

Т. IV, в. 2, 1940

ПРИСОЕДИНЕННАЯ МАССА РЕШЕТКИ, СОСТОЯЩЕЙ  
ИЗ ПРЯМОУГОЛЬНИКОВ

М. И. ГУРЕВИЧ

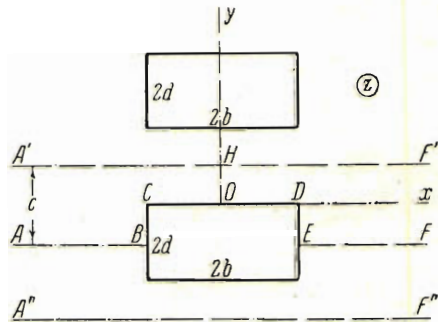
(Москва)

§ 1. Определение коэффициента присоединенной массы  $\lambda_x$  в направлении, перпендикулярном к оси решетки. Рассмотрим прямую решетку, состоящую из одинаковых прямоугольников (фиг. 1) со сторонами  $2d$  и  $2b$  и периодом  $2c$ . Начало системы декартовых координат поместим в центре одного из прямоугольников, а оси координат направим параллельно сторонам прямоугольников. Пусть на решетку набегает поток несжимаемой, идеальной жидкости плотности  $\rho$ . В бесконечности скорость потока параллельна оси  $x$  и равна единице.

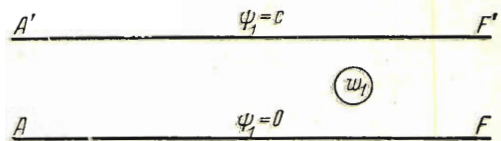
Горизонтальные прямые, проходящие посередине между двумя соседними прямоугольниками, являются линиями тока. Так же прямолинейны линии тока, подходящие к серединам вертикальных стенок прямоугольников. Симметрия потока позволяет ограничиться изучением течения в полосе  $AF' A'$ .

Область изменения комплексного потенциала  $w_1 = \varphi_1 + i\psi_1$  представляет собой полосу (фиг. 2), ограниченную прямыми  $\psi_1 = 0$  и  $\psi_1 = c$ . Область изменения комплексной скорости  $\frac{dw_1}{dz} = v_{1x} - iv_{1y}$

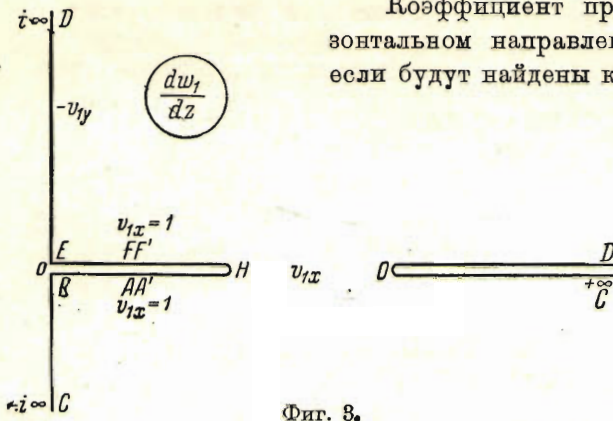
простирается на всю правую половину плоскости (фиг. 3) с разрезами от 0 до точки  $H$  и от  $\infty$  до точки  $O$ . Соответственные точки на всех фигурах обозначены одинаковыми большими латинскими буквами.



Фиг. 1.



Фиг. 2.



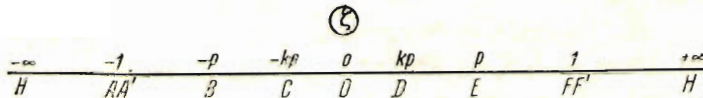
Фиг. 3.

