АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА“

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 2. 1940

О НЕКОТОРЫХ ВОПРОСАХ, СВЯЗАННЫХ С ОПРЕДЕЛЕНИЕМ НАПРЯЖЕНИЙ В ПОДЪЕМНЫХ КАНАТАХ

Н. П. НЕРОНОВ

(Ленинград)

Настоящая статья представляет дополнительное исследование, посвященное некоторым вопросам, оставшимся не рассмотренными в предыдущих работах автора на ту же тему [1], [2], [3], [4].

§ 1. О распространении сильных разрывов непрерывности

Во всем предыдущем мы ограничивались изучением распространения в канате слабых разрывов непрерывности (второго и высших порядков).

Сохраним прежние обозначения для деформации $u(x, t)$ каната в произвольной его точке с абсциссой x $(0 \leqslant x \leqslant l_0)$ и в произвольный момент времени t, а также для задаваемых функций $f_1(x)$ и $f_2(x)$, вводимых на основании уравнений:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f_1(x), \qquad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x) \qquad (0 \leqslant x \leqslant l_0), \tag{1}$$

которые выражают начальные условия. Как и раньше, обозначим через $v(t)$ линейную скорость на окружности барабана $(0 \leqslant t \leqslant t_1)$, положительную при опускании груза и отрицательную при его поднятии.

Функция $f_1(x)$ считается непрерывной в силу своего определения. Рассматривая слабые разрывы непрерывности, мы должны в случае подъема считать функции $f_1'(x)$, $f_2(x)$, $v(t)$ непрерывными.

В случае опускания груза требование непрерывности распространяется на функцию $\varepsilon(s)$, характеризующую закон распределения относительного удлинения для части каната, навитой на барабан, где

$$s = s(t) = \int_0^t v(t)\,dt. \tag{2}$$

Производные $v'(t)$ $\varepsilon'(s)$, входящие в одно из граничных условий, вообще говоря, непрерывные, могут при этом в некотором конечном числе точек иметь разрывы непрерывности первого рода; тогда задача, естественно, распадается на ряд отдельных задач, соответствующих областям непрерывности производных.

Пусть теперь функции $f_1'(x)$, $f_2(x)$, $v(t)$, $\varepsilon(s)$ имеют в некоторых точках разрывы непрерывности первого рода. За исключением конечного числа точек разрыва, указанные функции, а также производные $v'(t)$ и $\varepsilon'(s)$ предполагаются в соответствующих интервалах непрерывными. Тогда мы встречаемся с распространением в канате сильных разрывов непрерывности (первого порядка).

При столь общей постановке вопроса его решение усложняется. Помимо этого такая постановка не представляет интереса в отношении практических приложений, так как распространение сильных разрывов непрерывности в канате обычно можно рассматривать как результат резкого торможения барабана или резкого приведения во вращение из состояния покоя, если длительность обоих процессов условно считать равной нулю. Наконец, сильные разрывы неизбежно возникают при динамическом приложении подвешенного к канату груза, что в частном случае может явиться следствием предшествующего ослабевания каната.

Все перечисленные нами случаи характеризуются тем, что точки разрыва тех или других из функций $f_1'(x)$, $f_2(x)$, $v(t)$, $\varepsilon(s)$ находятся на границах интервалов изменения переменных x и t. Внутри упомянутых интервалов эти функции остаются непрерывными.

На основании изложенных выше соображений мы, изучая распространение сильных разрывов, этими случаями и ограничимся. При таком ограничении первоначальное исследование ведется совершенно одинаково, независимо от характера разрыва, вплоть до момента определения произвольных постоянных интегрирования, входящих в выражение неизвестной функции $\Phi(z)$, к определению которой приведена задача, а значит и в выражение деформации $u(x, t)$ для той или другой области изменения переменных x и t. При наличии только слабых разрывов эти постоянные определялись из условия, что как сама деформация $u(x, t)$, так и ее частные производные первого порядка $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$, $\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$ остаются непрерывными при переходе через ту или другую характеристику $x+ct=\text{const}$, $x-ct=\text{const}$ дифференциального уравнения в частных производных данной задачи, отделяющую две смежных области изменения переменных x и t друг от друга, а также через прямую $ct=\text{const}$, где c обозначает скорость распространения звука в канате.

При сильных разрывах приведенное условие видоизменяется, так как требование непрерывности сохраняется только по отношению к деформации, и приобретает общий характер, сохраняя силу как для сильных, так и для слабых разрывов. Можно формулировать это условие иначе, предъявляя требование непрерывности для абсциссы ξ подвешенного к канату груза и его скорости $\frac{d\xi}{dt}$. Соответствующие формулы имеют вид:

$$\xi = l + u(x,t)\Big|_{x=l}, \quad \frac{d\xi}{dt} = v(t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{x=l}. \tag{3}$$

Здесь l обозначает нормальную (при отсутствии сил) длину вертикальной части каната в произвольный момент времени и вычисляется по формуле:

$$l = l_0 + s(t), \tag{4}$$

где $l = l_0\big|_{t=0}$.

