

МЕХАНИЗМ БЕННЕТА

Ф. М. ДИМЕНТБЕРГ и Я. Б. ШОР

(Москва)

В 1903 г. Беннет^[1] (Bennett) описал найденный им четырехзвенный механизм с цилиндрическими шарнирами, оси которых попарно скрещиваются. В этом механизме выполняются следующие условия: 1) кратчайшие расстояния между осями шарниров образуют четырехугольник, 2) в этом четырехугольнике противоположные стороны равны, 3) углы между осями шарниров, примыкающих к равным сторонам этого четырехугольника, также равны, 4) между этими углами и сторонами имеет место соотношение

$$a : \sin \alpha = b : \sin \beta. \quad (1)$$

В своей статье Беннет изложил без какого-либо обоснования вышеуказанные условия, указал на простую зависимость между углами поворота противоположных звеньев механизма и дал графическую интерпретацию этой зависимости. Вопросы о необходимости вышеуказанных условий для шарнирного четырехзвенника со скрещивающимися осями Беннет не рассматривал.

Статья Беннета вызвала появление ряда работ. В 1918 г. Д'Окань^[2] (D'Ocagne) дал простое доказательство достаточности условий Беннета для подвижности шарнирного четырехзвенника. В 1921 г. Делассю^[3] (Delassus) сообщил в докладах Парижской академии о том, что им доказана необходимость условий Беннета для подвижности шарнирного четырехзвенника, т. е. что данный механизм является единственным четырехзвенником со скрещивающимися осями. Доказательство Делассю, основанное на рассмотрении пересечения двух гиперboloидов, изложено им, повидимому, в его другой работе^[7], напечатанной¹ в 1922 г. В 1924 г. Брикар^[2] (Bricard) указал на интересную связь между механизмом Беннета и некоторым тором. В 1925 г. Верховский^[5] опубликовал статью, в которой дано довольно громоздкое аналитическое доказательство достаточности условий Беннета и указана возможность двух модификаций механизма Беннета („прямой“ и „перекрестный“ механизмы). Не зная, повидимому, о работе Делассю, Верховский в своей статье допустил ошибку, указывая на возможность существования четырехзвенника, у которого кратчайшие расстояния между осями шарниров не образуют четырехугольника.

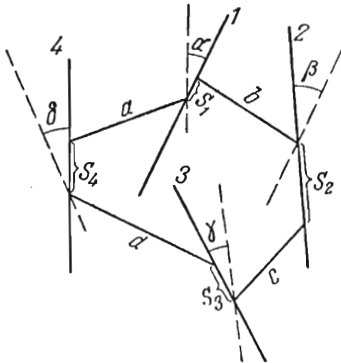
¹ См. Федергофер⁹ (Federhofer); статью^[7] нам не удалось достать.

В 1931 г. Мийяр^[10] (Myard), пользуясь вспомогательным тором, показал достаточность условий Беннета и дал зависимость между углами поворота противоположных звеньев в механизме Беннета для частного случая, когда две из осей в механизме взаимноперпендикулярны. Эгер^[8] (Egger) в своей работе 1936 г. изложил результаты работ Брикара^[2] и Мийяра^[10] с небольшими изменениями. В 1937 г. Бруевич^[3] дал в векторной форме доказательство достаточности условий Беннета и вывел для общего случая зависимость между углами поворота звеньев. Наконец, в 1939 г. Бюшгенс^[4] дал в векторной форме доказательство необходимости условий Беннета, чем подтвердил результат Делассю и ошибочность вышеуказанного заключения Верховского.

В настоящей работе предполагается дать простое доказательство необходимости и достаточности условий Беннета, обосновать существование двух модификаций механизма Беннета и, наконец, получить простую зависимость между углами поворота звеньев механизма Беннета и графическую интерпретацию этой зависимости для обеих модификаций механизма.

§ 1. Необходимость условий Беннета

Пусть задан пространственный четырехзвенный механизм с цилиндрическими шарнирами, оси 1, 2, 3 и 4 которых расположены в пространстве произвольно, т. е. не пересекаются и не параллельны (фиг. 1). Наличие подвижности механизма, хотя бы в некотором интервале, считаем заданным.



Фиг. 1.

Доказательство необходимости условия Беннета будет основано на рассмотрении двух предельных положений механизма.

Предварительно покажем отсутствие мертвых положений. Как известно, последние характеризуются тем, что относительная угловая скорость в одном из шарниров равна нулю, в то время как в остальных шарнирах угловые скорости могут быть отличны от нуля. В силу статической аналогии векторы мгновенных угловых скоростей на осях шарниров должны уравниваться в любом положении механизма. В нашем случае для мертвого положения имело бы место равновесие трех пространственных скрещивающихся векторов, что невозможно¹.

