АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА“

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 2, 1940

ВЫНУЖДЕННЫЕ КОЛЕБАНИЯ НЕОГРАНИЧЕННОЙ ПЛИТЫ, ЛЕЖАЩЕЙ НА УПРУГОМ ПОЛУПРОСТРАНСТВЕ

А. П. ФИЛИППОВ

(Харьков)

Вынужденные колебания упругого полупространства под действием периодической силы были хорошо изучены в известной работе Ламба [1].

В дальнейшем, применительно к сейсмическим волнам, этим вопросом занимался и ряд других авторов (см., например, книгу П. Пфейффера [2]).

Исходя из требований динамики грунтов, в последнее время Рейснером [3] с помощью результатов, полученных Ламбом, была рассмотрена задача о колебаниях неограниченного полупространства под действием возбудителя колебаний, состоящего из двух неуравновешенных масс и находящихся на жестком массиве.

В настоящей работе, исходя из практических соображений, рассматривается задача о вынужденных колебаниях бесконечного слоя толщиной s, ограниченного двумя параллельными плоскостями и находящегося под действием периодической силы, в предположении, что имеется ось симметрии.

Помимо колебаний плиты под действием периодической силы в работе рассмотрены колебания плиты в предположении, что с ней связана сосредоточенная масса.

1. Уравнения движения однородной и изотропной упругой среды имеют вид:

$$(\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial x}+\mu\Delta u=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial y}+\mu\Delta v=\rho\frac{\partial^2 v}{\partial t^2},\quad (\lambda+\mu)\frac{\partial\Theta}{\partial z}+\mu\Delta w=\rho\frac{\partial^2 w}{\partial t^2}, \quad (1)$$

где u, v, w — проекции перемещений на оси x, y, z,

$$\Theta=\frac{\partial u}{\partial x}+\frac{\partial v}{\partial y}+\frac{\partial w}{\partial z}$$

относительное объемное расширение, Δ — оператор Лапласа; λ и μ — постоянные Ламе, ρ — плотность упругой среды, t — время.

Вместо системы уравнений (1) берется обычно система однотипных дифференциальных уравнений, которые по Ламбу могут быть получены следующим образом. Для случая простого гармонического движения, которое в данном случае рассматривается, необходимо положить:

$$u=u'\,e^{ipt},\qquad v=v'\,e^{ipt},\qquad w=w'\,e^{ipt}.$$

Системе (1) можно удовлетворить, беря

$$u'=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial x}+u_1\right)e^{ipt},\qquad v'=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial y}+v_1\right)e^{ipt},\qquad w'=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+w_1\right)e^{ipt},\tag{2}$$

при условии, что Φ удовлетворяет уравнению:

$$(\Delta+h^2)\Phi=0,\tag{3}$$

а u_1, v_1, w_1 определяются из уравнений:

$$(\Delta+k^2)u_1=0,\qquad (\Delta+k^2)v_1=0,\qquad (\Delta+k^2)w_1=0,$$

$$\frac{\partial u_1}{\partial x}+\frac{\partial v_1}{\partial y}+\frac{\partial w_1}{\partial z}=0,$$

где

$$h^2=\frac{\rho p^2}{\lambda+2\mu},\qquad k^2=\frac{\rho p^2}{\mu}.$$

В предположении, что деформация имеет ось z осью симметрии, этим зависимостям можно удовлетворить, полагая

$$u_1=\frac{\partial^2\Psi}{\partial x\,\partial z},\qquad v_1=\frac{\partial^2\Psi}{\partial y\,\partial z},\qquad w_1=\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+k^2\Psi,\tag{4}$$

так как для перемещений, заданных таким образом, составляющая вихря перемещений на ось z

$$w_z=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}-\frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

равна нулю, т. е. условия осевой симметрии удовлетворяются.

При этом для функции Ψ получим уравнение:

$$(\Delta+k^2)\Psi=0.\tag{3'}$$

Таким образом задача сводится к нахождению из уравнений (3) и (3') значений функций Φ и Ψ.

В цилиндрических координатах для задач, имеющих ось симметрии,

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial}{\partial r}+\frac{\partial^2}{\partial z^2},\qquad \Theta=\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{\partial w}{\partial z},$$

где u — радиальное перемещение, w — по оси z.

Значения перемещений u и w в зависимости от Φ и Ψ будут:

$$u=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial r}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial r\,\partial z}\right)e^{ipt},\qquad w=\left(\frac{\partial\Phi}{\partial z}+\frac{\partial^2\Psi}{\partial z^2}+k^2\Psi\right)e^{ipt}.\tag{2'}$$

Для составляющих напряжений, нормальных σ_z и касательных τ, имеем выражения:

$$\begin{aligned}\sigma_z&=\lambda\Theta+2\mu\frac{\partial w}{\partial z}=\left[-\lambda h^2\Phi+2\mu\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial z^2}+\frac{\partial^3\Psi}{\partial z^3}+k^2\frac{\partial\Psi}{\partial z}\right)\right]e^{ipt},\\ \tau&=\mu\left(\frac{\partial u}{\partial z}+\frac{\partial w}{\partial r}\right)=\mu\left[2\left(\frac{\partial^2\Phi}{\partial r\,\partial z}+\frac{\partial^3\Psi}{\partial r\,\partial z^2}\right)+k^2\frac{\partial\Psi}{\partial r}\right]e^{ipt}.\end{aligned}\tag{5}$$

2. Предположим, что плита, лежащая на упругом полупространстве, ограничена плоскостями $z=0$ и $z=-s$, ось z направлена нормально к этим плоскостям плиты во внутрь упругой среды, начало координат расположено в плоскости $z=0$, по которой плита соприкасается с поверхностью полупространства.

К верхней плоскости плиты приложена в направлении оси z периодическая нормальная нагрузка:

$$p(r, t) = q(r)\, e^{ipt},$$

симметричная относительно оси z.

В рассматриваемом случае задача сводится к нахождению решений уравнений

$$(\Delta + h_1^2)\,\Phi_1 = 0, \qquad (\Delta + k_1^2)\,\Psi_1 = 0 \tag{6}$$

для полупространства и

$$(\Delta + h^2)\,\Phi = 0, \qquad (\Delta + k^2)\,\Psi = 0 \tag{6'}$$

для плиты при заданных граничных условиях и при наличии вышеуказанной сосредоточенной периодической нагрузки.

В уравнениях (6) и (6′) приняты обозначения:

$$h_1^2 = \frac{\rho_1 p^2}{\lambda_1 + 2\mu_1}, \qquad k_1^2 = \frac{\rho_1 p^2}{\mu_1}, \qquad h^2 = \frac{\rho p^2}{\lambda + 2\mu}, \qquad k^2 = \frac{\rho p^2}{\mu}, \tag{7}$$

где ρ_1 — плотность, λ_1, μ_1 — постоянные Ламе для полупространства, ρ, λ, μ — те же величины для плиты.

Перемещения и напряжения определяются формулами (2′) и (5). При удовлетворении граничных условий будем исходить из предположения, что трение между плитой и основанием отсутствует. Такое предположение обычно принимается и другими авторами при рассмотрении аналогичных задач[4].

В таком случае при решении рассматриваемой задачи необходимо удовлетворить следующим граничным условиям:

$\tau_1(r, 0) = 0,$	(a)	$\tau(r, 0) = 0,$	(a′)
$\sigma_{z1}(r, 0) = \sigma_z(r, 0),$	(b)	$w_1(r, 0) = w(r, 0),$	(c)
$\tau(r, -s) = 0,$	(d)	$\sigma(r, -s) = q(r)\, e^{ipt}.$	(e)

Решение уравнений (6) для полупространства берем в виде:

$$\Phi_1 = A_1 e^{-\alpha z} J_0\left(r\sqrt{\alpha^2 + h_1^2}\right), \qquad \Psi_1 = B_1 e^{-\beta z} J_0\left(r\sqrt{\beta^2 + k_1^2}\right), \tag{8}$$

где J_0 — функция Бесселя, α, β — произвольные постоянные.