Однако в приложениях этот способ определения постоянных ведет иногда к сравнительно сложным вычислениям. Поэтому в разбираемом ниже примере мы применяем для упрощения вычислений другой прием, основанный на изучении движения элемента каната, через который в данный момент времени проходит поверхность (в нашем случае обращающаяся в точку) разрыва.

Переходя к примеру, отметим следующие два частных случая, представляющие практический интерес. В первом случае при равномерном вращении барабана поднимающийся груз имеет ту же скорость, что и все точки каната. Затем вследствие мгновенной остановки барабана начинается распространение вдоль каната сильного разрыва непрерывности. Этот случай уже изучался разными авторами[1].

Мы рассмотрим другой случай, когда в начальный момент канат статически растянут силами собственного веса и веса груза. Далее начинается вращение барабана с линейной скоростью на окружности $v(t)$, не равной нулю в начальный момент, т. е. $v(0) \neq 0$. Здесь мы также встречаемся с распространением в канате сильного разрыва непрерывности. Мы ограничим свое исследование начальным периодом до момента времени, пока упругие перемещения, возникшие в верхней части каната, не приведут в движение подвешенный к нему в точке B груз A (фиг. 1). Разберем сначала случай подъема.

Поместим начало координат в точке C набегания каната на барабан и направим координатную ось вертикально вниз. Обозначим координаты произвольной точки M каната и его конца B соответственно через X и ξ, $\xi = \text{const} = \xi_0$.

Имеем:

$$X = \xi_0 - x - u(x, t). \tag{5}$$

Здесь x обозначает нормальную (при отсутствии сил) длину части MB каната, а $u(x, t)$ — ее деформацию (удлинение).

Дифференциальное уравнение, определяющее неизвестную функцию $u(x, t)$, имеет вид:

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = -g + c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}, \tag{6}$$

где

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}},$$

g — ускорение свободного падения, ρ — масса единицы длины каната и k — коэффициент пропорциональности в формуле Гука для натяжения T каната:

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \tag{7}$$

Начальные условия будут:

$$u(x, t)\Big|_{t=0} = f_1(x) = \frac{p}{k} x + \frac{\rho g}{2k} x^2, \quad \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x) = 0, \tag{8}$$

где p обозначает вес груза и $0 \leqslant x < l_0$.

---

1 Динник А. Н. [5], Локшин А. С. [6], Love, Perry and Richardson [7].

Граничных условий в данной задаче два. Первое относится к точке C соприкосновения каната с барабаном, второе — к точке P (фронт волны), отделяющей верхнюю часть каната, уже пришедшую в движение, от нижней, еще находящейся в покое.

Формулируем сначала первое граничное условие, в силу которого в точке C вследствие отсутствия скольжения скорости каната и барабана совпадают. Имеем:

$$v(t) = -\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{x=l}, \tag{9}$$

где функция $v(t)$ считается известной.

Переходим затем ко второму граничному условию в точке P. Значение x, соответствующее этой точке, мы обозначим через a и будем рассматривать как неизвестную функцию времени, принимающую значение l_0 в начальный момент, т. е.

$$a|_{t=0} = l_0. \tag{10}$$

Очевидно, что $a' = \frac{da}{dt}$ представляет собой скорость распространения прерывности ($a' < 0$).

Второе граничное условие выразится совокупностью двух уравнений. Одно из них констатирует непрерывность деформации $u(x, t)$ при переходе через фронт волны P, т. е.

$$u(x, t)|_{x=a-0} = u(x, t)|_{x=a+0}. \tag{11}$$

Другое получается путем применения закона количества движения к элементу каната в точке P, через который проходит прерывность. В самом деле, за время dt прерывность (геометрическая точка, совпадающая в различные моменты времени с разными элементами каната) переместится на расстояние:

$$da = a'\,dt.$$

Рассмотрим в точке P элемент каната длины $-a'\,dt$, находившийся сначала в покое ниже фронта волны. Через промежуток времени dt этот элемент окажется пришедшим в движение и будет лежать выше фронта волны. Закон количества движения дает:

$$\begin{gathered} -\rho a'\,dt\left(\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{x=a-0} - \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{x=a+0}\right) = \\ = k\left(\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=a-0} - \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=a+0}\right) dt. \end{gathered} \tag{12}$$

Итак, второе граничное условие выражается уравнениями (11) и (12).

В результате всего изложенного поставленная задача сведена к нахождению интеграла дифференциального уравнения (6) в частных производных, удовлетворяющего перечисленным выше начальным и граничным условиям. Общий интеграл этого уравнения имеет вид:

$$u(x, t) = f_1(x) + u_1(x, t), \tag{13}$$

где

$$
\begin{gathered}
f_1(x)=\frac{p}{k}x+\frac{\rho g}{2k}x^2,\\
u_1(x,\ t)=\varphi(x+ct)+\psi(x-ct).
\end{gathered}
\tag{14}
$$

Здесь через φ и ψ обозначены произвольные функции соответствующих аргументов. Слагаемое $f_1(x)$ обозначает статическую деформацию в данной точке каната от действия сил тяжести системы.

