ И СОВРЕМЕННОЕ СОСТОЯНИЕ ТЕОРИИ ПЛАСТИЧНОСТИ[1]

Г. К. ГЕНКИ

(Москва)

Теория пластичности является прямым продолжением классической теории упругости. Этим сравнением мы хотим подчеркнуть, что теория пластичности старается сосредоточить физические основы явления пластичности в немногочисленных, четко очерченных положениях такого характера, что дальнейшая их разработка становится уже проблемой прикладной математики. В свете современных представлений о строении твердого тела такой способ действий нуждается в оправдании, потому что при наличии очень сложной структуры материи не верится в возможность успеха математической теории.

Пластическая деформация отдельного кристалла является скольжением параллельных пластинок одна по другой. В кристаллических решетках существуют плоскости с наибольшим количеством атомов, и именно эти плоскости служат плоскостями скольжения. Скольжение это зависит от температуры в гораздо меньшей степени, чем можно было бы думать. Но все это правильно только для монокристаллов; технические металлы состоят из многочисленных мелких, различно ориентированных кристаллов, и об изотропности можно говорить только потому, что инженер экспериментирует над кусками металла, содержащими миллион отдельных кристаллов. Между отдельными кристаллами находится слой особого характера, состоящий, вероятно, из чрезвычайно мелких кристаллов; но механика этого слоя еще недостаточно выяснена. Кроме того, мы знаем, что строение материи не обходится без изъянов: существует много прорывов в передаче сил взаимодействия между молекулами, так что истинное сопротивление разрыву гораздо ниже теоретического. Таким образом современная физика дает нам следующее представление: отдельный кристалл не испытывает никакого пластического изменения объема; прослойки между отдельными кристаллами очень тонки, а поэтому и поликристаллический металл не обнаруживает никакого остаточного изменения объема. Это обстоятельство очень важно потому что сводит пластичность к деформациям и напряжениям сдвига.

[1] Этот обзор был написан Г. К. Генки в период, когда он сотрудничал в Академии Наук СССР, и доложен им на конференции по пластическим деформациям при отделении технических наук Академии Наук СССР 22 декабря 1936 г. Как следовало ожидать, работа такого большого исследователя, каким является Г. К. Генки в области пластичности, не утратила своего значения и сохранила интерес до настоящего времени. *Ред.*

Как известно, изменение температуры сильно меняет поляризацию молекул, и если мы представим себе силы между молекулами в виде упругих стержней, то твердое тело представится в высокой степени статически неопределимой пространственной фермой с большим количеством лишних стержней. Если температура понижается, возникают новые стержни вследствие возникновения новых связей между молекулами. Такая модель твердого тела описывает совокупность явлений упругости, и она достаточно гибка, чтобы охватить и явления пластичности. Надо только разделить ферму на две части. Одна часть накопляет упругую энергию лишь до известного предела, а другая часть идеально упруга и имеет очень низкий модуль сдвига, приблизительно такого же порядка, как предел текучести. Такая модель показывает все явления пластичности, включая даже так называемое упрочнение.

§ 1. История проблемы

Первые систематические опыты по исследованию пластичности металлов были произведены семьдесят лет назад французским ученым Треска. Уже он установил главный закон, что существует предельное сдвигающее напряжение и что объем при пластических деформациях не меняется. Опыты делались, главным образом, со свинцом и другими металлами и ставились таким образом, что металл должен был проходить через маленькое отверстие под высоким давлением. Попытки Треска создать удовлетворительную теорию возбудили интерес Сан-Венана — в то время самого выдающегося теоретика в области упругости. Сан-Венан сформировал закон максимального касательного напряжения для предела текучести и сейчас же приступил к решению практических задач, как, например, задач об изгибе балки и кручении цилиндра, причем он решил проблему для нагрузки и нашел остаточные напряжения, которые сопровождаются остаточными деформациями.

Работы Сан-Венана и Треска побудили Буссине [1] заняться интегрированием уравнений плоской и пространственной задач. Его основная идея — применение криволинейных координат для того, чтобы придать линейную форму условию предельного напряжения, была проведена в жизнь с большим успехом Л. Прандтлем [2] и Г. Генки [3] для решения плоской задачи.

Французский ученый М. Леви сформировал впервые уравнение пространственной задачи пластичности. Условие, принятое Сан-Венаном, а именно гипотеза наибольшего касательного напряжения, очень вредило дальнейшему развитию теории пластичности. Исследователи не обратили внимания на то, что пластическая деформация поликристаллических металлов не осуществляется путем скольжения вдоль плоскости наибольшего касательного напряжения, и поэтому употребление этого условия текучести является излишним осложнением теории, которому нет физической мотивировки. Р. Мизес [5], познакомившись с теорией М. Леви, ввел более правильное условие текучести и этим придал теории практическое значение. Однако Мизес полагал, что правильное условие текучести и есть именно гипотеза максимальных касательных напряжений и что его условие имеет только преимущество простоты. Еще в 1904 г. польский ученый А. Т. Губер [4] установил условие текучести единственным возможным для изотропного тела путем: отняв от потенциальной энергии часть, которая происходит от изменения объема. Губер придал потенциальной энергии формоизменения у предела текучести значение предельной емкости для упругой энергии изменения формы.