Для неограниченного слоя решение системы (6′) будет:

$$\Phi = (A \operatorname{ch} \gamma z + B \operatorname{sh} \gamma z)\, J_0\left(r\sqrt{\gamma^2 + h^2}\right), \quad \Psi = (C \operatorname{ch} \delta z + D \operatorname{sh} \delta z)\, J_0\left(r\sqrt{\delta^2 + k^2}\right), \tag{9}$$

где γ, δ — произвольные постоянные.

Для возможности удовлетворения перечисленных выше граничных условий необходимо положить в выражениях (8) и (9):

$$\alpha^2 + h_1^2 = \beta^2 + k_1^2 = \xi^2, \qquad \gamma^2 + h^2 = \delta^2 + k^2 = \xi^2. \tag{10}$$

В таком случае согласно (2′) перемещения упругого основания можно записать в виде:

$$u_1 = e^{ipt}(-A_1 \xi e^{-\alpha z} + B_1 \beta e^{-\beta z})\, J_1(\xi r), \quad w_1 = e^{ipt}(-A_1 \alpha e^{-\alpha z} + B_1 \xi^2 e^{-\beta z})\, J_0(\xi r). \tag{11}$$

Для напряжений из зависимостей (5) получим:

$$\begin{aligned}\tau_1 &= \mu_1 e^{ipt}\left[2\alpha\xi e^{-\alpha z} A_1 - (2\xi^2 - k_1^2)\,\xi e^{-\beta z} B_1\right] J_1(\xi r),\\ \sigma_{z1} &= \mu_1 e^{ipt}\left[(2\xi^2 - k_1^2)\, e^{-\alpha z} A_1 - 2\xi^2 \beta e^{-\beta z} B_1\right] J_0(\xi, r).\end{aligned} \tag{12}$$

Для составляющих перемещений плиты u и w получим выражения:

$$\begin{aligned}u &= -\left[A\xi \operatorname{ch}\gamma z + B\xi \operatorname{sh}\gamma z + \delta\xi\,(C \operatorname{sh}\delta z + D \operatorname{ch}\delta z)\right] e^{ipt} J_1(\xi r),\\ w &= \left[\gamma\,(A \operatorname{sh}\gamma z + B \operatorname{ch}\gamma z) + \xi^2\,(C \operatorname{ch}\delta z + D \operatorname{sh}\delta z)\right] e^{ipt} J_0(\xi r).\end{aligned} \tag{13}$$

Напряжения в плите будут:

$$\begin{aligned}\sigma_z &= \mu\left[(2\xi^2 - k^2)\,(A \operatorname{ch}\gamma z + B \operatorname{sh}\gamma z) + 2\delta\xi^2\,(C \operatorname{sh}\delta z + D \operatorname{ch}\delta z)\right] e^{ipt} J_0(\xi r),\\ \tau &= \mu\left[-2\gamma\xi\,(A \operatorname{sh}\gamma z + B \operatorname{ch}\gamma z) + \xi\,(k^2 - 2\xi^2)\,(C \operatorname{ch}\delta z + D \operatorname{sh}\delta z)\right] e^{ipt} J_1(\xi r).\end{aligned} \tag{14}$$

Условия (a), (a′), (b), (c), (d) приводят к зависимостям для определения постоянных:

$$2\alpha\xi A_1 - \xi\,(2\xi^2 - k_1^2)\, B_1 = 0, \tag{a$_1$}$$

$$-2\gamma\xi B + \xi\,(k^2 - 2\xi^2)\, C = 0, \tag{a$_1'$}$$

$$(2\xi^2 - k^2)\, A + 2\delta\xi^2 D = \frac{\mu_1}{\mu}\left[(2\xi^2 - k_1^2)\, A_1 - 2\beta\xi^2 B_1\right], \tag{b$_1$}$$

$$-\alpha A_1 + \xi^2 B_1 = \gamma B + \xi^2 C, \tag{c$_1$}$$

$$2\xi\gamma\left[A \operatorname{sh}\gamma s - B \operatorname{ch}\gamma s\right] - \xi\,(2\xi^2 - k^2)\,(C \operatorname{ch}\delta s - D \operatorname{sh}\delta s) = 0. \tag{d$_1$}$$

Из уравнений (a_1), (a_1'), (b_1), (c_1) получим:

$$\begin{aligned}A_1 &= \frac{1}{2\alpha}(2\xi^2 - k_1^2)\, B_1, & B &= -\frac{1}{2\gamma}(2\xi^2 - k^2)\, C,\\ C &= \frac{\rho_1 \mu}{\rho \mu_1} B_1, & A &= \frac{\mu_1 F_1(\xi)}{2\alpha\mu\,(2\xi^2 - k^2)} B_1 - \frac{2\delta\xi^2}{2\xi^2 - k^2} D,\end{aligned} \tag{15}$$

где

$$F_1(\xi) = (2\xi^2 - k_1^2)^2 - 4\alpha\beta\xi^2. \tag{16}$$

Из условия (d_1) имеем:

$$D = \frac{B_1}{N(\xi)}\left[\frac{\mu_1}{\mu}\frac{\gamma}{\alpha} F_1(\xi) \operatorname{sh}\gamma\delta + \frac{\rho_1 \mu}{\rho\mu_1}(2\xi^2 - k^2)^2 (\operatorname{ch}\gamma s - \operatorname{ch}\delta s)\right], \tag{15$'$}$$

где

$$N(\xi) = 4\gamma\delta\xi^2 \operatorname{sh}\gamma s - (2\xi^2 - k^2)^2 \operatorname{sh}\delta s. \tag{17}$$

Выражая все произвольные постоянные A_1, A, B, C через B_1, после подстановки их значений и D из (15′) в выражение (14) для $\sigma_z(r, -s)$ и некоторых преобразований получим:

$$\begin{aligned}\sigma_z(r, -s) = \frac{k_1^2}{k^2}\frac{\mu B_1}{4\gamma N(\xi)}\Big\{ & f^2(\xi)\left[\operatorname{ch}(\gamma - \delta)\, s - 1\right] - F^2(\xi)\left[\operatorname{ch}(\gamma + \delta)\, s - 1\right] +\\ & + \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\rho\mu_1^2}{\rho_1\mu^2} F_1(\xi)\left[f(\xi) \operatorname{sh}(\gamma - \delta)\, s - F(\xi) \operatorname{sh}(\gamma + \delta)\, s\right]\Big\} e^{ipt} J_0(\xi r),\end{aligned} \tag{18}$$

где

$$F(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 - 4\gamma\delta\xi^2, \qquad f(\xi) = (2\xi^2 - k^2)^2 + 4\gamma\delta\xi^2, \tag{19}$$

а $F_1(\xi)$ определяется из выражения (16).