Коэффициент присоединенной массы в горизонтальном направлении  $\lambda_x$  может быть вычислен, если будут найдены конформные отображения областей изменения  $w_1$  и  $\frac{dw_1}{dz}$  друг на друга или, что равносильно, на верхнюю полуплоскость (фиг. 4) параметрического переменного  $\zeta$ . Последние отображения могут быть найдены при помощи формул Кристоффеля-Шварца:

$$\varphi_1 + i\psi_1 = w_1 = \frac{c}{\pi} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} + ic, \tag{1}$$

$$v_{1x} - iv_{1y} = \frac{dw_1}{dz} = \sqrt{\frac{1 - k^2 p^2}{1 - p^2}} \sqrt{\frac{\zeta^2 - p^2}{\zeta^2 - k^2 p^2}}. \tag{2}$$

Правильность формул (1) и (2) легко проверить непосредственно, если проследить за изменением  $\zeta$  вдоль действительной оси. При этом предпола-



Фиг. 4.

гается, что в (1) при  $\zeta > 1$  логарифм имеет главное значение, а радикал во (2) положителен при  $\zeta > p$ . Из (1) и (2) получаем:

$$z(\zeta) = \frac{2c}{\pi} \sqrt{\frac{1 - p^2}{1 - k^2 p^2}} \int \sqrt{\frac{\zeta^2 - k^2 p^2}{\zeta^2 - p^2}} \frac{d\zeta}{1 - \zeta^2}. \tag{3}$$

Пользуясь (3), можно вычислить отношения сторон прямоугольников к периоду решетки. Учитывая значения корня квадратного на различных частях действительной оси  $\zeta$ , получаем:

$$\frac{d}{c} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1 - p^2}{1 - k^2 p^2}} \int_{kp}^p \sqrt{\frac{\zeta^2 - k^2 p^2}{p^2 - \zeta^2}} \frac{d\zeta}{1 - \zeta^2}, \tag{4}$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2}{\pi} \sqrt{\frac{1 - p^2}{1 - k^2 p^2}} \int_0^{kp} \sqrt{\frac{k^2 p^2 - \zeta^2}{p^2 - \zeta^2}} \frac{d\zeta}{1 - \zeta^2}. \tag{5}$$

Интегралы, стоящие в правых частях формул (4) и (5), суть эллиптические интегралы третьего рода. Их легко привести к каноническому виду, полагая в формулах (4) и (5) соответственно:

$$\zeta = p \sqrt{1 - t^2 k^2} \quad \text{и} \quad \zeta = kpt,$$

где

$$k'^2 = 1 - k^2.$$

Тогда

$$\frac{d}{c} = \frac{2pk'^2}{\pi \sqrt{1-p^2} \sqrt{1-k^2 p^2}} \int_0^1 \frac{\sqrt{1-t^2}}{\sqrt{1-k'^2 t^2}} \frac{dt}{1+t^2 \frac{p^2 k'^2}{1-p^2}}, \quad (4a)$$

$$\frac{b}{c} = \frac{2k^2 p}{\pi} \sqrt{\frac{1-p^2}{1-k^2 p^2}} \int_0^1 \sqrt{\frac{1-t^2}{1-k^2 t^2}} \frac{dt}{1-k^2 p^2 t^2}. \quad (5a)$$

Интегралы, входящие в (4а) и (5а), выражаются через тэта функции (см. справочник Оюеля<sup>[1]</sup>):

$$\frac{d}{c} = \frac{d}{dx'} \lg \vartheta_3(\alpha' i, q'), \quad (4b)$$

$$\frac{b}{c} = - \frac{d}{dx} \lg \vartheta_3(\alpha, q), \quad (5b)$$

где

$$\operatorname{sn} a = p, \quad \text{или} \quad a = \int_0^p \frac{dt}{\sqrt{(1-t^2)(1-k^2 t^2)}};$$

$$\alpha = \frac{\pi a}{2K}, \quad \alpha' = \frac{\pi a'}{2K'}, \quad q = e^{-\frac{\pi K'}{K}}, \quad q' = e^{-\frac{\pi K}{K'}};$$

$$K = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k^2 t^2}}, \quad K' = \int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t^2} \sqrt{1-k'^2 t^2}};$$

$$\vartheta_3(\alpha, q) = 1 + 2q \cos 2\alpha + 2q^4 \cos 4\alpha + 2q^9 \cos 6\alpha + \dots,$$

$$\vartheta_3(\alpha' i, q') = 1 + 2q' \operatorname{ch} 2\alpha' + 2q'^4 \operatorname{ch} 4\alpha' + 2q'^9 \operatorname{ch} 6\alpha' + \dots$$