¹ Случай, когда все угловые скорости имеют единственно возможное значение — нуль, в механизме не может иметь место. Такое допущение соответствует „затвердению“ механизма, т. е. превращению в некотором положении в жесткую систему, и противоречит условию непрерывности. Действительно, все определители наивысшего порядка матрицы однородной системы линейных уравнений, связывающих угловые скорости, при наличии подвижности должны быть равны нулю, а при потере подвижности механизма должны быть отличны от нуля. Так как в силу непрерывного изменения определителей это невозможно, то мы убеждаемся в том, что кинематическая цепь, подвижная в некотором интервале, ни в каком положении не может обратиться в жесткую систему.

Таким образом механизм обладает полной проворачиваемостью, т. е. каждое его звено может быть повернуто относительно соседнего на произвольный угол. Поэтому, вращая звено b относительно неподвижного звена a , можно привести его в такое положение, при котором кратчайшие расстояния a и b между осями шарниров 4 , 1 и 2 будут параллельны. В этом положении оси шарниров 1 , 2 и 4 будут параллельны одной плоскости, которую мы обозначим через Q .

Проектируя все векторы угловых скоростей на прямую, перпендикулярную Q , получим, что проекция угловой скорости 3 равна нулю, откуда следует, что ось 3 также параллельна плоскости Q . А тогда получится, что в рассматриваемом положении механизма все кратчайшие расстояния a , b , c и d расположатся параллельно одному направлению. Назовем такое положение механизма предельным (механизм „сплюснен“). Очевидно, что таких предельных положений два. Ко второму мы придем, вращая звено b относительно стойки a в противоположном направлении.

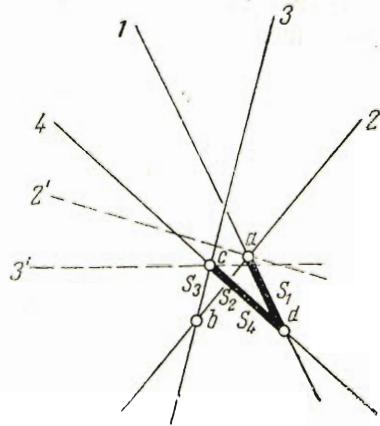
Для обоих предельных положений можно записать следующие очевидные соотношения:

$$\begin{aligned} \text{I.} \quad a + b &= c + d, & \alpha + \beta &= \gamma + \delta, \\ \text{II.} \quad a + d &= b + c, & \alpha + \delta &= \beta + \gamma. \end{aligned}$$

Откуда следует, что

$$a = c, \quad b = d, \quad \alpha = \gamma, \quad \beta = \delta. \quad (2)$$

Покажем, что кратчайшие расстояния между осями шарниров образуют четырехугольник, т. е. что любые два соседних кратчайших расстояния пересекаются. Допустим противное, т. е. что прямые a и b , b и c , c и d , d и a не пересекаются. Пусть они образуют отрезки s_1 , s_2 , s_3 и s_4 на осях шарниров. Изобразим проекции на плоскость Q осей механизма в первом предельном положении (фиг. 2). Во втором предельном положении оси 1 и 4 будут занимать то же положение, а оси 2 и 3 повернутся симметрично вокруг осей 1 и 4 соответственно (на фиг. 2 новые положения осей 2 и 3 отмечены пунктиром). При этом точка b пересечения отрезков s_2 и s_3 должна переместиться симметрично относительно осей 1 и 4 , что невозможно. Отсюда следует, что



Фиг. 2.

$$s_1 = s_2 = s_3 = s_4 = 0.$$

Нам остается теперь установить зависимость (1) в механизме Беннета. Рассмотрим равновесие векторов угловых скоростей в предельном положении механизма (фиг. 3). Векторы угловых скоростей ω_1 , ω_2 , ω_3 и ω_4 уравниваются. Из симметрии ясно, что $\omega_1 = \omega_3$ и $\omega_2 = \omega_4$. Так как система векторов ω_1 , ω_3 уравнивает систему ω_2 , ω_4 , то обе эти системы имеют общую

центральную ось U , которая является осью симметрии фигуры. Составив уравнение проекций на ось U и уравнение моментов вокруг этой оси, получим:

$$\omega_1 \cos \frac{\alpha - \beta}{2} = \omega_2 \cos \frac{\alpha + \beta}{2}, \quad \omega_1 \frac{a+b}{2} \sin \frac{\alpha - \beta}{2} = \omega_2 \frac{a-b}{2} \sin \frac{\alpha + \beta}{2}.$$