Для перемещений поверхности $z=0$ упругого основания имеем значения:

$$w_1(r, 0)=\frac{k_1^2}{2} e^{ipt} J_0(\xi r) B_1, \quad u_1(r, 0)=-\frac{\xi}{2\alpha} e^{ipt}(2\xi^2-k_1^2-2\alpha\beta) J_1(\xi r) B_1. \quad (20)$$

Нормальное напряжение σ_z будет:

$$\sigma_z(r, 0)=\frac{\mu_1}{2\alpha} e^{ipt} F_1(\xi) J_0(\xi r) B_1. \quad (21)$$

Для перемещений нижней поверхности плиты, соприкасающейся с упругим основанием, будем иметь:

$$w(r, 0)=w_1(r, 0),$$

$$u(r, 0)=-\frac{\mu_1}{\mu} \frac{\xi e^{ipt}}{2\alpha N(\xi)(2\xi^2-k^2)}\Big\{F_1(\xi)[N(\xi)-2k^2\gamma\delta \operatorname{sh}\gamma s]-$$

$$-2\frac{\rho_1}{\rho}\frac{\mu^2}{\mu_1^2} k^2 \alpha\delta(2\xi^2-k^2)^2(\operatorname{ch}\gamma s-\operatorname{ch}\delta s)\Big\} J_1(\xi r) B_1. \quad (20')$$

Для случая свободных колебаний необходимо удовлетворить условию отсутствия нормальных напряжений на плоскости $z=-s$:

$$\sigma_z(r, -s)=0,$$

так как условие обращения в нуль касательных напряжений соблюдено.

Это условие приводит согласно выражению (18) к уравнению частоты для свободных колебаний плиты, лежащей на упругом полупространстве:

$$-F^2(\xi)[\operatorname{ch}(\gamma+\delta)s-1]+f^2(\xi)[\operatorname{ch}(\gamma-\delta)s-1]-$$

$$-\frac{\rho\mu_1^2}{\rho_1\mu^2}\frac{\gamma}{\alpha} F_1(\xi)[F(\xi)\operatorname{sh}(\gamma+\delta)s-f(\xi)\operatorname{sh}(\gamma-\delta)s]=0. \quad (22)$$

В том случае, когда s стремится к нулю, уравнение частоты будет:

$$F_1(\xi)\equiv(2\xi^2-k_1^2)^2-4\alpha\beta\xi^2=0. \quad (23)$$

Это уравнение, как известно из теории волн Релея, имеет на вещественной оси только два действительных корня $\pm x$, другие вообще должны быть отброшены.

Значения x будут:

$$x=1.04678k_1 \;\text{ для }\; \lambda_1=\infty\left(\sigma=\frac{1}{2}\right), \quad x=\frac{1}{2}\sqrt{3+\sqrt{3}}\,k_1 \;\text{ для }\; \lambda_1=\mu_1\left(\sigma=\frac{1}{4}\right),$$

где σ — коэффициент Пуассона.

В дальнейшем будем предполагать, что для рассматриваемых значений ks, k_1/k уравнение частоты (22) будет также иметь только два действительных корня $\pm c$ на вещественной оси, из остальных корней должны быть приняты во внимание лишь те, которые имеют физическое значение, т. е. для которых действительная часть $-\alpha$ и $-\beta$ будут отрицательными[1].

Для получения перемещений в случае свободных колебаний необходимо в выражения (20) и (20′) вместо ξ подставить значение c корня уравнения

[1] Это предположение о наличии двух корней $\pm c$ справедливо лишь для некоторых значений упругих постоянных и ks и введено для простоты. Все дальнейшие выводы без затруднений могут быть обобщены и на случай, когда уравнение частоты будет иметь ряд корней $\pm c_i$.

частоты (22). Тогда для перемещений поверхности упругого слоя получим значения:

$$
\begin{aligned}
w_1(r, 0) &= w(r, 0) = \frac{k_1^2}{2} e^{ipt} J_0(cr) B_1, \\
u_1(r, 0) &= -\frac{c}{2\alpha_1} e^{ipt} (2c^2 - k_1^2 - 2\alpha_1\beta_1) J_1(cr) B_1,
\end{aligned}
\tag{24}
$$

где

$$\alpha_1 = \sqrt{c^2 - k_1^2}, \qquad \beta_1 = \sqrt{c^2 - h_1^2}.$$

Для определения напряжений и перемещений в случае вынужденных колебаний предполагаем, что B_1 будет функцией параметра ξ.

Умножая (18) на $d\xi$ и интегрируя от 0 до ∞, получим для напряжения $\sigma_z(r, -s)$ на поверхности плиты значение:

$$\sigma_z(r, -s) = -\mu \frac{k_1^2}{k^2} e^{ipt} \int_0^\infty \frac{B(\xi)}{4\gamma N(\xi)} \left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha} \psi(\xi) \right] J_0(\xi r)\, d\xi. \tag{25}$$

Здесь

$$
\begin{aligned}
\varphi(\xi) &= F^2(\xi)[\mathrm{ch}(\gamma+\delta)s - 1] - f^2(\xi)[\mathrm{ch}(\gamma-\delta)s - 1], \\
\psi(\xi) &= \frac{\rho\mu_1^2}{\rho_1\mu^2} \gamma [F(\xi)\,\mathrm{sh}(\gamma+\delta)s - f(\xi)\,\mathrm{sh}(\gamma-\delta)s].
\end{aligned}
\tag{26}
$$

Аналогичным образом из (21) и (20) значения напряжений и перемещений на поверхности $z=0$ упругого основания будут:

$$\sigma_{z1}(r, 0) = \sigma_z(r, 0) = \frac{\mu_1}{2} e^{ipt} \int_0^\infty \frac{B(\xi)}{\alpha} F_1(\xi) J_0(\xi r)\, d\xi, \tag{27}$$

$$
\begin{aligned}
u(r, 0) &= e^{ipt} \int_0^\infty \frac{\xi B(\xi)}{2\alpha} [k_1^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta] J_1(\xi r)\, d\xi, \\
w(r, 0) &= e^{ipt} \int_0^\infty \frac{k_1^2 B(\xi)}{2} J_0(\xi r)\, d\xi.
\end{aligned}
\tag{28}
$$

Для определения значения $B(\xi)$ необходимо воспользоваться теоремой Фурье-Бесселя.

Согласно этой теореме $\sigma_z(r, -s)$ может быть представлено в виде:

$$\sigma_z(z, -s) = \int_0^\infty J_0(\xi r)\, \xi d\xi \int_0^\infty \sigma_z(\rho, -s) J_0(\xi\rho)\, \rho\, d\rho. \tag{29}$$

Сравнивая выражения (25) и (29), получим для $B(\xi)$ значение:

$$B(\xi) = -\frac{1}{\mu} \frac{k^2}{k_1^2} \frac{4\gamma\xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} \int_0^\infty \sigma_z(\rho, -s) J_0(\xi\rho)\, \rho\, d\rho. \tag{30}$$

Предположим теперь, что нагрузка равномерно распределена по площади круга радиуса a. В таком случае

$$\sigma_z(r, -s) = \begin{cases} qe^{ipt} & \text{для } r < a, \\ 0 & \text{для } r > a, \end{cases}$$

где q — интенсивность равномерно распределенной нагрузки.