Написанное выше выражение (13) для $u(x,\ t)$ имеет силу только для части каната, пришедшей в движение, т. е. в интервале изменения переменных

$$a\leqslant x\leqslant l,$$

где a и l являются некоторыми функциями времени t.

Для части каната, остающейся в покое, деформация ее элементов выражается формулой:

$$u(x,\ t)=f_1(x)=\frac{p}{k}x+\frac{\rho g}{2k}x^2, \tag{15}$$

справедливой в интервале $0\leqslant x\leqslant a$.

Подставляем значение функции $u(x,\ t)$ и переписываем уравнения (11) и (12), выражающие второе граничное условие, в виде:

$$
\begin{gathered}
\varphi(a+ct)+\psi(a-ct)=0,\\
(a'+c)\,\varphi'(a+ct)-(a'-c)\,\psi'(a-ct)=0.
\end{gathered}
\tag{16}
$$

Дифференцируя по t первое из уравнений последней системы, заменяем ее следующей:

$$
\begin{gathered}
(a'+c)\,\varphi'(a+ct)+(a'-c)\,\psi'(a-ct)=0,\\
(a'+c)\,\varphi'(a+ct)-(a'-c)\,\psi'(a-ct)=0.
\end{gathered}
\tag{17}
$$

Так как $c>0$, $a'<0$, то из предыдущих уравнений вытекает:

$$a'+c=0,\quad \psi'(a-ct)=0. \tag{18}$$

Отсюда

$$a'=-c,\quad a=l_0-ct, \tag{19}$$

т. е. прерывность распространяется по канату со скоростью c (скорость звука). Далее функция ψ оказывается постоянной, которую можно принять равной нулю:

$$\psi=\text{const}=0. \tag{20}$$

Остается определить функцию φ, для чего мы обращаемся к первому граничному условию (9):

$$v(t)=-c\,\varphi'(l+ct). \tag{21}$$

Принимая во внимание равенство (4), положим:

$$z=l+ct=l_0+s(t)+ct. \tag{22}$$

Решая предыдущее уравнение относительно t, имеем:

$$t=f(z), \tag{23}$$

где $f(z)$ обозначает корень уравнения (22), удовлетворяющий условию

$$f(l_0)=0. \tag{24}$$

Вводя переменное z, переписываем уравнение (21) в виде:

$$\varphi'(z) = -\frac{1}{c} v(f(z)). \tag{25}$$

Отсюда определение функции φ приводится к выполнению квадратуры:

$$\varphi(z) = -\frac{1}{c} \int_{l_0}^{z} v(f(z))\, dz, \tag{26}$$

так как на основании первого из начальных условий (8) имеем:

$$\varphi(l_0) = 0. \tag{27}$$

Таким образом равенства (13) и (15), дающие решение поставленной задачи, принимают вид:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{p}{k} x + \frac{\rho g}{2k} x^2 - \int_{l_0}^{x+ct} v(f(z))\, dz \qquad (a \leqslant x \leqslant l), \\ u(x, t) &= \frac{p}{k} x + \frac{\rho g}{2k} x^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a). \end{aligned} \tag{28}$$

При переходе через точку P с абсциссой $x = a$ функция $u(x, t)$ остается непрерывной, но обе ее частных производных первого порядка претерпевают разрыв непрерывности.

Сравнение полученных нами результатов с результатами ранее разобранного случая, когда $v(0) = 0$ и вдоль каната распространяется слабый разрыв непрерывности, показывает, что аналитическое выражение функции $u(x, t)$ в обоих случаях остается одним и тем же. Это обстоятельство, как будет показано в дальнейшем, при другом способе решения делается очевидным.

Применим полученные нами формулы к случаю равномерного вращения барабана:

$$v(t) = \text{const} = -v, \quad s(t) = -vt, \quad l = l_0 - vt, \quad a = l_0 - ct. \tag{29}$$

Будем иметь:

$$\begin{aligned} u(x, t) &= \frac{p}{k} x + \frac{\rho g}{2k} x^2 + \frac{v}{c}(x + ct - l_0) \qquad (a \leqslant x \leqslant l), \\ u(x, t) &= \frac{p}{k} x + \frac{\rho g}{2k} x^2 \qquad (0 \leqslant x \leqslant a). \end{aligned} \tag{30}$$

Мы видим отсюда, что при прохождении фронта волны P через данный элемент каната, находившийся до этого в покое, натяжение T получает конечное положительное приращение ΔT, вычисляемое по формуле:

$$\Delta T = k \frac{v}{c}. \tag{31}$$

Чтобы перейти к случаю опускания груза, нужно положить:

$$v(t) = \text{const} = v.$$

Полученные ранее формулы (28), (30), (31) сохраняют силу после замены v на $-v$. Отметим здесь, что в данном случае приращение ΔT натяжения T каната оказывается отрицательным. При условии

$$T + \Delta T < 0$$

произойдет явление ослабевания каната с последующим динамическим приложением подвешенного к нему груза.