Только двадцать лет спустя, не зная о работе Губера, Г. Генки [6] нашел, что условия текучести Сан-Венана и О. Мора одинаково неприемлемы просто потому, что в изотропном теле не может произойти скольжение по плоскости максимального касательного напряжения. Гипотеза Мора особенно неудовлетворительна тем, что смешивает временное сопротивление с пределом текучести. Г. Генки удалось найти американские труды, подтвержденные опытами и доказавшие, что гипотеза о предельной энергии изменения формы правильна. Его заключения были подтверждены год спустя опытами Лоде в Геттингене и Роша в Цюрихе. Это подтверждение сделало теорию Мизеса снова актуальной, однако в ней необходимо было исправить один серьезный недостаток, а именно, что напряжения по этой теории совершенно не зависят от скорости деформации. Эту ошибку поправили Е. Бингхэм [7] и Г. Генки [8].

Е. С. Бингхэм дал теорию пластической и вязкой жидкости, а Г. Генки обобщил теорию для решения пространственной проблемы. Разница уравнений Генки и Мизеса в том, что Г. Генки исходил из уравнений Стокса, в то время как Мизес пользовался уравнениями идеальной жидкости.

§ 2. Теория упругого и пластического равновесия

Для того, чтобы развить теорию пластичности, надо перестроить основы теории упругости. И модуль E и число Пуассона m не являются постоянными величинами в случае пластичности именно потому, что нет соответствующего пластического изменения объема. Поэтому хотя в классической теории упругости все четыре модуля равноправны [1], однако E и m в случае остаточных деформаций оказываются величинами, зависящими от интенсивности пластической деформации. Потенциальная энергия как функция модуля всестороннего сжатия и растяжения и модуля сдвига должна служить основой оформления закона упругости. Возьмем главные направления деформаций и напряжений и обозначим через ε_1, ε_2, ε_3 компоненты деформации и через σ_1, σ_2, σ_3 компоненты напряжений. Положим:

$$\varepsilon = (\varepsilon_1 + \varepsilon_2 + \varepsilon_3)/3, \quad \sigma = (\sigma_1 + \sigma_2 + \sigma_3)/3;$$

тогда можно отделить изменение объема от общей деформации и получить компоненты изменения формы $\varepsilon_1 - \varepsilon$, $\varepsilon_2 - \varepsilon$, $\varepsilon_3 - \varepsilon$ и компоненты соответствующих напряжений $\sigma_1 - \sigma$, $\sigma_2 - \sigma$, $\sigma_3 - \sigma$.

Предполагая, что деформация весьма мала и что ее можно выразить с помощью инвариантов:

$$\varepsilon_m^2 = (\varepsilon_1 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_2 - \varepsilon)^2 + (\varepsilon_3 - \varepsilon)^2, \quad \sigma_m^2 = (\sigma_1 - \sigma)^2 + (\sigma_2 - \sigma)^2 + (\sigma_3 - \sigma)^2,$$

где ε_m и σ_m являются интенсивностями деформации и напряжения, напишем выражение для удвоенной потенциальной энергии деформации:

[1] Имеется в виду изображение закона Гука при помощи модуля Юнга и коэффициента Пуассона или при помощи модуля сдвига и модуля всестороннего сжатия.

$$2A = 2G\varepsilon_m^2 + 9K\varepsilon^2 + 4F|\varepsilon|\,|\varepsilon_m|. \qquad (1)$$

Здесь G есть модуль сдвига (или изменения формы) и K — модуль изменения объема. Постоянная величина F (аналогична модулям G и K; ее численное значение очень мало) свойственна веществам, состоящим из многих кристаллов разной ориентировки, потому что в таких веществах изменение формы обыкновенно вызывает изменение объема и наоборот. В совершенно упругих изотропных материалах F равно нулю.