Применяя к  $\vartheta_3(\alpha' i, q')$  мнимое преобразование Якоби (см. справочник Оюеля<sup>[1]</sup>), можно получить важное для практических вычислений соотношение:

$$\frac{d}{c} = \frac{a}{K} - \frac{K' b}{Kc}. \quad (6)$$

Формулы (4b) и (5b), или, что одно и то же, (5b) и (6), связывают  $k$  и  $p$  с геометрическими параметрами решетки. Для вычисления  $\lambda_x$  — присоединенной массы прямоугольника решетки — воспользуемся результатом Л. И. Седова<sup>[2]</sup>:

$$\lambda_x = \rho \left( -4bd + i \oint z dW_1 \right),$$

где  $-4bd$  равно площади крыла, умноженной на скорость движения центра тяжести его (при жидкости, покоящейся в бесконечности, и движущейся решетке);

$$W_1 = w_1 - z \quad (7)$$

комплексный потенциал абсолютного движения жидкости, а интеграция производится против часовой стрелки по произвольному контуру, окружающему один из прямоугольников (крыло).

Выберем за контур интеграции прямолинейный контур  $A' A'' F'' F' A'$ , причем эти точки (фиг. 1) будем удалять вправо и влево в бесконечность.

Так как в бесконечности  $z dW_1 = 0$ , а  $z$  на линиях тока  $A'F'$  и  $A''F''$  отличается при одинаковых абсциссах лишь на величину  $2ci$  и так как  $dW_1$  периодически с периодом  $2ci$ , то легко видеть, что

$$\lambda_x = \rho(-4bd + 2cy), \quad (8)$$

где

$$\mu = W_{1F'} - W_{1A'}$$

представляет собой разность комплексных потенциалов абсолютного течения жидкости в точках  $F'$  и  $A'$  при удалении этих точек в бесконечность. Для вычисления  $\mu$  преобразуем неопределенный интеграл, входящий в выражение:

$$W_1 = \frac{c}{\pi} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} - \frac{2c}{\pi} \sqrt{\frac{1-p^2}{1-k^2p^2}} \int \sqrt{\frac{\zeta^2 - k^2p^2}{\zeta^2 - p^2}} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2}.$$

Заменяя в этом интеграле  $\zeta$  через  $\frac{p}{t}$ , получим:

$$W_1 = \frac{c}{\pi} \lg \frac{p+t}{p-t} + \frac{2cp}{\pi} \sqrt{\frac{1-p^2}{1-k^2p^2}} \int \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} \frac{dt}{t^2-p^2}.$$

Отсюда

$$\begin{aligned} \mu &= W_{1F'} - W_{1A'} = \lim_{t \rightarrow p} [W_1(t) - W_1(-t)] = \\ &= \lim_{t \rightarrow p} \left[ \frac{c}{\pi} \lg \frac{p+t}{p-t} + \frac{2c}{\pi} p \sqrt{\frac{1-p^2}{1-k^2p^2}} \int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} \frac{dt}{t^2-p^2} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{c}{\pi} \lg \frac{p-t}{p+t} - \frac{2c}{\pi} p \sqrt{\frac{1-p^2}{1-k^2p^2}} \int_0^{-t} \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} \frac{dt}{t^2-p^2} \right] = \\ &= \lim_{t \rightarrow p} \frac{2c}{\pi} \left[ \lg \frac{p+t}{p-t} + 2p \sqrt{\frac{1-p^2}{1-k^2p^2}} \int_0^t \sqrt{\frac{1-k^2t^2}{1-t^2}} \frac{dt}{t^2-p^2} \right] = \\ &= \lim_{u \rightarrow a} \frac{2c}{\pi} \left[ \lg \frac{\operatorname{sn} a + \operatorname{sn} u}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} + 2 \operatorname{sn} a \frac{\operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \operatorname{du}}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} \right], \quad (9) \end{aligned}$$

