А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ — INSTITUTE OF MECHANICS

ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА" — JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 3, 1940

ЗАМЕТКИ

УРАВНЕНИЕ, ОПРЕДЕЛЯЮЩЕЕ ПЕРИОДЫ КОЛЕБАНИЙ СТЕРЖНЯ ПЕРЕМЕННОГО СЕЧЕНИЯ, В ОДНОМ ЧАСТНОМ СЛУЧАЕ

А. И. ШАХНАЗАРОВ

(Ленинград)

Приближенные методы, прилагаемые к вычислению периодов колебаний стержней переменного сечения, не всегда пригодны в исследовании зависимости периодов колебаний стержня от параметров, определяющих форму и материал последнего. В таких случаях оказывается иногда целесообразным предварительное нахождение точного уравнения, определяющего частоты, с последующим приближенным решением его.

В настоящей заметке рассматривается стержень, имеющий форму плоского усеченного клина, закрепленного на широком конце; выводится уравнение (1), определяющее собственные частоты колебаний этого стержня; затем указывается приближенная зависимость (2) частот достаточно большого порядка от параметров, определяющих форму и материал стержня.

Свободные поперечные колебания прямого стержня переменного сечения определяются, как известно, уравнением:

$$\rho S(x)\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}+E\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[J(x)\frac{\partial^2 z}{\partial x^2}\right]=0,$$

где $S(x)$ и $J(x)$ соответственно — площадь и момент инерции сечения стержня, ρ — плотность и E — модуль Юнга материала.

Если положить

$$z(x,\ t)=\varphi(x)\,\psi(t),$$

то функция $\varphi(x)$ определяется из уравнения:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[J(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right]-\frac{\lambda^2}{c^2}S(x)\,\varphi=0,$$

где λ — круговая частота и $c^2=E/\rho$.

Сечение стержня имеет форму прямоугольника с постоянным основанием a и высотой, убывающей линейно в зависимости от расстояния x сечения от закрепленного конца. При этих предположениях

$$S(x)=a\left(\frac{h_2-h_1}{l}x+h_1\right),$$

$$J(x)=\frac{1}{12}a\left(\frac{h_2-h_1}{l}x+h_1\right)^3,$$

где h_1 и $h_2\ (h_2<h_1)$ — высота сечения стержня соответственно в закрепленном и свободном концах и l — длина стержня.

Если ввести обозначения

$$\frac{lh_1}{h_2-h_1}=k,\qquad 12\frac{\lambda^2}{c^2}\left(\frac{l}{h^2-h_1}\right)^2=m^2,$$

то уравнение, определяющее $\varphi(x)$, примет вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[(x+k)^3\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right]-m^2(x+k)\varphi=0.$$

Если преобразовать это уравнение посредством тождества [1]:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left[(x+k)^3\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right]=\frac{d}{dx}(x+k)^2\frac{d}{dx}\frac{1}{x+k}\frac{d}{dx}(x+k)^2\frac{d\varphi}{dx},$$

то оно распадается на два уравнения:

$$(x+k)\frac{d^2\varphi}{dx^2}+2\frac{d\varphi}{dx}\pm m\varphi=0,$$

которые после замены переменной

$$m(x+k)=\xi$$

переходят в уравнения

$$\xi\frac{d^2\varphi}{d\xi^2}+2\frac{d\varphi}{d\xi}\pm\varphi=0.$$

Последние уравнения после замены переменных

$$\xi=-u^2/4,\quad \varphi=v/u$$

переходят соответственно в уравнения

$$\frac{d^2v}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{dv}{du}-\left(1+\frac{1}{u^2}\right)v=0,$$

$$\frac{d^2v}{du^2}+\frac{1}{u}\frac{dv}{du}+\left(1-\frac{1}{u^2}\right)v=0$$

с общими интегралами [2]

$$v=C_1I_1(u)+C_2K_1(u),$$
$$v=C_3J_1(u)+C_4Y_1(u).$$

Следовательно, уравнение, определяющее $\varphi(x)$, имеет общий интеграл:

$$\varphi(x)=\frac{1}{2i\sqrt{m(x+k)}}\Big\{C_1I_1\left[2i\sqrt{m(x+k)}\right]+$$
$$+C_2K_1\left[2i\sqrt{m(x+k)}\right]+C_3J_1\left[2i\sqrt{m(x+k)}\right]+C_4Y_1\left[2i\sqrt{m(x+k)}\right]\Big\}.$$

Из вариационных равенств

$$\frac{d}{dx}\left[J(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\right]\delta\varphi=0,\quad J(x)\frac{d^2\varphi}{dx^2}\delta\frac{d\varphi}{dx}=0$$

получаются граничные условия:

$$x=0,\quad \varphi=0,\quad \frac{d\varphi}{dx}=0$$

и

$$x=l,\quad \frac{d^2\varphi}{dx^2}=0,\quad \frac{d^3\varphi}{dx^3}=0.$$

Посредством соотношений

$$I_n'(x)=(n/x)\,I_n(x)+I_{n+1}(x),$$
$$J_n'(x)=(n/x)\,J_n(x)-J_{n+1}(x),$$
$$K_n'(x)=(n/x)\,K_n(x)+K_{n+1}(x),$$
$$Y_n'(x)=(n/x)\,Y_n(x)-Y_{n+1}(x)$$