§ 2. Особый случай

Рассматривая опускание груза и пренебрегая при небольших высотах опускания массой каната, мы получили для определения его деформации u:

$$u = \xi - l, \tag{1}$$

линейное неоднородное дифференциальное уравнение второго порядка с переменными коэффициентами:

$$[l_0 + s(t)] \frac{d^2 u}{dt^2} + au = [l_0 + s(t)] [g - v'(t) + v^2(t) \varepsilon'(s)], \tag{2}$$

где $a = k/m$, m — масса груза и сохранены обозначения предыдущего параграфа. В дальнейшем будем предполагать вращение барабана равнозамедленным. Имеем:

$$v(t) = v_0 - jt, \quad s(t) = v_0 t - \frac{1}{2} jt^2, \tag{3}$$

где введенные обозначения очевидны.

Зададим функцию $\varepsilon'(s)$ в виде полинома произвольно высокой степени n с постоянными коэффициентами:

$$\varepsilon'(s) = b_n s^n + b_{n-1} s^{n-1} + b_{n-2} s^{n-2} + \cdots + b_1 s + b_0. \tag{4}$$

Общий интеграл u уравнения (2) будет:

$$u = u_1 + u_2. \tag{5}$$

Здесь u_1 обозначает общее решение однородного уравнения

$$\left(l_0 + v_0 t - \frac{1}{2} jt^2\right) \frac{d^2 u}{dt^2} + au = 0 \tag{6}$$

и u_2 — частное решение уравнения (2).

После введения вместо t нового независимого переменного z по формуле

$$z = \frac{v_0 - jt}{\sqrt{2jl_0 + v_0^2}} \tag{7}$$

уравнение (6) принимает вид:

$$(1 - z^2) \frac{d^2 u}{dz^2} + k_1^2 u = 0, \tag{8}$$

где

$$k_1^2 = \frac{2a}{j} = \frac{2k}{mj}. \tag{9}$$

В силу большого значения параметра k_1^2 можно всегда положить с точностью, покрывающей все практические потребности,

$$k_1^2 = \nu(\nu + 1), \tag{10}$$

где ν — целое положительное число.

Уравнение (8), определяющее функцию u_1, после дифференцирования может быть представлено в виде:

$$\frac{d}{dz}\left[(1 - z^2) \frac{d}{dz} \frac{du}{dz}\right] + \nu(\nu + 1) \frac{du}{dz} = 0. \tag{11}$$

Мы получили уравнение типа Штурма-Лиувилля. Его общий интеграл, если обозначить через C и D произвольные постоянные, представится в форме:

$$\frac{du}{dz} = CP_\nu(z) + DQ_\nu(z). \qquad (12)$$

Здесь $P_\nu(z)$ — полином Лежандра (функция Лежандра первого рода), вычисляемый по формуле:

$$P_\nu(z) = \frac{1}{2^\nu \nu!} \frac{d^\nu}{dz^\nu}(z^2-1)^\nu. \qquad (13)$$

Через $Q_\nu(z)$ обозначена функция Лежандра второго рода, вычисляемая на основании равенства:

$$Q_\nu(z) = \frac{1}{2} P_\nu(z) \lg \frac{z+1}{z-1} - R_\nu(z), \qquad (14)$$

где $R_\nu(z)$ — полином степени $\nu-1$, определяемый равенством:

$$R_\nu(z) = \frac{2\nu-1}{1\cdot\nu} P_{\nu-1}(z) + \frac{2\nu-5}{3(\nu-1)} P_{\nu-3}(z) + \cdots \qquad (15)$$

При помощи уравнений (8) и (12), находим выражение для функции u, именно:

$$u_1 = (1-z^2)\left[C_1 \frac{d}{dz} P_\nu(z) + D_1 \frac{d}{dz} Q_\nu(z)\right], \qquad (16)$$

где C_1 и D_1 — произвольные постоянные.

Наконец, частное решение u_2 уравнения (2) можно искать в виде произведения двух полиномов:

$$u_2 = \left(l_0 + v_0 t - \frac{1}{2} jt^2\right)(c_{2n+2} t^{2n+2} + c_{2n+1} t^{2n+1} + \cdots + c_1 t + c_0), \qquad (17)$$

оставляя неопределенными коэффициенты c_i.

Однако такая форма частного решения имеет место лишь при условии, что ни одна из разностей

$$a - \frac{1}{2} j(2n+4)(2n+3), \qquad a - \frac{1}{2} j(2n+3)(2n+2),$$
$$a - \frac{1}{2} j(2n+2)(2n+1), \cdots, a - j$$

не обращается в нуль. В противном случае частное решение дифференциального уравнения (2) в форме (17) перестает существовать. Наша задача и будет заключаться в исследовании получающегося при этом особого случая.