где

$$p = \operatorname{sn} a, \quad t = \operatorname{sn} u.$$

Для вычисления предела воспользуемся соотношениями [1]:

$$\frac{\operatorname{sn} a \operatorname{cn} a}{\operatorname{dn} a} \int_0^u \frac{\operatorname{dn}^2 u \operatorname{du}}{\operatorname{sn}^2 u - \operatorname{sn}^2 a} = x \frac{d}{dx} \lg \mathfrak{F}_3 \alpha - X,$$

где

$$\begin{aligned} \alpha &= \frac{\pi x}{2K}, \quad x = \frac{\pi u}{2K}, \quad X = \frac{1}{2} \lg \frac{\mathfrak{F}_1(x+\alpha)}{\mathfrak{F}_1(x-\alpha)}, \\ \mathfrak{F}_1 \alpha &= 2q^{\frac{1}{4}} \sin \alpha - 2q^{\frac{9}{4}} \sin 3\alpha + \dots \end{aligned}$$

В наших условиях  $u$  стремится к  $a$ ,  $x$  стремится к  $\alpha$  и

$$\mathfrak{F}_1(x-\alpha) = (x-\alpha) \mathfrak{F}_1' = (x-\alpha) 2 \left( q^{\frac{1}{4}} - 3q^{\frac{9}{4}} + 5q^{\frac{25}{4}} - \dots \right).$$

Подставляя эти величины в (9) и учитывая, что

$$\lim_{u \rightarrow a} \frac{a-u}{\operatorname{sn} a - \operatorname{sn} u} = \frac{1}{\frac{d \operatorname{sn} a}{da}} = \frac{1}{\operatorname{cn} a \operatorname{dn} a} = \frac{1}{\sqrt{1-p^2} \sqrt{1-k^2 p^2}},$$

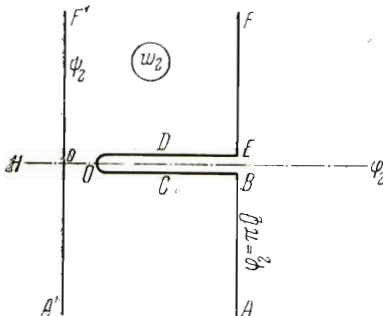
получим

$$\mu = \frac{2c}{\pi} \left( \operatorname{lg} \frac{\pi p \vartheta_1'}{K \sqrt{1-p^2} \sqrt{1-k^2 p^2} \vartheta_1 \left( \frac{\pi a}{K} \right)} - \frac{\pi a}{K} \frac{b}{c} \right).$$

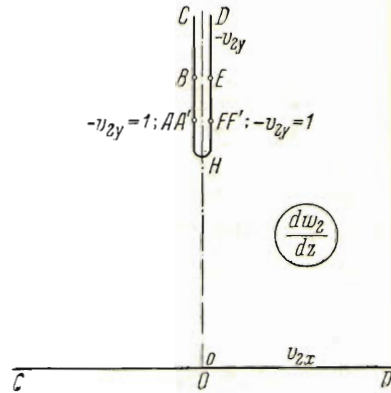
Вставляя это выражение для  $\mu$  в (8) и пользуясь (6), получаем окончательную формулу:

$$\lambda_x = \rho \left[ -8bd - 4b^2 \frac{K'}{K} + \frac{4c^2}{\pi} \operatorname{lg} \frac{\pi p \vartheta_1'}{K \sqrt{1-p^2} \sqrt{1-k^2 p^2} \vartheta_1 \left( \frac{\pi a}{K} \right)} \right]. \quad (8a)$$