граничные условия преобразуются в систему уравнений, определяющую произвольные постоянные C_1, C_2, C_3, C_4:

$$C_1I_1(-i\alpha)+C_2K_1(-i\alpha)+C_3J_1(-i\alpha)+C_4Y_1(-i\alpha)=0,$$
$$C_1I_2(-i\alpha)+C_2K_2(-i\alpha)-C_3J_2(-i\alpha)-C_4Y_2(-i\alpha)=0,$$
$$C_1I_3(-i\beta)+C_2K_3(-i\beta)+C_3J_3(-i\beta)+C_4Y_3(-i\beta)=0,$$
$$C_1I_4(-i\beta)+C_2K_4(-i\beta)-C_3J_4(-i\beta)-C_4Y_4(-i\beta)=0,$$

где

$$\alpha=\frac{2l}{h_1-h_2}\sqrt{\frac{\lambda}{c}h_1\sqrt{12}},\qquad \beta=\frac{2l}{h_1-h_2}\sqrt{\frac{\lambda}{c}h_2\sqrt{12}}.$$

Корни определителя этой системы являются собственными частотами колебаний стержня, иными словами, равенство нулю этого определителя представляет характеристическое уравнение рассматриваемой граничной задачи.

Пользуясь соотношениями

$$I_n(-ix)=(-i)^n J_n(x),$$

$$K_n(-ix)=-(-i)^n\left[\frac{1}{2}Y_n(x)+\ln(-i)J_n(x)\right],$$

$$J_n(-ix)=(-i)^n I_n(x),$$

$$Y_n(-ix)=-2(-i)^n\left[K_n(x)-\ln(-i)I_n(x)\right],$$

характеристическое уравнение можно представить в виде:

$$\begin{vmatrix} J_1(\alpha) & Y_1(\alpha) & I_1(\alpha) & -K_1(\alpha)\\ J_2(\alpha) & Y_2(\alpha) & -I_2(\alpha) & K_2(\alpha)\\ J_3(\beta) & Y_3(\beta) & I_3(\beta) & -K_3(\beta)\\ J_4(\beta) & Y_4(\beta) & -I_4(\beta) & K_4(\beta)\end{vmatrix}=0. \tag{1}$$

Можно приближенно вычислить достаточно большие корни этого уравнения, ограничиваясь первыми членами ассимптотических разложений функций Бесселя:

$$I_n(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi x}}e^x+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$Y_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\sin\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$J_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi x}}\cos\left(x-\frac{n\pi}{2}-\frac{\pi}{4}\right)+O\left(\frac{1}{x}\right),$$

$$K_n(x)=\sqrt{\frac{\pi}{2x}}e^{-x}\cos n\pi+O\left(\frac{1}{x}\right).$$

Разложение определителя по минорам, содержащимся в первых двух столбцах, приводит к уравнению:

$$\operatorname{cos\,hyp}\varepsilon\cos\varepsilon+1=0,$$

где

$$\varepsilon=\alpha-\beta.$$

Корни этого уравнения, как известно, имеют значения:

$$\varepsilon_1=1.87510,\quad \varepsilon_2=4.69410,\quad \varepsilon_3=7.85476,\quad \varepsilon_4=10.99654,\ldots$$

Так как

$$\alpha-\beta=\alpha\left(1-\sqrt{\frac{h_2}{h_1}}\right),$$

то

$$\lambda_n=\frac{\varepsilon_n^2}{8l^2}\sqrt{\frac{E}{3\rho}}\left(\sqrt{h_1}+\sqrt{h_2}\right)^2 \tag{2}$$

при больших значениях n.

Поступила в редакцию 2 XII 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kirchhoff. Ueber die Transversalschwingungen eines Stabes von veränderlichem Querschnitt. „Gesammelte Abhandlungen". 1882.
2. Уиттекер Е. Т. и Ватсон Г. Н. Курс современного анализа. ГТТИ. 1934. Ч. II. Гл. 17.

DIE GLEICHUNG, DIE DIE PERIODEN DER SCHWINGUNGEN EINES STABES VON VERÄNDERLICHEM QUERSCHNITT IN EINEN SPECIELLEN FALL DEFINIERT

A. I. SCHACHNASAROW

(Zusammenfassung)

In dieser Note wird ein Stab, welcher die Form eines ebenen abgestumpften Keiles hat und am breiteren Ende befestigt ist, betrachtet. Es wird die Gleichung der Eigenfrequenzen der Schwingungen dieses Stabes aufgestellt. Weiter wird eine angenäherte Abhängigkeit der Frequenzen genügend grosser Ordnung von Parametern, welche die Form und das Material des Stabes charackterisieren, abgeleitet.