Заметим прежде всего, что, так как значение коэффициента a для каната велико, а значение ускорения j ограничено условием $j < g$, рассматриваемый особый случай может осуществляться на практике только при больших значениях степени n полинома $\varepsilon'(s)$. Это обстоятельство в свою очередь ведет к усложнению вычислений. Для упрощения последних мы ограничимся качественной стороной вопроса, полагая, что обращается в нуль последняя из вышеупомянутых разностей.

Затем в видах дальнейших упрощений мы положим:

$$n=0, \quad b_0=0, \quad \varepsilon'(s)=0. \tag{18}$$

Другими словами, относительное удлинение части каната, навитой на барабан, во всех его точках предполагается неизменным.

После этого уравнение (2) переписывается для равнозамедленного вращения барабана в виде:

$$\left(l_0+v_0 t-\frac{1}{2} jt^2\right)\frac{d^2u}{dt^2}+au=\left(l_0+v_0 t-\frac{1}{2} jt^2\right)(g+j). \tag{19}$$

На основании равенства (17) частное решение u_2 принимает форму:

$$u_2=\left(l_0+v_0 t-\frac{1}{2} jt^2\right)(c_2 t^2+c_1 t+c_0), \tag{20}$$

где значения неизвестных коэффициентов c_2, c_1, c_0 оказываются следующими:

$$c_2=0, \quad c_1=0, \quad c_0=\frac{g+j}{a-j}. \tag{21}$$

Пусть теперь

$$a=j. \tag{22}$$

В этом особенном случае частное решение u_2 в форме (20) не существует.

Для отыскания общего интеграла уравнения (19) при условии (22) вводим на основании формулы (7) новое независимое переменное z, после чего это уравнение переписывается следующим образом:

$$(1-z^2)\frac{d^2 u}{dz^2}+2u=K(1-z^2), \tag{23}$$

где

$$K=\frac{1}{j^2}(g+j)(2jl_0+v_0^2). \tag{24}$$

Применение способа Лагранжа вариации произвольных постоянных дает

$$u=C_2(1-z^2)+D_2\left[2z+(1-z^2)\lg\frac{1+z}{1-z}\right]+\frac{1}{6}K[2z^2-(1-z^2)\lg(1-z^2)], \tag{25}$$

где

$$z=\frac{v_0-jt}{\sqrt{2jl_0+v_0^2}} \qquad (0\leqslant z<1). \tag{26}$$

Через C_2 и D_2 обозначены произвольные постоянные интегрирования.

Итак, рассматриваемый особый случай характеризуется тем, что алгебраическая форма частного решения u_2 превращается в трансцендентную:

$$u_2=\frac{1}{6}K[2z^2-(1-z^2)\lg(1-z^2)]. \tag{27}$$

При этом изучаемое явление в разбираемом частном примере не представляет по существу дела никакой особенности, в частности, нет аналогии с явлением резонанса, как могло бы показаться с первого взгляда.

Как указывает академик А. Н. Динник[5], явления резонанса следует опасаться при неправильной форме копрового шкива, например, его некоторой эллиптичности, хотя бы и незначительной, и наличии конического барабана, в то время как цилиндрический барабан не благоприятствует развитию явления резонанса. Окончательный вывод из произведенных исследований был следующий: скорость и вес клети в подъемнике с коническим или цилиндроконическим барабаном должны быть выбраны так, чтобы частота свободных колебаний клети на канате не совпадала с угловой скоростью шкива.

§ 3. Влияние сопротивлений

Сопротивления могут быть разделены на внешние и внутренние. Первые представляют действие окружающей среды (воздуха) на канат и распределены по его поверхности. К внешним сопротивлениям относится также трение клетей о направляющие.

Природа внутренних сопротивлений весьма сложна. Здесь играет роль вязкость материала проволок, составляющих канат, затем взаимное трение проволок друг о друга. Наконец, на упругие свойства каната влияют характер и длительность процессов, предшествовавших рассматриваемому моменту и вызывающих так называемую усталость металла. Следствием изложенного является необратимость механических процессов, происходящих в канате, причем его кинетическая энергия частично переходит в кинетическую энергию молекулярного движения.

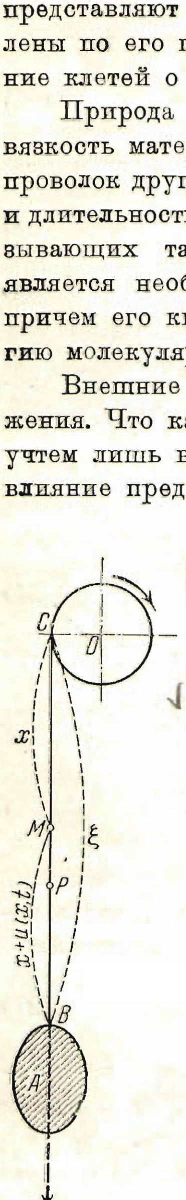
Внешние сопротивления мы примем пропорциональными скорости движения. Что касается внутренних, то из обусловливающих их факторов мы учтем лишь вязкость материала. Наконец, не будем принимать во внимание влияние предшествовавших процессов, указанное выше.