**§ 2. Определение коэффициента присоединенной массы  $\lambda_y$  в направлении, параллельном оси решетки.** Рассмотрим поток, движущийся в бесконечности от решетки, параллельно ее оси, со скоростью, равной единице. Вследствие симметрии потока, так же как и в § 1, изучим лишь течение жидкости, заполняющей область  $AFF'A'$  (фиг. 1). Область изменения комплексного потенциала  $w_2$  представляет собой вертикальную полосу (фиг. 5) шириной  $\pi Q$  с разрезом от  $\pi Q$  до точки  $O$ , причем величина  $Q$  пока неизвестна и будет определена позднее. Область изменения комплексной скорости  $\frac{dw_2}{dz}$  представляет собой верхнюю полуплоскость (фиг. 6) с разрезом от  $i\infty$  до точки  $H$ .



Фиг. 5.



Фиг. 6.

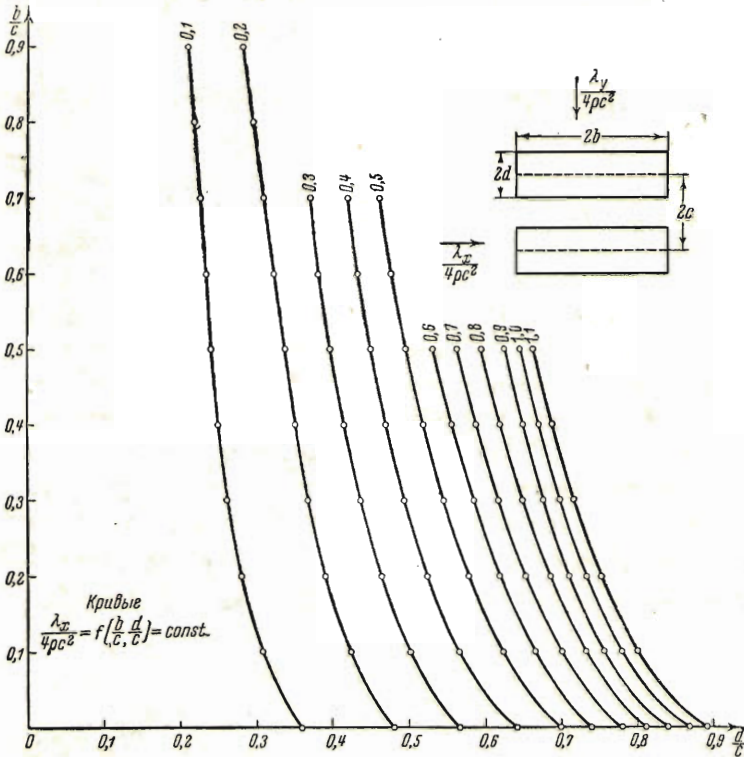
При помощи формул Кристофеля-Шварца можно найти отображение этих областей на нашу прежнюю верхнюю полуплоскость переменного  $\zeta$ :

$$w_2 = \varphi_2 + i\psi_2 = iQ \operatorname{lg} \frac{\sqrt{\zeta^2 - p^2} + \sqrt{1-p^2}}{\sqrt{\zeta^2 - p^2} - \sqrt{1-p^2}}, \quad (10)$$

$$\frac{dw_2}{dz} = v_{2x} - iv_{2y} = \frac{i\zeta \sqrt{1-k^2 p^2}}{\sqrt{\zeta^2 - k^2 p^2}}. \quad (11)$$

Правильность формул (10) и (11) легко проверить непосредственно, если проследить за изменением  $\zeta$  вдоль действительной оси. При этом предполагается, что при  $\zeta > p$  все радикалы, входящие в формулы (10) и (11), положительны, а логарифм имеет главное значение при  $\zeta > 1$ . Из (10) и (11) получаем:

$$z(\zeta) = 2Q \sqrt{\frac{1-p^2}{1-k^2 p^2}} \int \sqrt{\frac{\zeta^2 - k^2 p^2}{\zeta^2 - p^2}} \frac{d\zeta}{1-\zeta^2}$$



Фиг. 7.