Откуда

$$\operatorname{tg} \frac{\alpha - \beta}{2} : \operatorname{tg} \frac{\alpha + \beta}{2} = \frac{a-b}{2} : \frac{a+b}{2},$$

или

$$\frac{\sin \alpha - \sin \beta}{\sin \alpha + \sin \beta} = \frac{a-b}{a+b}.$$

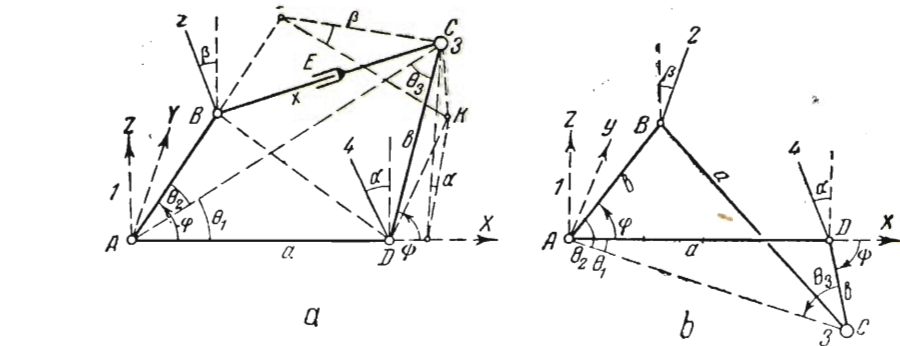
Откуда найдем:

$$\frac{a}{\sin \alpha} = \frac{b}{\sin \beta}. \quad (1)$$

§ 2. Достаточность условий Беннета

Простой подсчет числа связей в шарнирном четырехзвезднике показывает наличие в нем трех лишних связей.

В механизме Беннета имеются, следовательно, три пассивных связи. Покажем, что, наложив три пассивных связи на некоторый механизм, удовлетворяющий условиям Беннета и не имеющий пассивных связей, мы получим механизм Беннета. Этим самым будет доказана достаточность условий.



Фиг. 4.

Пусть дан пятизвенный механизм $ABECD$ (фиг. 4а). В точках A , B и D находятся цилиндрические шарниры, в точке C — сферический шарнир, в точке E — поступательная пара с одной степенью свободы. Этот механизм можно рассматривать как четырехзвенный, у которого звено BC имеет переменную длину. Пусть в этом механизме звено $AD = a$ неподвижно, $AB = CD = b$, $a : b = \sin \alpha : \sin \beta$, где α — угол между осями 1 и 4 шарниров A и D ,

а β — угол между осями 1 и 2 шарниров A и B . Ось 1 перпендикулярна к плоскости BAD , ось 2 перпендикулярна к плоскости ABC , ось 4 перпендикулярна к плоскости ADC .

При этих условиях звено AB все время остается в неподвижной плоскости BAD , а звено DC движется в неподвижной плоскости ADC , которая образует угол α с плоскостью ABD . Покажем, что длина x звена BC при движении механизма остается постоянной. Опустим из точки C перпендикуляры CK , CB' и CD' на плоскость BAD , прямую AB и прямую AD . Из треугольников $CB'K$ и $CD'K$ имеем:

$$CK = AC \sin \theta_1 \sin \alpha, \quad CK = AC \sin \theta_2 \sin \beta,$$

откуда

$$\sin \theta_1 : \sin \theta_2 = \sin \beta : \sin \alpha.$$

Принимая во внимание зависимость (1) и соотношение

$$b : a = \sin \theta_1 : \sin \theta_3,$$

которое имеет место в треугольнике ADC , получим:

$$\theta_2 = \theta_3,$$

откуда следует, что треугольники ABC и ADC равны, т. е.

$$x = a.$$

Поэтому можно в точке E наложить пассивную связь, жестко связав звенья BE и EC в одно звено BC .

Покажем теперь, что в сферическом шарнире C можно наложить две пассивные связи¹. Рассмотрим теперь тетраэдр $ABCD$. Обозначим двугранные углы, ребрами которых являются AB , BC , CD и AD , через (AB) , (BC) , (CD) и (AD) . Согласно известной зависимости между двугранными и плоскими углами в тетраэдре имеем:

$$\sin(DC) : \sin(AD) = \sin BDA : \sin BDC.$$

Так как $(AD) = \alpha$ и $BDA = DBC$, то

$$\sin(DC) : \sin \alpha = \sin DBC : \sin BDC = b : a,$$

откуда следует, что

$$(DC) = \beta.$$

Аналогично доказывается, что

$$(BC) = \alpha.$$

Проведем теперь через точку C ось 3 перпендикулярно к плоскости BCD . Ясно, что

$$\angle(3, 4) = (CD) = \beta, \quad \angle(3, 2) = (CB) = \alpha.$$

Это означает, что прямая 3 образует во время движения постоянные углы с прямыми CD и 4 и с прямыми CB и 2. Поэтому, если вместо сферического шарнира в точке C поставить цилиндрический шарнир с осью 3, то подвижность механизма не нарушится. Такая замена шарнира эквивалентна наложению двух пассивных связей. Этим самым достаточность условий Беннета доказана вполне.