Учет вязкости мы произведем следующим образом. Положим, что натяжение T в какой-либо точке каната представляет сумму двух слагаемых. Первое из них соответствует закону Гука, т. е. пропорционально относительному удлинению $\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ каната в рассматриваемой его точке. Второе же обусловлено вязкостью и может быть принято пропорциональным скорости $\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}$ изменения этого относительного удлинения. Таким образом имеем:

$$T = k\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} + k_1\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}, \tag{1}$$

где k_1 — некоторая положительная постоянная, определяемая экспериментально.

В настоящем параграфе мы составим дифференциальные уравнения движения рассматриваемой системы для двух периодов. Первый является начальным и характеризуется распространением по канату (вследствие вращения барабана) прерывности (точка P), отделяющей верхнюю часть каната, уже пришедшую в движение, от нижней, еще находящейся в покое (фиг. 1). Во втором периоде весь канат предполагается пришедшим в движение. Сохраним в дальнейшем обозначения § 1.



Фиг. 1.

Переходим к рассмотрению первого периода ($\xi = \text{const} = \xi_0$). Дифференциальное уравнение движения элемента каната в точке M имеет вид:

$$\rho \frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \rho g - \frac{\partial T}{\partial x} - h \frac{\partial X}{\partial t}, \tag{2}$$

где h обозначает коэффициент внешних сопротивлений для каната, а абсцисса X точки M находится по формуле:

$$X = \xi - x - u(x, t). \tag{3}$$

Внося в уравнение (2) значения T и X, получаем дифференциальное уравнение в частных производных третьего порядка, определяющее неизвестную деформацию $u(x, t)$ каната:

$$g + q \frac{\partial u(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} + f \frac{\partial^3 u(x, t)}{\partial x^2 \, \partial t}. \tag{4}$$

Здесь положительные постоянные q, c, f имеют значения:

$$q = \frac{h}{\rho}, \quad c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad f = \frac{k_1}{\rho}. \tag{5}$$

Начальные и пограничные условия были сформулированы нами для первого периода ранее и сохраняют свою силу и при учете сопротивлений.

Заметим, что уравнение (4) продольных колебаний каната совпадает с уравнением плоских поперечных колебаний натянутой упруговязкой нити с закрепленными концами[1]. Однако пограничные условия в упомянутых задачах существенно различны, а это обстоятельство отражается на интеграле уравнения (4). Обе задачи делаются тождественными, если рассматривать продольные колебания натянутого вертикального каната, концы которого закреплены, и решаются без труда путем применения метода Фурье. Мы отсылаем за соответствующими подробностями к цитированной литературе о поперечных колебаниях нити, ограничиваясь лишь указанием общего характера движения. Именно функция $u(x, t)$ в этом случае представляется бесконечным рядом, каждый член которого соответствует некоторому затухающему процессу. Будем называть последний обертоном соответствующего порядка, возрастающего вместе с индексом члена ряда. Сравним характер затухания при наличии внешних сопротивлений, пропорциональных скорости движения, но без учета вязкости, а также принимая последнюю во внимание. В обоих случаях все обертоны с течением времени затухают. Однако в первом случае чисто упругой нити (струны) все обертоны затухают равномерно, т. е. логарифмический декремент колебания всех обертонов остается одним и тем же. Во втором случае наличие вязкости сказывается в том, что разные обертоны имеют различный декремент колебания, возрастающий вместе с порядком обертона. Поэтому чем выше порядок обертона, тем быстрее этот обертон затухает. Таким образом изучаемое явление, которое предложено назвать „элевтерозом", состоит в постепенном освобождении основного тона от сопровождающих его обертонов.

[1] См. работу А. Н. Герасимова [8].

Займемся теперь вторым периодом, когда весь канат оказывается пришедшим в движение. Уравнение (1), (2), (3) имеют силу и для рассматриваемого периода, но входящая в них абсцисса ξ подвешенного к канату груза должна считаться переменной.

Подстановка в уравнение (2) выражений T и X дает:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+q\frac{d\xi}{dt}=g+q\frac{\partial u(x,t)}{\partial t}+\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}-c^2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}-f\frac{\partial^3 u(x,t)}{\partial x^2\,\partial t}\equiv L. \tag{6}$$

Присоединяем сюда дифференциальное уравнение движения груза:

$$m\frac{d^2\xi}{dt^2}=mg-T\Big|_{x=0}-h_1\frac{d\xi}{dt}, \tag{7}$$

где h_1 обозначает коэффициент сопротивления, возникающего вследствие трения клетей о направляющие.