Так как формула эта реализует то же отображение области  $AFF'A'$  (фиг. 1) на верхнюю полуплоскость, что и формула (3) § 1, то обе формулы должны быть тождественны и, следовательно,

$$Q = \frac{c}{\pi}$$

Таким образом отношения  $\frac{d}{c}$  и  $\frac{b}{c}$  вычисляются по формулам § 1, и нам остается найти коэффициент присоединенной массы  $\lambda_y$ . Пользуясь опять результатом упомянутой работы Л. И. Седова

$$\lambda_y = -4\rho bd - \rho \oint z dW_2,$$

где  $W_2$  — комплексный потенциал абсолютного течения жидкости, равный

$$W_2 = w_2 - iz, \tag{12}$$

и повторяя рассуждения § 1, можно показать, что

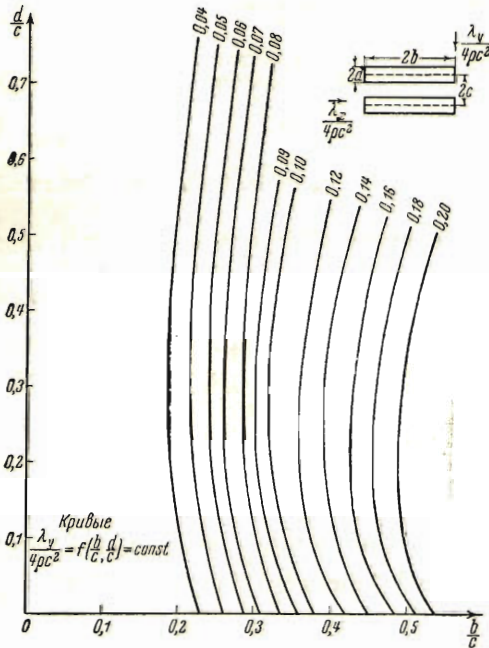
$$\lambda_y = -4\rho bd - 2\rho ci (W_{2A'} - W_{2F'}), \tag{13}$$

где  $W_{2A'} - W_{2F'}$  — разность комплексных потенциалов в точках  $A'$  и  $F'$  при удалении этих точек в бесконечность влево и вправо соответственно. Пользуясь (1), (7), (10) и (12), вычисляем сумму:

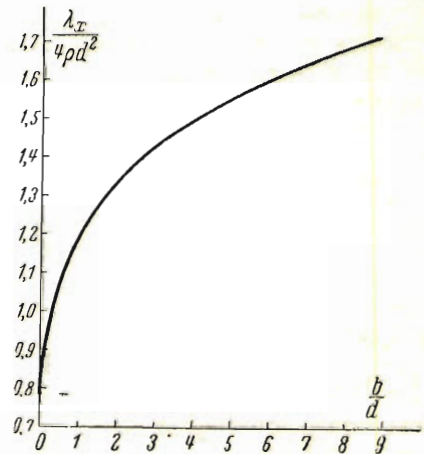
$$\begin{aligned} i(W_{2F'} - W_{2A'}) + \mu &= i(W_{2F'} - W_{2A'}) + (W_{1F'} - W_{1A'}) = \\ &= \lim_{\zeta \rightarrow 1} [i(W_2(\zeta) - W_2(-\zeta)) + W_1(\zeta) - W_1(-\zeta)] = \\ &= 2 \lim_{\zeta \rightarrow 1} \left[ -\frac{c}{\pi} \lg \frac{\sqrt{\zeta^2 - p^2} + \sqrt{1 - p^2}}{\sqrt{\zeta^2 - p^2} - \sqrt{1 - p^2}} + \frac{c}{\pi} \lg \frac{\zeta + 1}{\zeta - 1} \right] = \\ &= \frac{2c}{\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \lg \frac{\sqrt{\zeta^2 - p^2} - \sqrt{1 - p^2}}{\sqrt{1 - p^2}(\zeta - 1)} = \frac{2c}{\pi} \lim_{\zeta \rightarrow 1} \lg \frac{d \sqrt{\zeta^2 - p^2}}{d\zeta \sqrt{1 - p^2}} = \frac{2c}{\pi} \lg \frac{1}{1 - p^2}. \end{aligned} \quad (14)$$

Так как из соотношения (8)

$$\mu = \frac{\lambda_x}{2\rho c} + \frac{2bd}{c},$$



Фиг. 8.