В таком случае

$$\int_0^\infty \sigma_z(\rho, -s) J_0(\xi\rho)\rho\, d\rho = \pi a^2 q \frac{J_1(a\xi)}{\pi a\xi} e^{ipt}.$$

Следовательно, для этой периодической нагрузки получим:

$$B_1(\xi) = -\frac{4aq}{\mu}\frac{k^2}{k_1^2}\frac{\gamma N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} J_1(a\xi). \tag{31}$$

Для сосредоточенной нагрузки:

$$\pi a^2 q \to Q, \quad \frac{J_1(a\xi)}{a\xi} \to \frac{1}{2}, \quad \text{когда } a \to 0.$$

Следовательно,

$$B_1(\xi) = -\frac{2Q}{\pi\mu}\frac{k^2}{k_1^2}\frac{\gamma\xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)}. \tag{31'}$$

Ограничимся в дальнейшем лишь случаем сосредоточенной нагрузки. В таком случае после подстановки $B(\xi)$ из (31′) в выражения (28) и (27) для перемещений и напряжений на поверхности упругого слоя получим значения:

$$\left.\begin{aligned} u(r, 0) &= -\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu}\frac{k^2}{k_1^2}\int_0^\infty \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\xi^2(k_1^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta)N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} J_1(\xi r)\, d\xi, \\ w(r, 0) &= -\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu}k^2\int_0^\infty \frac{\gamma\xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} J_0(\xi r)\, d\xi; \end{aligned}\right\} \tag{32}$$

$$\sigma_z(r, 0) = -\frac{\mu_1 Qe^{ipt}}{\pi\mu}\frac{k^2}{k_1^2}\int_0^\infty \frac{\gamma}{\alpha}\frac{\xi F_1(\xi)N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} J_0(\xi r)\, d\xi. \tag{33}$$

К этим значениям $u(r, 0)$, $w(r, 0)$, $\sigma_z(r, 0)$ могут быть добавлены соответствующие значения u, w, σ_z для свободных колебаний, без нарушения граничных условий. Так как знаменатель подинтегрального выражения, входящий в (32) и (33), для значений ξ, соответствующих корням его, обращается в нуль, то подинтегральное выражение для этих значений обращается в бесконечность.

Поэтому в дальнейшем для полученных в виде интегралов выражений (24) будем принимать для этих интегралов главные значения Коши[1].

[1] То есть если, например, для функции χ будет $|\chi(\xi)| \to \infty$ при $\xi \to c$ $(a < c < b)$, то

$$P\int_a^b \chi(\xi)\, d\xi = \lim_{\varepsilon \to 0}\left\{\int_a^{c-\varepsilon} \chi(\xi)\, d\xi + \int_{c+\varepsilon}^b \chi(\xi)\, d\xi\right\}.$$

3. Для дальнейшего изучения полученных выражений (32) представим их в несколько другом виде.

Для этого, аналогично тому, как это сделано Ламбом для случая колебаний полупространства, проведем интегрирование в комплексной плоскости $\zeta = \xi + i\eta$.

Воспользуемся известными выражениями функций Бесселя в виде интегралов.

Для функций Ганкеля $H_p^{(1)}$, $H_p^{(2)}$ имеем:

$$H_p^{(1)} = \frac{2}{\pi i} e^{-\frac{1}{2}\pi p i} \int_0^\infty e^{i\zeta \operatorname{ch} u} \operatorname{ch} pu\, du \qquad \text{для } \eta > 0,$$
$$H_p^{(2)} = -\frac{2}{\pi i} e^{\frac{1}{2}\pi p i} \int_0^\infty e^{-i\zeta \operatorname{ch} u} \operatorname{ch} pu\, du \qquad \text{для } \eta < 0. \tag{34}$$

Функции Бесселя и Неймана связаны с H_p соотношениями:

$$J_p(\zeta) = \frac{1}{2}\left[H_p^{(1)}(\zeta) + H_p^{(2)}(\zeta)\right], \qquad N_p(\zeta) = \frac{1}{2i}\left[H_p^{(1)}(\zeta) - H_p^{(2)}(\zeta)\right].$$

В виде интегралов функции J_0, J_1, N_0, N_1 для $\xi > 0$ можно представить таким образом:

$$J_0(\xi) = -\frac{i}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{i\xi \operatorname{ch} u} - e^{-i\xi \operatorname{ch} u}\right) du, \qquad N_0(\xi) = -\frac{2}{\pi}\int_0^\infty \cos(\xi \operatorname{ch} u)\, du,$$
$$J_1(\xi) = -\frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left(e^{i\xi \operatorname{ch} u} + e^{-i\xi \operatorname{ch} u}\right) \operatorname{ch} u\, du, \qquad N_1(\xi) = -N_0'(\xi).$$

После подстановки значений $J_0(\xi r)$, $J_1(\xi r)$ в выражения (32) запишем их в виде:

$$u(r, 0) = -\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu}\frac{k^2}{k_1^2}\int_0^\infty \operatorname{ch} u\, du \int_{-\infty}^\infty \chi(\xi)\, d\xi, \quad w(r, 0) = -\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu} k^2 \int_0^\infty du \int_{-\infty}^\infty \omega(\xi)\, d\xi, \tag{35}$$

где

$$\chi(\xi) = -\frac{1}{\pi}\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\xi^2(k_1^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta)N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u},$$
$$\omega(\xi) = -\frac{i}{\pi}\frac{\gamma\xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}.$$

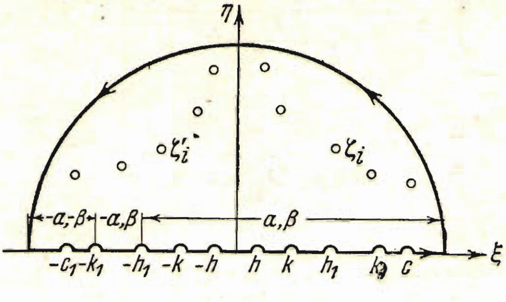
При изучении этих интегралов в комплексной области следует иметь в виду, что α, β, γ, δ на вещественной оси имеют точки разветвления

$$\pm k_1, 0; \quad \pm h_1, 0; \quad \pm k, 0; \quad \pm h, 0.$$

Не вдаваясь в анализ функции $\varphi(\zeta) + \frac{F_1(\zeta)}{\alpha}\psi(\zeta)$, будем предполагать, что функция $\varphi(\zeta) - \frac{F_1(\zeta)}{\alpha}\psi(\zeta)$ имеет лишь один корень $-c_1$ на отрицательной части вещественной оси, а $\varphi(\zeta) + \frac{F_1(\zeta)}{\alpha}\psi(\zeta)$ имеет также один корень c на положительной части той же оси[1].

[1] См. сноску на стр. 79.

Интегрирование ведем по контуру, указанному на фиг. 1. При обходе точек $\pm k, 0$; $\pm h, 0$ функции $\chi(\zeta)$ и $\omega(\zeta)$, как легко проверить, не меняют своих значений.



Фиг. 1.

Вычисляя интеграл от функции $\chi(\zeta)$ по указанному контуру, получим:

$$\int\limits_{-\infty}^{-k_1} \chi(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{\pi} P \int\limits_{-\infty}^{-k_1} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\xi^2(k_1^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta) N(\xi)}{\varphi(\xi) - \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}\,d\xi -$$

$$- i \frac{\gamma_1'}{\alpha_1'} \frac{c_1^2(k_1^2 - 2c_1^2 + 2\alpha_1'\beta_1') N(c_1)}{\left[\varphi(\xi) - \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=-c_1}} e^{-ic_1 r \operatorname{ch} u},$$

$$\int\limits_{-k_1}^{-h_1} \chi(\zeta)\,d\zeta = \frac{1}{\pi} \int\limits_{-k_1}^{-h_1} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\xi^2(k_1^2 - 2\xi^2 - 2\alpha\beta) N(\xi)}{\varphi(\xi) - \frac{f_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}\,d\xi,$$

$$\int\limits_{-h_1}^{\infty} \chi(\zeta)\,d\zeta = -\frac{1}{\pi} P \int\limits_{-h_1}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\xi^2(k_1^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta) N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}\,d\xi +$$

$$+ i \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \frac{c^2(k_1^2 - 2c^2 + 2\alpha_1\beta_1) N(c)}{\left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=c}} e^{icr \operatorname{ch} u},$$