Вносим в уравнение (7) выражение T на основании формулы (1) и переписываем его в виде:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2}+r\frac{d\xi}{dt}=g-\left[b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}+b_1\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\right]_{x=0}\equiv M, \tag{8}$$

где значения положительных постоянных r, b, b_1 таковы:

$$r=\frac{h_1}{m},\qquad b=\frac{k}{m},\qquad b_1=\frac{k_1}{m}. \tag{9}$$

Решаем уравнения (6) и (8) относительно $\frac{d\xi}{dt}$ и $\frac{d^2\xi}{dt^2}$, полагая, что $q\neq r$. Имеем:

$$\frac{\partial\xi}{dt}=\frac{L-M}{q-r},\qquad \frac{d^2\xi}{dt^2}=\frac{qM-rL}{q-r}. \tag{10}$$

Отсюда, исключая ξ, находим дифференциальное уравнение в частных производных четвертого порядка, определяющее неизвестную функцию $u(x,t)$:

$$\frac{\partial}{\partial t}(L-M)=qM-rL. \tag{11}$$

Если в специальном случае $q=r$, это уравнение будет третьего порядка и имеет вид:

$$L=M. \tag{12}$$

§ 4. Применение конических барабанов

Во всем предыдущем мы предполагали применение цилиндрических барабанов. Однако последнее возможно при сравнительно небольших высотах подъема, не превышающих 500 м. При больших высотах необходимо подвешивание так называемого хвостового каната или применение барабанов переменного радиуса[1]. Из последних мы рассмотрим конический барабан, имеющий форму прямого кругового усеченного конуса.

[1] Акад. Герман А. П. [9].

Поместим начало координат в вершине конуса и направим координатную ось Oz по оси конуса (ось вращения). Уравнение конуса в прямоугольных декартовых координатах x, y, z будет:

$$x^2+y^2=a^2z^2, \tag{1}$$

где через a, $a>0$, обозначен постоянный параметр.

Находящийся на поверхности конуса канат будет расположен по конической спирали, уравнение которой в цилиндрических координатах r, φ, z имеет вид:

$$r=ab\varphi, \quad z=b\varphi \quad (\varphi>0), \tag{2}$$

где постоянная b, $b>0$, связана с шагом h спирали соотношением

$$h=2b\pi\sqrt{1+a^2}. \tag{3}$$

В зависимости от направления отсчета угла φ мы будем иметь дело с левой или правой спиралью.

Скорость $v(t)$ элемента каната в точке набегания последнего на барабан выразится формулой:

$$v(t)=\pm r\omega \qquad (\omega>0). \tag{4}$$

Здесь через ω обозначено абсолютное значение угловой скорости барабана. Внося значение r, на основании формулы (2) получаем:

$$v(t)=\pm ab\varphi\omega. \tag{5}$$

В формулах (4) и (5) удерживается знак плюс при опускании груза и минус при его поднятии.

Ограничимся случаем равномерного вращения:

$$\varphi=\varphi_0\pm\omega t \qquad (\omega=\text{const}). \tag{6}$$

Подстановка в формулу (5) дает:

$$v(t)=\pm ab\omega(\varphi_0\pm\omega t). \tag{7}$$

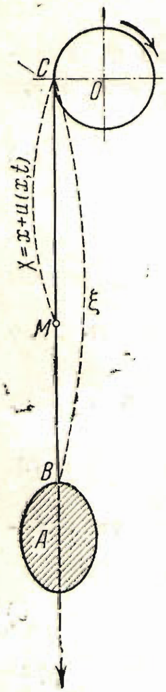
Двойной знак в формуле (6) для φ соответствует двум возможным направлениям вращения барабана. Зависимость $v(t)$ оказалась линейной. Поэтому сохраняют силу все предыдущие исследования для равнопеременного вращения при цилиндрическом барабане. При верхнем знаке формулы (6) мы будем иметь аналогию с равноускоренным вращением, а при нижнем с равнозамедленным. В первом случае значение r увеличивается, а во втором уменьшается.

§ 5. О различных формах основного уравнения задачи

Основное уравнение в частных производных рассматриваемой задачи с учетом как массы, так и веса каната, определяющее деформацию $u(x, t)$, можно писать в различных формах. Ограничиваясь случаем поднятия груза, укажем одну из новых форм, которой пользовался проф. А. С. Локшин [6].

С этой целью возьмем начало координат в точке C набегания каната на барабан и направим координатную ось вертикально вниз (фиг. 2). Тогда абсцисса X какой-либо точки M найдется по формуле:

$$X = x + u(x, t), \tag{1}$$



Фиг. 2.

где x — нормальная (при отсутствии сил) длина части MC каната, а $u(x, t)$ — деформация (удлинение) последней.

Дифференциальное уравнение движения элемента каната в точке M будет:

$$\rho \frac{d^2 X}{dt^2} = \rho g + \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{2}$$

где T — натяжение каната:

$$T = k \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}. \tag{3}$$

Скорость $\frac{\partial X}{\partial t}$ и ускорение $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ рассматриваемого элемента каната являются „индивидуальными" (по отношению к этому элементу) производными (иначе производными по его траектории) функции X по времени t, и поэтому при операции дифференцирования x должно считаться переменным.

В самом деле, вследствие навивания каната на барабан нормальная длина x части MC каната при фиксированной точке M будет, очевидно, функцией времени t.