Фиг. 9.

то по (13) и (14)

$$\lambda_y = -4\rho bd + 2\rho c \left[ \frac{2c}{\pi} \lg \frac{1}{1 - p^2} - \frac{\lambda_x}{2\rho c} - \frac{2bd}{c} \right],$$

или

$$\lambda_x + \lambda_y = -8\rho bd + \frac{4\rho c^2}{\pi} \lg \frac{1}{1 - p^2}. \quad (15)$$

Формулы (5b), (6), (8a), (15) позволяют вычислять оба коэффициента присоединенной массы прямой решетки, состоящей из прямоугольников. В предельных случаях, когда  $\frac{b}{c} = 0$  и когда  $\frac{d}{c} = 0$ , прямоугольники вырождаются в плоские пластинки и из наших формул получаются известные результаты Л. И. Седова [3]:

$$\begin{aligned} \lambda_y = 0, \quad \lambda_x &= \frac{8\rho c^2}{\pi} \lg \frac{1}{\cos \frac{\pi d}{2c}} && \text{при } \frac{b}{c} = 0; \\ \lambda_x = 0, \quad \lambda_y &= \frac{8\rho c^2}{\pi} \lg \operatorname{ch} \frac{\pi b}{2c} && \text{при } \frac{d}{c} = 0. \end{aligned}$$

Другим интересным предельным случаем будет тот, когда  $k$  остается произвольным, а  $p$  стремится к нулю. В пределе при этом получается решетка с бесконечно большим периодом, или, иными словами, изолированный прямоугольник. Коэффициент присоединенной массы  $\lambda_x$  вычисляется тогда при помощи формул:

$$\lambda_x = -4\rho b d + \frac{4\rho}{\pi}(1 - k^2)(Kd + K'b)^2, \quad (16)$$

$$\frac{b}{d} = \frac{-k'^2 K + E}{-k^2 K' + E'}. \quad (17)$$

Здесь  $E$  и  $E'$  — полные эллиптические интегралы второго рода с модулями  $k$  и  $k'$ . Графики, изображенные на фиг. 7 и 8, вычислены по формулам (5b), (6), (8a), (15), а график на фиг. 9 — по формулам (16), (17).

Поступила в редакцию  
10 XII 1939.

Отдел акустики  
строительства Дворца Советов.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Ноуэл J. Recueil de formules et de tables numériques. Paris. 1885. [Formules relatives aux fonctions elliptiques].
2. Седов Л. И. К теории неустановившихся движений крыла в жидкости. „Труды ЦАГИ“, Вып. 229. § 6.
3. Седов Л. И. Теория плоских движений в идеальной жидкости. Оборонгиз. 1939. Стр. 80.

### MASS ADJOINING A LATTICE CONSTRUCTED OF RECTANGLES

M. I. GOUREVITCH

(Summary)

The work presents the procedure for determining the mass adjoining of a lattice constructed of rectangles and immersed in the current of an ideal non-compressible fluid.

In § 1 the current at infinity having its velocity perpendicular to the axis of the lattice is investigated. For this purpose the domain of variation of complex potential and of complex velocity is represented on the upper half-plane by means of formulae (1) and (2). The ratios of the sides of the rectangles to the period of the lattice are given by formulae (4b) and (5b) or by formula (6).

The coefficient  $\lambda_x$  of the adjoining mass is given by formula (8a).

In § 2 the current at infinity having its velocity parallel to the axis of the lattice is considered. The domain of variation of complex potential and complex velocity is represented on the upper half-plane by means of formulae (10) and (11). The coefficient of the adjoining mass  $\lambda_y$  is given by formula (15).

By means of formulae (15) and (16) the author obtains the coefficients of the adjoining mass for an isolated rectangle.