Дифференцируя уравнение (1), получим:

$$\delta A = 2G\varepsilon_m\delta\varepsilon_m + 9K\varepsilon\,\delta\varepsilon + 2F|\varepsilon|\,\delta\varepsilon_m + 2F|\varepsilon_m|\,\delta\varepsilon;$$

но вариацию затраченной работы вследствие малого прироста деформаций можно выразить, не прибегая к какому-либо особенному закону упругости:

$$\delta A = \sigma_1\,\delta\varepsilon_1 + \sigma_2\,\delta\varepsilon_2 + \sigma_3\,\delta\varepsilon_3$$

или, разлагая общую деформацию на деформацию изменения формы и на деформацию изменения объема,

$$\delta A = (\sigma_1 - \sigma)\,\delta(\varepsilon_1 - \varepsilon) + (\sigma_2 - \sigma)\,\delta(\varepsilon_2 - \varepsilon) + (\sigma_3 - \sigma)\,\delta(\varepsilon_3 - \varepsilon) + 3\sigma\,\delta\varepsilon.$$

Сравнивая это выражение с вариацией упругой энергии, мы получим закон упругости:

$$\sigma_i - \sigma = \left\{2G + 2F\frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon_m|}\right\}(\varepsilon_i - \varepsilon) \qquad (i = 1,\ 2,\ 3); \qquad (2a)$$

$$\sigma = \left\{3K + \frac{2}{3}F\frac{|\varepsilon_m|}{|\varepsilon|}\right\}\varepsilon. \qquad (2b)$$

Эти уравнения выражают важный закон всех тел, обладающих полной или статической изотропией. Если возведем равенства (2a) в квадрат, сложим и извлечем квадратный корень, то получим:

$$\sigma_m = \left\{2G + 2F\frac{|\varepsilon|}{|\varepsilon_m|}\right\}\varepsilon_m. \qquad (3)$$

После деления уравнений (2a) на интенсивность напряжения получим:

$$\frac{\sigma_1 - \sigma}{\sigma_m} = \frac{\varepsilon_1 - \varepsilon}{\varepsilon_m}, \qquad \frac{\sigma_2 - \sigma}{\sigma_m} = \frac{\varepsilon_2 - \varepsilon}{\varepsilon_m}, \qquad \frac{\sigma_3 - \sigma}{\sigma_m} = \frac{\varepsilon_3 - \varepsilon}{\varepsilon_m}.$$

Здесь модуль сдвига не играет никакой роли, и уравнения выражают общий закон связи между напряжениями и деформациями изотропного тела.

Соотношениями этими пользовался уже М. Леви семьдесят лет назад, но он не заметил, что они означают больше, чем параллелизм главных осей тензора напряжения и деформации сдвига. Они означают:

1) что независимо от какого-либо закона упругости работу при малых перемещениях можно выразить в виде:

$$\delta A = \sigma_m\,\delta\varepsilon_m + 3\sigma\,\delta\varepsilon,$$

где σ есть гидростатическое напряжение $3\,\delta\varepsilon = \delta\,dV/dv$;

2) что единственно возможная формулировка условия текучести есть:

$$\sigma_m = \sigma_m^{\circ},$$

где σ_m° есть предел интенсивности напряжения. Это и есть условие Губера.

К сожалению, у О. Мора явилась неудачная идея связать предел текучести с вопросом о прочности. Несмотря на произвольность этого предположения, в виду того, что дело идет о совершенно разных механических явлениях, оно имело успех, и взгляд на предел текучести сделался общим и вытеснил правильные предложения Губера.

Опыт доказывает, что $\sigma_m{}^\circ$ не есть постоянная величина. Мы поэтому обобщаем закон упругости (3), вводя предел текучести в виде:

$$\sigma_m = \left\{ 2G \frac{\varepsilon_m{}^\circ}{\varepsilon_m} + 2G' \right\} \varepsilon_m, \tag{4}$$

где G' является новым модулем сдвига, величина его порядка $\sigma_m{}^\circ = 2G\varepsilon_m{}^\circ$.

В случае упрочнения предел текучести определяется критическим пределом деформации.

Для объяснения уравнения (4) вернемся к нашей модели упругого тела. Мы представили себе две пространственные фермы, занимающие объем твердого тела, с молекулами в качестве узловых точек. Одна из этих ферм представляет часть, обладающую пределом текучести, и $\varepsilon_m{}^\circ$ является интенсивностью деформации как раз на пределе текучести. Другая часть тела с возрастающим упругим сопротивлением соответствует сопротивлению междукристаллических слоев и влиянию неправильностей в строении кристаллов. Такая двухфазная система может всегда найти положение равновесия, хотя, конечно, уравнения для нагрузки отличаются от уравнений для разгрузки. Модель отражает все типичные явления упрочнения, например, поднятие мнимого предела текучести и так называемый Баушингер-эффект.

§ 3. Динамическая задача пластичности

Прежняя теория Мизеса, равно как и динамическая теория Генки, не дают удовлетворительных решений задачи для металлов. Теория Мизеса не учитывает влияния скоростей на напряжение, а теория Генки пользуется законом трения, который не соответствует результатам опытов с металлами. Нужно исправить теорию так, чтобы она соответствовала опытным данным и чтобы закон трения Ньютона был ее частным случаем.