Эти элементарные соображения приведены здесь лишь потому, что, повидимому, случайным упущением их из вида объясняется отличие результата проф. А. С. Локшина[1] от нашего, который выражается уравнением (10).

За элемент времени dt элементарное приращение dx функции x определяется очевидной формулой:

$$ds = dx \left(1 + \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0}\right), \tag{4}$$

где

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \qquad s(t) = \int_0^t v(t)\, dt \tag{5}$$

и сохранены прежние обозначения для скорости $v(t)$ точек на окружности барабана и длины дуги $s(t)$ их поворота.

Уравнение (4) может быть переписано в следующей форме:

$$\frac{dx}{\partial t} = \frac{v(t)}{1 + \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0}}. \tag{6}$$

Переходим теперь к вычислению производных. Из уравнения (1) имеем:

$$\frac{dX}{\partial t} = \frac{dx}{dt}\left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right) + \frac{\partial u(x, t)}{\partial t},$$

[1] Локшин А. С. [6], стр. 105, уравнение (1).

или после подстановки значения $\frac{\partial x}{\partial t}$ на основании равенства (6):

$$\frac{dX}{dt} = v(t)\frac{1+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}}{1+\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=0}} + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{7}$$

Наконец, сделаем обычное в теории упругости предположение о малости относительного удлинения.

Тогда

$$\frac{dX}{dt} = v(t) + \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}. \tag{8}$$

Аналогичным образом получаем:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = v'(t) + v^2(t)\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + v(t)\left[2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\Big|_{x=0}\right] + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2}. \tag{9}$$

После соответствующей подстановки в уравнение (2) мы убеждаемся что новая форма дифференциального уравнения в частных производных, определяющая деформацию $u(x, t)$, оказывается очень сложной. Именно:

$$v'(t) + [v^2(t) - c^2]\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + v(t)\left[2\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t} - \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\Big|_{x=0}\right] + \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = g, \tag{10}$$

где

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}.$$

Граничное условие, относящееся к точке C, будет:

$$u(x,t)|_{x=0} = 0. \tag{11}$$

Дифференциальное уравнение движения подвешенного к канату в точке B груза дает второе граничное условие:

$$\frac{d^2X}{dt^2} = g - b\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\Big|_{x=l}, \tag{12}$$

где производная $\frac{\partial^2 X}{dt^2}$ определяется равенством (9) и сохранены все прежние обозначения:

$$l = l_0 + s(t),\ b = k/m.$$

Наконец, начальные условия имеют вид:

$$u(x,t)\Big|_{t=0} = f_1(x),\ \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\Big|_{t=0} = f_2(x). \tag{13}$$

При равномерном вращении барабана уравнение (10) несколько упрощается, так как $v(t) = \text{const}$ и $v'(t) = 0$, однако не представляет каких-либо преимуществ в смысле простоты исследования по сравнению с тем, которым пользовались мы в настоящей работе.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неронов Н. П. О напряжениях в подъемном канате. „Прикладная математика и механика". 1936. Т. III. Вып. 1. [Стр. 31—45].
2. Неронов Н. П. Об упругих деформациях в подъемном канате. „Прикладная математика и механика". Новая серия. 1937. Т. I. Вып. 1. [Стр. 91—116].
3. Неронов Н. П. О напряжениях в канате при подъеме груза. „Записки Ленинградского горного института". 1937. Т. X. № 3. [Стр. 1—27].
4. Неронов Н. П. О напряжениях в канате при опускании груза. „Прикладная математика и механика". 1939. Т. III. Вып. 3. [Стр. 125—144].
5. Акад. Динник А. Н. О работе по теории упругости... „Прикладная математика и механика". 1933. Т. I. Вып. 2. [Стр. 337]. § 8.
6. Локшин А. С. О динамических напряжениях в подъемных канатах. Приложение к „Горному журналу" за 1929 г. № 12. [Стр. 105—120].
7. Love, Perry and Richardson. Winding Ropes in Mines. "Phil. Mag". 1906. Ser. 6. Vol. XI. [P. 107—117].
8. Герасимов А. Н. Проблема упругого последействия и внутреннее трение. „Прикладная математика и механика". 1938. Т. I. № 4. [Стр. 493—536].
9. Акад. Герман А. П. Шахтный подъем. 1935. Ч. I. § 2. [Стр. 7—10]. §§ 25—36 [Стр. 135—205].

SUR QUELQUES QUESTIONS LIÉES AVEC LA DÉTERMINATION DES TENSIONS DANS LES CÂBLES DE LEVAGE

N. P. NÉRONOFF

(Résumé)

L'article présente une recherche complémentaire consacrée à quelques questions qui n'ont pas été considerées dans les travaux précédents de l'auteur sur le même sujet [1], [2], [3], [4].

Ces questions sont les suivantes:

§ 1. Sur la propagation d'une discontinuité du premier ordre dans le câble.
§ 2. Un cas singulier (pseudo-résonnance).
§ 3. L'influence des résistances.
§ 4. L'application des tambours coniques.
§ 5. Sur les formes diverses de l'équation fondamentale du problème.