где вторые члены правой части первого и третьего интегралов представляют собой вычеты функций $\varkappa(\zeta)$ в полюсах $(-c_1, 0)$, $(c, 0)$, умноженных на $-\pi i$

При этом

$$\alpha_1' = \sqrt{c_1^2 - h_1^2}, \qquad \beta_1' = \sqrt{c_1^2 - k_1^2}, \qquad \gamma_1' = \sqrt{c_1^2 - h^2}; \tag{36}$$

$$\alpha_1 = \sqrt{c^2 - h_1^2}, \qquad \beta_1 = \sqrt{c^2 - k_1^2}, \qquad \gamma_1 = \sqrt{c^2 - h^2}. \tag{37}$$

Беря интеграл от функции $\varkappa(\zeta)$ по указанному на фиг. 1 замкнутому контору и принимая во внимание, что этот интеграл согласно основной теореме теории функций комплексного переменного равен сумме вычетов подинтегральной функции, лежащих внутри контура, умноженных на $2\pi i$, получим[1]:

$$\frac{1}{\pi} P \int\limits_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\xi^2 (k_1{}^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta) N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u} d\xi =$$

$$= \frac{1}{\pi} P \int\limits_{k_1}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{2\xi^2 (k_1{}^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta)\varphi(\xi) N(\xi)}{\varphi^2(\xi) - \frac{F_1{}^2(\xi)}{\alpha^2}\psi^2(\xi)} e^{-i\xi r \operatorname{ch} u} d\xi +$$

$$+ \frac{1}{\pi} \int\limits_{h_1}^{k_1} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{2\xi^2 (k_1{}^2 - 2\xi^2) [\varphi(\xi) - 2\beta\psi(\xi) k_1{}^2] N(\xi)}{\left[\varphi(\xi) - \frac{f_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]\left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]} e^{-i\xi r \operatorname{ch} u} d\xi -$$

$$- ic_1{}^2 H' e^{-ic_1 r \operatorname{ch} u} + ic^2 H e^{icr \operatorname{ch} u} - 2\pi i \sum R_i', \tag{38}$$

где

$$H' = \frac{\gamma_1'}{\alpha_1'} \frac{(k_1{}^2 - 2c_1{}^2 + 2\alpha_1'\beta_1') N(c_1)}{\left[\varphi(\xi) - \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=-c_1}}, \qquad H = \frac{\gamma_1}{\alpha_1} \frac{(k_1{}^2 - 2c^2 + 2\alpha_1\beta_1) N(c)}{\left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=c}}, \tag{39}$$

а $\sum R_i'$ — сумма вычетов для комплексных корней знаменателя:

$$\zeta = r_i + is_i, \qquad \zeta' = -r_i' + is_i',$$

лежащих в верхней полуплоскости выше вещественной оси.

Умножая обе части выражения (38) на $\operatorname{ch} u\, du$ и интегрируя в пределах от 0 до ∞, получим после перехода к функциям Ганкеля (34) значение для $u(r, 0)$ в виде:

$$u(r, 0) = -\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu} \frac{k^2}{k_1{}^2} \left\{ P \int\limits_{k_1}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\xi^2 (k_1{}^2 - 2\xi^2 + 2\alpha\beta)\varphi(\xi) N(\xi)}{\varphi^2(\xi) - \frac{F_1{}^2(\xi)}{\alpha^2}\psi^2(\xi)} H_1^{(2)}(\xi r)\, d\xi + \right.$$

$$+ \int\limits_{h_1}^{k_1} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\xi^2 [\varphi(\xi) - 2\beta k_1{}^2 \psi(\xi)] (k_1{}^2 - 2\xi^2) N(\xi)}{\left[\varphi(\xi) - \frac{f_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]\left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]} H_1^{(2)}(\xi r)\, d\xi -$$

$$\left. - \frac{i\pi}{2} c_1{}^2 H' H_1^{(2)}(c_1 r) + i\pi c^2 H \left[iN_1(cr) + \frac{1}{2} H_1^{(2)}(cr)\right] + \sum_i \nu_i'(\zeta_i r) \right\}, \tag{40}$$

где

$$\nu_i'(\zeta_i r) = 2\pi i \int\limits_0^{\infty} R_i' \operatorname{ch} u\, du.$$

[1] Интеграл вдоль полуокружности стремится к нулю при $R \to \infty$.

Аналогичным образом вычисляется $w(r, 0)$:

$$\int_{-\infty}^{-k_1} \omega(\zeta)\,d\zeta = -\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{-k_1} \frac{\gamma \xi N(\xi)}{\varphi(\xi) - \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}\,d\xi + \frac{c_1 \gamma_1' N(c_1) e^{-ic_1 r \operatorname{ch} u}}{\left[\varphi(\xi) - \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]_{\xi=-c_1}},$$

$$\int_{-k_1}^{-h_1} \omega(\zeta)\,d\zeta = -\frac{i}{\pi} \int_{-k_1}^{-h_1} \frac{\gamma \xi N(\xi)}{\varphi(\xi) - \frac{f_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}\,d\xi,$$

$$\int_{-h_1}^{\infty} \omega(\zeta)\,d\zeta = -\frac{i}{\pi} P \int_{-h_1}^{\infty} \frac{\gamma \xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}\,d\xi - \frac{c\gamma_1 N(c) e^{icr \operatorname{ch} u}}{\left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\zeta)\right]'_{\xi=c}}.$$

Беря интеграл по указанному контуру, получим:

$$-\frac{i}{\pi} P \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\gamma \xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} e^{i\xi r \operatorname{ch} u}\,d\xi =$$

$$= -\frac{i}{\pi} \int_{h_1}^{k_1} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{2\psi(\xi)(2\xi^2 - k_1^2)^2 \xi N(\xi) e^{-i\xi r \operatorname{ch} u}}{\left[\varphi(\xi) - \frac{f_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]\left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]}\,d\xi -$$

$$-\frac{i}{\pi} P \int_{k_1}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{2\xi\psi(\xi) N(\xi) F_1(\xi)}{\varphi^2(\xi) - \frac{F_1^2(\xi)}{\alpha^2}\psi^2(\xi)} e^{-i\xi r \operatorname{ch} u}\,d\xi - c_1 K' e^{-ic_1 r \operatorname{ch} u} + cKe^{icr \operatorname{ch} u} + \sum_i R_i, \tag{41}$$

где

$$K' = \frac{\gamma_1' N(c_1)}{\left[\varphi(\xi) - \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=-c}}, \qquad K = \frac{\gamma_1 N(c)}{\left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=c}}, \tag{42}$$

а $\sum R_i$ — сумма вычетов для комплексных корней. Умножая (41) на du и интегрируя в пределах от 0 до ∞, получим:

$$w(r, 0) = \frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu} k^2 \left\{ \int_{h_1}^{k_1} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\xi(2\xi^2 - k_1^2)^2 \psi(\xi) N(\xi) H_0^{(2)}(\xi r)}{\left[\varphi(\xi) - \frac{f_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]\left[\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]}\,d\xi + \right.$$

$$+ P \int_{k_1}^{\infty} \frac{\gamma}{\alpha} \frac{\xi\psi(\xi) N(\xi) F_1(\xi)}{\varphi^2(\xi) - \frac{F_1^2(\xi)}{\alpha^2}\psi^2(\xi)} H_0^{(2)}(\xi r)\,d\xi - \frac{i\pi}{2} c_1 K' H_0^{(2)}(c_1 r) + \tag{43}$$

$$\left. + \frac{i\pi}{2} KcH_0^{(2)}(cr) - i\pi cKJ_0(cr) - \sum \nu_i(\zeta_i r) \right\},$$

где

$$\nu_i(\zeta_i\ r)=\int_0^\infty R_i\,du.$$

В выражениях (40) и (43) члены с функциями Бесселя $J_0(cr)$, $N_0(cr)$ дают стоячие волны, члены, содержащие $e^{ipt}H_q^{(2)}(\xi r)$, где $H_q^{(2)}$ определяется из (34), соответствуют распространяющимся волнам.