¹ Здесь мы будем следовать Д'Окань^[11].

Рассмотренный только что механизм Беннета (фиг. 4а) мы будем называть прямым. Его можно рассматривать как результат деформации плоского шарнирного параллелограмма путем поворота осей шарниров. В этом механизме направления вращения звеньев AB и DC одинаковы. Заметим еще, что в прямом механизме при последовательном обходе всех шарниров углы отклонения осей шарниров друг от друга последовательно меняют направление. Это значит, что если при переходе от A и B мы видим отклонение оси 2 от оси 1 против часовой стрелки, то при переходе от B к C мы увидим отклонение оси 3 от 2 по часовой стрелке, затем 4 от 3 вновь против часовой стрелки и 1 от 4 — по часовой стрелке.

Совершенно так же, как мы убедились в существовании прямого механизма, можно убедиться и в существовании перекрестного механизма (фиг. 4б). Перекрестный механизм можно рассматривать как результат деформации плоского шарнирного антипараллелограмма. В этом механизме направления вращения звеньев AB и DC противоположны (при $a > b$). Заметим еще, что в перекрестном механизме при последовательном обходе всех шарниров углы отклонения осей шарниров друг от друга видны в одном и том же направлении.

§ 3. Зависимость между углами поворота ведущего и ведомого звеньев

Установим зависимость между углами поворота φ и ψ звеньев AB и DC (фиг. 4а). Примем прямую AD за ось X , примем ось шарнира A за ось Z и проведем ось Y в плоскости ABD перпендикулярно к оси X . Из чертежа находим:

$$\begin{aligned} x_B &= b \cos \varphi, & y_B &= b \sin \varphi, & z_B &= 0, \\ x_C &= a + b \cos \psi, & y_C &= b \sin \psi \cos \alpha, & z_C &= b \sin \psi \sin \alpha. \end{aligned}$$

Легко видеть, что точно такие же соотношения имеют место и для перекрестного механизма.

Запишем, что квадрат расстояния между точками B и C равен a^2 . После упрощений получим:

$$b + a (\cos \psi - \cos \varphi) - b \cos \varphi \cos \psi - b \sin \varphi \sin \psi \cos \alpha = 0.$$

Сделав подстановку

$$u = \operatorname{tg}(\varphi/2), \quad v = \operatorname{tg}(\psi/2),$$

будем иметь:

$$(b - a)v^2 + (b + a)u^2 - 2buv \cos \alpha = 0.$$

Решив это квадратное уравнение относительно v и принимая во внимание соотношение (1), получим:

$$v = u \frac{\sin(\beta \pm \alpha)}{\sin \beta - \sin \alpha}. \quad (2)$$

Разберем два возможных случая.

При знаке плюс будем иметь:

$$v = u \sin \frac{\beta + \alpha}{2} : \sin \frac{\beta - \alpha}{2},$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \sin \frac{\beta + \alpha}{2} : \sin \frac{\beta - \alpha}{2}. \quad (3)$$

Так как при $a > b$ и $\alpha > \beta$ углы φ и ψ имеют разные знаки, то, следовательно, формула (3) относится к перекрестному механизму.

При знаке минус получим:

$$v = u \cos \frac{\beta - \alpha}{2} : \cos \frac{\beta + \alpha}{2},$$

или

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2} \cos \frac{\beta - \alpha}{2} : \cos \frac{\beta + \alpha}{2}. \quad (4)$$

Так как при любых a и b , α и β знаки углов φ и ψ одинаковы, то, следовательно, формула (4) относится к прямому механизму.