Наша модель пластичного тела удовлетворительна только при сравнительно низких температурах. С повышением температуры происходит двоякое изменение: одна фаза нашей модели с предельной интенсивностью напряжения испытывает понижение этого предела интенсивности, а другая теряет постепенно в интенсивности напряжения благодаря релаксации. Введя символ для этой последней части напряжения, мы можем написать для падения напряжения формулу Максвелла:

$$\frac{d\sigma_m'}{dt} = 2G' \frac{d\varepsilon_m}{dt} - \frac{\sigma_m'}{T}, \tag{5}$$

где T есть постоянная величина.

Однако опыты с металлами показали, что закон падения напряжения сложнее, чем думал Максвелл. А. Надай показал в некоторых работах (опубликованных в журнале "Amer Soc. Mech. Eng."), что формулой (5) можно пользоваться при исследовании ползучести металлов. Но для точного описания опытов надо вместо уравнения (5) рассматривать уравнение:

$$\frac{d\sigma_m'}{dt} = 2G' \frac{d\varepsilon_m}{dt} - \frac{\sigma_m'}{T} \frac{e^{\omega\sigma_m'} - 1}{\omega\sigma_m'}. \tag{6}$$

Если u, v, w компоненты скорости частицы, то символ $\frac{d}{dt}$ обозначает:

$$\frac{d}{dt}=\frac{\partial}{\partial t}+u\frac{\partial}{\partial x}+v\frac{\partial}{\partial y}+w\frac{\partial}{\partial z}.$$

В случае $d\sigma_m'/dt=0$ получим:

$$\sigma_m'=\frac{1}{\omega}\ln\left\{1+2G'T\omega\frac{d\varepsilon_m}{dt}\right\}. \tag{7}$$

Это есть как раз эмпирическая формула Дейтлера. Если ω обращается в нуль, то мы получаем обыкновенный закон жидкого трения:

$$\sigma_m'=2G'T\frac{d\varepsilon_m}{dt}.$$

Уравнение (6) надо присоединить к уравнениям движения:

$$\rho\frac{du}{dt}=\frac{\partial\sigma_x}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y}{\partial z}+\frac{\partial\sigma_x'}{\partial x}+\frac{\partial\tau_z'}{\partial y}+\frac{\partial\tau_y'}{\partial z}\ (\downarrow), \tag{8}$$

где $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ суть напряжения той части пространственной фермы, которая подвергается пластической деформации, $\sigma_x', \sigma_y', \sigma_z', \tau_x', \tau_y', \tau_z'$ — напряжения, убывающие согласно уравнению (6), ρ есть плотность материала и знак ($\downarrow$) обозначает круговую подстановку букв x, y, z. Для решения этой системы надо сперва предположить, что тензор $\sigma_x, \sigma_y, \sigma_z, \tau_x, \tau_y, \tau_z$ исчезает.

Оставшаяся система переходит для $\omega=0$ в уравнения, данные Г. Генки. Присутствие статического тензора σ_m и динамического тензора σ_m', конечно, осложняет решение.

ЛИТЕРАТУРА

1. Boussinesq. Mecanique des semifluides. „Annales de l'École Normale Supérieure". 1918. T. 35. [P. 70—128].
2. Prandtl L. „Zeitschrift für angew. Math. u. Mech." 1921. Bd. I. [S. 15].
3. Hencky H. Statisch bestimmte Fälle des Gleichgewichts in plastischen Körpern. „Zeitschrift für angew. Math. u. Mech." 1923. Bd. III. [S. 241].
4. Huber A T. Czasopismo Technizne. Lemberg. 1904.
5. Mises. Göttinger Nachrichten. 1913. [S. 582—592].
6. Hencky H. International Congress for Applied Mechanics. „ZAMM". 1924. [S. 323].
7. Bingham E. C. Plasticity of solids. „Fluidity and Plasticity". New-York. 1923. [P. 225].
8. Hencky H. Langsame stationäre Strömungen in plastischen Massen. „Zeitschrift für angew. Math. u. Mech." 1925. Bd. V. [S. 115].

REVIEW OF THE MODERN THEORY OF PLASTICITY

H. K. HENCKY

(Summary)

This review was presentend by the author at the conference on plastic deformations held in the Academy of Sciences of the U. S. S. R. on the 22 of December, 1936. As was to be expected of such a research scientist in the theory of plasticity as H. K. Hencky, the work have not lost their significance even at the present time. The editorial board, therefore, takes pleasure in publishing them in this Journal.

In the present review, H. Hencky gives a short historical survey of various theories of plasticity, together with an analysis of basic hypotheses.