Поэтому, чтобы получить распространяющиеся волны, берем дополнительно систему перемещения для свободных колебаний, которая получится из (24), если принять:

$$B_1=i\frac{2Q}{k_1^2\mu}\frac{\gamma_1 ck^2N(c)}{\left[\varphi(\xi)+\frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=c}},$$

т. е. перемещения

$$\begin{aligned}u(r,0)&=i\frac{k^2Q}{k_1^2\mu}\frac{\gamma_1c^2(k^2-2c^2+2\alpha_1\beta_1)N(c)}{\alpha\left[\varphi(\xi)+\frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=c}}J_1(cr)e^{ipt},\\ w(r,0)&=i\frac{Q}{\mu}\frac{\gamma_1ck^2N(c)}{\left[\varphi(\xi)+\frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]'_{\xi=c}}J_0(cr)e^{ipt}.\end{aligned}\tag{44}$$

Добавляя к перемещениям (40) и (43) перемещения (44), получим окончательно значения перемещений $u'(r,0)$, $w'(r,0)$ для случая вынужденных колебаний в следующем виде:

$$\begin{aligned}u'(r;0)=-\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu}\frac{k^2}{k_1^2}\Bigg\{&P\int_{k_1}^{\infty}\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\xi^2(k_1^2-2\xi^2+2\alpha\beta)\varphi(\xi)N(\xi)}{\varphi^2(\xi)-\frac{F_1^2(\xi)}{\alpha^2}\psi^2(\xi)}H_1^{(2)}(\xi r)\,d\xi+\\ &+\int_{h_1}^{k_1}\frac{\gamma}{\alpha}\frac{2\xi^2[\varphi(\xi)-2\beta k_1^2\psi(\xi)](k_1^2-2\xi^2)N(\xi)}{\left[\varphi(\xi)-\frac{f_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]\left[\varphi(\xi)+\frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]}H_1^{(2)}(\xi r)\,d\xi-\\ &-\frac{i\pi}{2}c_1^2H'H_1^{(2)}(c_1r)-\frac{i\pi}{2}c^2HH_1^{(2)}(cr)+\sum_i\nu_i'(\zeta_ir)\Bigg\},\end{aligned}\tag{45}$$

$$\begin{aligned}w'(r,0)=\frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu}k^2\Bigg\{&\int_{h_1}^{k_1}\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\xi(2\xi^2-k_1^2)^2\psi(\xi)N(\xi)H_0^{(2)}(\xi r)}{\left[\varphi(\xi)-\frac{f_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]\left[\varphi(\xi)+\frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)\right]}d\xi+\\ &+P\int_{k_1}^{\infty}\frac{\gamma}{\alpha}\frac{\xi F_1(\xi)\psi(\xi)N(\xi)}{\varphi^2(\xi)-\frac{F_1^2(\xi)}{\alpha^2}\psi^2(\xi)}H_0^{(2)}(\xi r)\,d\xi+\\ &+\frac{i\pi}{2}[cH_0^{(2)}(cr)K-c_1H_0^{(2)}(c_1r)K']-\sum_i\nu_i(\zeta_ir)\Bigg\}.\end{aligned}\tag{46}$$

При вычислении значений $u'(r, 0)$, $w'(r, 0)$ удобнее исходить из выражений (32), однако с учетом наложенных перемещений (44) для свободных колебаний.

В таком случае, например, для перемещения $w'(r, 0)$ получим значение:

$$w'(r, 0) = i\frac{Qe^{ipt}}{\mu} ck^2 KJ_0(cr) - \frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu} k^2 P\int_0^\infty \frac{\gamma\xi N(\xi)}{\varphi(\xi) + \frac{F_1(\xi)}{\alpha}\psi(\xi)} J_0(\xi r)\, d\xi. \tag{46'}$$

Вместо переменной ξ вводим безразмерную координату:

$$\sigma = \xi / k_1.$$

Обозначая

$$l^2 = k^2/k_1^2, \quad n^2 = h^2/k_1^2, \quad n_1^2 = h_1^2/k_1^2, \quad k_1 s = s_0, \quad k_1 r = \rho_0$$

и заменяя переменную ξ переменной σ, получим, например, для $w'(r, 0)$ значение:

$$w'(r, 0) = i\frac{Qe^{ipt}}{\mu}\frac{c'k_1\gamma' l^2 N'(c') J_0(cr)}{\left[\varphi'(\sigma) + \frac{F_1'(\sigma)}{\alpha'}\psi'(\sigma)\right]'_{\sigma=c'}} - \frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu} k_1 l^2 P\int_0^\infty \frac{\gamma'\sigma N'(\sigma) J_0(\sigma\rho_0)}{\varphi'(\sigma) + \frac{F_1'(\sigma)}{\alpha'}\psi'(\sigma)} d\sigma, \tag{47}$$

где

$$N'(\sigma) = 4\gamma'\delta'\sigma^2 \operatorname{sh}\gamma' s_0 - (2\sigma^2 - l^2)^2 \operatorname{sh}\delta' s_0,$$

$$\varphi'(\sigma) + \frac{F_1'(\sigma)}{\alpha'}\psi'(\sigma) = (F'(\sigma))^2[\operatorname{ch}(\gamma' + \delta')s_0 - 1] - (f'(\sigma))^2[\operatorname{ch}(\gamma' - \delta')s_0 - 1] +$$
$$+ \frac{\rho\mu_1^2}{\rho_1\mu^2}\frac{\gamma'}{\alpha'}F_1'(\sigma)[F'(\sigma)\operatorname{sh}(\gamma' + \delta')s_0 - f'(\sigma)\operatorname{sh}(\gamma' - \delta')s_0], \tag{48}$$

причем

$$\alpha' = \sqrt{\sigma^2 - n_1^2}, \quad \beta' = \sqrt{\sigma^2 - 1}, \quad \gamma' = \sqrt{\sigma^2 - n^2}, \quad \delta' = \sqrt{\sigma^2 - l^2}; \tag{49}$$

$$F'(\sigma) = (2\sigma^2 - l^2)^2 - 4\gamma'\delta'\sigma^2, \qquad F_1'(\sigma) = (2\sigma^2 - 1)^2 - 4\alpha'\beta'\sigma^2,$$
$$f'(\sigma) = (2\sigma^2 - l^2)^2 + 4\gamma'\delta'\sigma^2, \tag{50}$$

а $c' = c/k_1$ — корень знаменателя подинтегрального выражения.

В частности, значение прогиба в точке (0, 0) будет:

$$w'(0, 0) = i\frac{Qe^{ipt}}{\mu}\frac{c'k_1\gamma' l^2 N'(c')}{\left[\varphi'(\sigma) + \frac{F_1'(\sigma)}{\alpha'}\psi'(\sigma)\right]'_{\sigma=c_1}} -$$
$$- \frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu} k_1 l^2 P\int_0^\infty \frac{\gamma'\sigma N'(\sigma)}{\varphi'(\sigma) + \frac{F_1'(\sigma)}{\alpha'}\psi'(\sigma)} d\sigma. \tag{47'}$$

Вычисление значений $w'(0, 0)$ в дальнейшем будет проведено приближенным путем.