Формулы (3) и (4) можно объединить в одну формулу:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = K \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}, \quad (5)$$

где K — постоянный множитель, зависящий от размеров и вида механизма. Дифференцируя уравнение (5) по времени t , получим:

$$\omega_2 \sec^2 \frac{\psi}{2} = K \omega_1 \sec^2 \frac{\varphi}{2},$$

где $\omega_2 = \frac{d\psi}{dt}$ и $\omega_1 = \frac{d\varphi}{dt}$. Отсюда легко находим:

$$\omega_2 = \omega_1 \frac{K [1 + \operatorname{tg}^2 (\varphi/2)]}{1 + K^2 \operatorname{tg}^2 (\varphi/2)}. \quad (6)$$

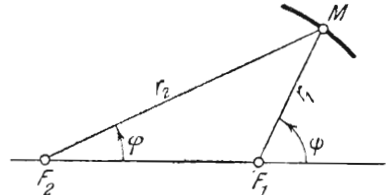
Отсюда видно, что при постоянной угловой скорости ω_1 угловая скорость ω_2 изменяется в пределах от $\omega_1 K$ (при $\varphi = 0$) до ω_1 / K (при $\varphi = \pi$).

Равенство

$$|\omega_1| = |\omega_2|$$

наступает при

$$\operatorname{tg}^2 (\varphi/2) = 1 : |K|. \quad (7)$$



Фиг. 5.

Нетрудно дать простую геометрическую интерпретацию зависимости между ψ и φ .

Рассмотрим плоское коническое сечение с фокусами F_1 и F_2 и эксцентриситетом e (фиг. 5). Для радиусов-векторов r_1 и r_2 произвольной точки M на этом сечении

$$r_1 = \frac{p}{1 + e \cos \psi}, \quad r_2 = \frac{p}{1 + e \cos (\pi - \varphi)}.$$

Подставив эти значения в очевидную зависимость

$$r_1 : r_2 = \sin \varphi : \sin \psi,$$

получим после простых преобразований:

$$\operatorname{tg} \frac{\psi}{2} = \frac{1 + e}{1 - e} \operatorname{tg} \frac{\varphi}{2}.$$

Выберем эксцентриситет e так, чтобы

$$\frac{1 + e}{1 - e} = K, \quad \text{или} \quad e = \frac{K - 1}{K + 1}. \quad (8)$$

Тогда, при движении точки M по коническому сечению, углы ψ и φ на фиг. 5 будут изменяться так же, как углы поворота звеньев механизма Беннета. Это коническое сечение будем называть диаграммой механизма.

Для случая прямого механизма из уравнения (8) получим:

$$e = \operatorname{tg}(\alpha/2) \operatorname{tg}(\beta/2).$$

Так как $\alpha < \pi/2$ и $\beta < \pi/2$, то $e < 1$. Значит, для прямого механизма диаграмма будет эллиптической.

Для случая перекрестного механизма получим:

$$e = \operatorname{tg}(\alpha/2) : \operatorname{tg}(\beta/2).$$

При $\alpha > \beta$ диаграмма будет гиперболической, а для $\alpha < \beta$ — эллиптической.

Поступила в редакцию
7 IV 1940.

Институт механики
Академии Наук СССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Bennett G. T. A new mechanism. "Engineering". London. 1908. Стр. 778.
2. Bricard R. Démonstrations élémentaires de propriétés fondamentales du tore. „Nouvelles annales de mathématiques“. 1924. Стр. 308—313.
3. Бруевич Н. Г. Кинестатика пространственных механизмов. „Труды военной воздушной академии им. Жуковского“. 1937. № 22.
4. Бюшгенс С. С. Механизм Беннета-Верховского. „Прикладная математика и механика“. 1939. Т. II. Вып. 4. Стр. 513—518.
5. Верховский А. В. Четырехзвенный пространственный механизм с цилиндрическими шарнирами, оси которых не параллельны и не пересекаются в одной точке, и его исследование. „Известия Томского технологического института“. 1925. Т. 46. Вып. 2.
6. Delassus E. Sur les chaînes articulées fermées. C. R. 1921. Стр. 1331—1333.
7. Delassus E. Bull. Sciences mathématiques. 1922. Т. 46. Стр. 283—304.
8. Egger H. Das Raumgetriebe von Bennett. „Maschinenbau“. 1936. № 1-2. Стр. 42—43.
9. Federhofer K. Graphische Kinematik und Kinetostatik. 1932. Стр. 63—69.
10. Myard F. E. Sur les chaînes fermées à quatre couples rotoïdes non concourants, déformables au premier degré de liberté. C. R. 1931. Стр. 1194—1196.
11. D'Ocagne M. Cours de Géométrie pure et appliquée de l'école polytechnique. 1918. Т. II. Стр. 54—56.

BENNETT'S MECHANISM

F. M. DIMENTBERG and J. B. SHOR

(Summary)

A simple proof of the requisite and sufficient conditions of Bennett's mechanism is given. It is shown that two modifications of Bennett's mechanism exist; the relationships for the angles being also given.