При этом для малых значений $s_0\sigma\,(s_0=k_1 s)$ удобно подинтегральное выражение (47′) представить в виде разложения по степеням s_0:

$$-\frac{2\gamma' l^4 s_0 N'(\sigma)}{\varphi'(\sigma)+\dfrac{F_1'(\sigma)}{\alpha'}\psi'(\sigma)}=$$

$$=\frac{R_0(\sigma)+s_0^2 R_2(\sigma)+s_0^4 R_4(\sigma)+\ldots}{R_0(\sigma)+s_0^2 S_2(\sigma)+s_0^4 S_4(\sigma)+\ldots+\dfrac{F_1'(\sigma)}{\alpha'}\dfrac{\rho_1}{s_0\rho}\left[R_0(\sigma)+s_0^2 T_2(\sigma)+\ldots\right]}, \tag{51}$$

где

$$R_0(\sigma)=4(l^2-n^2)\sigma^2-l^4,\qquad R_2(\sigma)=\frac{1}{6}\left[8(l^2-n^2)\sigma^4-(5l^4-4n^4)\sigma^2+7l^6\right],$$

$$R_4(\sigma)=\frac{1}{120}\left[12(l^2-n^2)\sigma^6-(13l^4-12n^4)\sigma^4+(6l^6-4n^6]\sigma^2-l^8\right],$$

$$S_2(\sigma)=-\frac{1}{6l^4}\left[8(l^2-n^2)^2\sigma^6-8l^2(2l^4-3n^2l^2+n^4)\sigma^4+\right.$$

$$\left.+2l^4(4l^4-2l^2n^2+n^4)\sigma^2-l^6(l^2+n^2)\right.,$$

$$S_4(\sigma)=-\frac{1}{360l^4}\left[64(l^2-n^2)^2\sigma^8-32(5l^6-7l^4n^2+l^2n^4+n^6)\sigma^6+\right.$$

$$+16(8l^8-4l^6n^2-5l^4n^4+2l^2n^6)\sigma^2-4(9l^{10}+9l^8n^2-9l^6n^4-l^4n^6)\sigma^2+$$

$$\left.+l^8(10l^2n^2+3l^4+3n^4)\right],$$

$$T_2(\sigma)=\frac{1}{6}\left[8(l^2-n^2)\sigma^4-4(2l^4-n^4)\sigma^2+(l^6+3l^4n^2)\right],$$

$$T_4(\sigma)=\frac{1}{120}\left[32(l^2-n^2)\sigma^6-16(3l^4-2n^4)\sigma^4+4(4l^6+10l^4n^2-\right.$$

$$\left.-5l^2n^4-n^6)\sigma^2-l^4(l^4+5n^4+10n^2l^2)\right].$$

Для малых значений отношений n^2/σ^2, l^2/σ^2 можно подинтегральное выражение для $w'(0,0)$ (47′) представить следующим образом:

$$\frac{\gamma'\sigma N'(\sigma)}{\varphi'(\sigma)+\dfrac{F_1'(\sigma)}{\alpha'}\psi'(\sigma)}=$$

$$=\frac{-\gamma'\sigma\,\mathrm{sch}\,\gamma' s_0\left[F'(\sigma)-\varepsilon(2\sigma^2-l^2)^2\,\mathrm{cth}\,\gamma' s_0\right]}{2(F'(\sigma))^2\left[\mathrm{th}\,\gamma' s_0-\varepsilon\right]-\varepsilon^2\dfrac{(f'(\sigma))^2}{\mathrm{sh}\,2\gamma' s_0}+2\dfrac{\rho}{\rho_1}\dfrac{\gamma'}{\alpha'}l^4F_1'(\sigma)\psi_1(\sigma)}, \tag{52}$$

где

$$F'(\sigma)=-2\sigma^2(l^2-n^2)+l^4+\frac{1}{2}(l^2-n^2)^2,$$

$$f'(\sigma)=8\sigma^4-2\sigma^2(3l^2+n^2)+l^4-\frac{1}{2}(l^2-n^2)^2,$$

$$\psi_1(\sigma)=2(1-\varepsilon\,\mathrm{cth}\,2\gamma' s_0)F'(\sigma)-\frac{2\varepsilon f'(\sigma)}{\mathrm{sh}\,2\gamma' s_0},\qquad \varepsilon=(l^2-n^2)\frac{s_0}{2\sigma}.$$

4. Для примера возьмем плиту толщиной s, лежащую на упругом подстилающем слое, со следующими данными:

$$\rho/\rho_1=1.5,\qquad \lambda_1=\mu_1,\qquad \lambda=\mu,\qquad \mu=100\,\mu_1. \tag{53}$$

В таком случае

$$n^2\equiv\frac{h^2}{k_1^2}=\frac{\rho}{\rho_1}\frac{\mu_1}{\lambda+2\mu}=0.5\times10^{-2},\qquad l^2=\frac{k^2}{k_1^2}=\frac{\rho}{\rho_1}\frac{\mu_1}{\mu}=1.5\times10^{-2}.$$

Вычисления проводим для значений

$$s_0 = k_1 s = 0.02, \quad 0.03, \quad 0.05, \quad 0.15, \quad 0.30.$$

Прогиб $w'(0, 0)$ определяем по формуле (47'), причем для $s_0 \sigma < 0.40$ пользуемся выражением (51), а для $s_0 \sigma > 0.40$ выражением (52).

Вычисления интегралов проведены приближенным путем с помощью формулы Симпсона.

Значение корня $c' = c/k_1$ уравнения частоты свободных колебаний (22), полученные для принятых значений s_0, приведены в табл. 1.

Прогиб в точке (0, 0) плиты (и основания) для силы $-Qe^{ipt}$ будет:

$$w'(0, 0) = \frac{Qe^{ipt}}{\pi\mu s}(f_1 + if_2), \tag{54}$$

где согласно (47') f_1 — действительная часть, а f_2 — коэффициент при мнимой части прогиба, умноженные на $-\frac{\pi\mu s}{Q}e^{-ipt}$.

Полученные значения для f_1 и f_2 приведены в той же табл. 1, где f_0 — максимальная амплитуда вынужденных колебаний:

$$f_0 = \frac{Q}{\pi\mu s}\sqrt{f_1^2 + f_2^2}. \tag{55}$$

Таблица 1

s_0	0.02	0.03	0.05	0.10	0.15	0.30
c'	1.113	1.114	1.116	1.128	1.129	1.034
f_1	18.1	18.0	17.9	17.0	16.2	13.6
f_2	− 1.04	− 1.57	− 2.60	− 5.91	− 7.93	− 8.86
$\frac{\pi\mu s}{Q}f_0$	18.1	18.0	18.0	18.0	18.0	16.2

5. Предположим теперь, что в точке $(0, -s)$ находится сосредоточенная масса m и в этой же точке попрежнему действует периодическая сила[1] $-Qe^{ipt}$.

В таком случае нагрузка, действующая на плиту, при вынужденных колебаниях ее будет:

$$Q' = -Qe^{ipt} + m\frac{\partial^2 w'(0, -s)}{\partial t^2}, \tag{56}$$

где w' — прогиб в точке $(0, -s)$ плиты, который может быть представлен в виде:

$$w'(0, -s) = \frac{1}{\pi\mu s}w_0 e^{ipt}. \tag{57}$$

Следовательно, аналогично (54) прогиб $w'(0, -s)$ от нагрузки Q' (56) будет:

$$\frac{1}{\pi\mu s}w_0 e^{ipt} = \frac{1}{\pi\mu s}e^{ipt}\left(Q + mp^2\frac{w_0}{\pi\mu s}\right)(f_1' + if_2'),$$

[1] Нагрузку следует считать распределенной по площади круга малого радиуса, чтобы получить конечное смещение в точке $(0, -s)$.

где

$$f_1' + if_2' = \frac{\pi\mu s}{Q} e^{-ipt} w'(0, -s).$$

Подставляя значение

$$p^2 = \frac{\mu_1 k_1^2}{\rho_1} = \frac{\mu_1 s_0^2}{\rho_1 s^2},$$

получим:

$$w'(0, -s) = \frac{1}{\pi\mu s} \frac{(f_1' + if_2') Qe^{ipt}}{1 - bs_0^2 (f_1' + if_2')}, \tag{58}$$

где

$$b = \frac{\mu_1 m}{\mu\rho_1 \pi s^3}.$$

Отделяя действительную часть для $w'(0, -s)$, получим значение для прогиба в точке $(0, -s)$, с которой связана масса m, при наличии периодической силы в той же точке $(0, -s)$:

$$\operatorname{Re} w'(0, -s) = \frac{Q}{\pi\mu s} \left\{ \left[1 - \frac{1 - bs_0^2 f_1'}{D} \right] \cos pt + \frac{bs_0^2 f_2'}{D} \sin pt \right\} \frac{1}{bs_0^2}, \tag{58'}$$

где

$$D = (1 - bs_0^2 f_1')^2 + (bs_0^2 f_2')^2;$$

или

$$\operatorname{Re} w'(0, -s) = A \cos (pt + \delta_0). \tag{59}$$

Величины амплитуды A и $\operatorname{tg} \delta_0$ будут[1]:

$$A = \frac{Q}{\pi\mu s} \sqrt{\frac{f_1'^2 + f_2'^2}{(1 - bs_0^2 f_1')^2 + (bs_0^2 f_2')^2}}, \qquad \operatorname{tg} \delta_0 = \frac{f_2'}{f_1'(1 - bs_0^2 f_1') - bs_0^2 f_2'^2}. \tag{60}$$

Максимальная величина амплитуды получается из условия минимума знаменателя выражения (60), т. е. из условия

$$\frac{\partial}{\partial s_0} [(1 - bs_0^2 f_1'(s_0))^2 + (bs_0^2 f_2'(s_0))^2] = 0.$$

В табл. 2 приведены значения максимального прогиба и соответствующие значения s_0', вычисленные с помощью значений табл. 1 [для рассматриваемого примера принято $f_1' \approx f_1$, $f_2' \approx f_2$; f_0 в табл. 2 попрежнему определяется формулой (55)].

Таблица 2

b	2.5	5	7.5	10
A	$2.42\,f_0$	$3.00\,f_0$	$3.77\,f_0$	$4.39\,f_0$
s_0'	0.134	0.099	0.082	0.072

[1] Аналогичная по виду формула для амплитуды A получена Рейснером [3] и для амплитуды колебаний массива на упругом полупространстве.

Значение критической частоты будет:

$$p_{\text{кр}}=\frac{s_0'}{s}\sqrt{\frac{\mu_1}{\rho_1}}.$$

6. Интересно сравнить величины прогибов, полученных выше для вынужденных колебаний, с прогибами для такого же слоя, но находящейся под действием статической нагрузки.

Для этого случая имеется решение Маргерра [4].

В случае, когда в точке $(0, -s)$ приложена сила $-Q$, для значения прогиба при тех же граничных условиях (a), (b), (c), (d) § 2, сохраняя прежние обозначения, получим:

$$w(r, 0)=\frac{Q}{4\pi\mu s}\frac{(\lambda+2\mu)f}{\lambda+\mu}\int_0^\infty \frac{(\sin z+z\operatorname{ch} z)J_0(z\rho)}{z+\frac{1}{2}\operatorname{sh}2z+f(\operatorname{sh}^2 z-z^2)}dz, \tag{61}$$

где

$$f=\mu/\mu_1, \qquad \rho=r/s.$$

Вычисляя $w(0, 0)$ по формуле (61), получим:

$$w_{\text{ст}}(0, 0)=\frac{18.1Q}{\pi\mu s}. \tag{62}$$

Сравнивая это значение $w_{\text{ст}}(0, 0)$ со значением f_0 максимальной амплитуды (55), согласно табл. 1 увидим, что для случая, когда $s_0=sk$ мало, амплитуды f_0 для вынужденных колебаний почти не отличаются от $w_{\text{ст}}(0, 0)$.

При наличии сосредоточенной массы в точке $(0, -s)$ амплитуда превышает статический прогиб и с возрастанием $b=\frac{m}{f\rho_1\pi s^3}$, как видно из табл. 2, увеличивается.

ЛИТЕРАТУРА

1. Lamb H. On the Propagation of Tremors over the Surface of an Elastic Solid. „Philos. Trans. Roy. Soc.“ London. 1904. Series A. Vol. 203.

2. Пфейффер П. Колебания упругих тел. Перевод под редакцией А. И. Лурье. 1934.

3. Reissner E. Stationäre, axialsimmetrische, durch eine Schüttelnde Masse erregte Schwingungen eines homogenen elastischen Halbraumes. „Ingenieur Archiv“. Berlin. 1936. Heft 6.

4. Marguerre K. Spannungsverteilung und Wellenausbreitung in der dicken Platten. „Ingenieur Archiv“. 1933. № 4. (Реферат по статической задаче помещен в сб. „Прикладная математика и механика“. 1935. Т. 2. Вып. 2).

ERZWUNGENE SCHWINGUNGEN EINER UNBEGRENZTEN, AUF ELASTISCHEM HALBRAUME LIEGENDEN PLATTE

A. P. PHILIPPOW

(Zusammenfassung)

In dieser Arbeit werden wir axialsymmetrische erzwungene Schwingungen einer unbegrenzten Platte, die auf elastischem homogenen Halbraume liegt, betrachten. Die Platte ist von parallelen Ebenen $z=0$ und $z=-s$ begrenzt

und befindet sich unter der Wirkung einer periodischen Kraft Qe^{ipt}, die die im Punkte $(0, -s)$ wirkt. Im allgemeinen Falle ist mit dem Punkte $(0, -s)$ eine Einzelmasse m verbunden. Unsere Aufgabe besteht in der Lösung der Differenzialgleichung (6) für den Halbraum und Gleichung (6') für die elastische Platte wobei die Randbedingungen (a), (b), (c), (d), (e) berücksichticht werden sollen. Die Integration in der komplexen Ebene (Abb. 1) bei Berücksichtigung der Grenzbedingungen für die Verschiebungen $u\,(r, 0)$, $w\,(r, 0)$ und die Spannungen $\sigma_z(r, 0)$ die Ausdrücke (32), (33) oder (40) und (43).

Als Beispiel nehmen wir die Platte und die Unterlage mit Daten an. (53)

In Tab. 1 sind die Werte der positiven Nullstellen der Frequenzgleichung freier Schwingungen und die Maximalamplituden f_0 im Punkte (0, 0), bei Wirkung der Kraft $-Qe^{ipt}$, und bei Vorhandensein der Einzelmasse im Punkte $(0, -s)$, angegeben.

In Tab. 2 werden Maximalamplituden A der Verschiebung $w'(0, 0)$ für die kritische Frequenz bei Anwesenheit der Einzelmasse gegeben.

Die Vergleichung mit der statischen Durchbiegung (62) zeigt, dass für kleine Werte $k_1 s$ die Amplitude f_0 sich wenig von f_{st} unterscheidet, dagegen bei Anwesenheit von Einzelmassen wird die Amplitude A im Vergleich mit f_{st} bedeutend zunehmen zufolge der Vergrösserung der Einzelmasse.