АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 2, 1940

НЕКОТОРЫЕ МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНИЯ УРАВНЕНИЙ РАВНОВЕСИЯ УПРУГИХ ОБОЛОЧЕК

Н. А. КИЛЬЧЕВСКИЙ

(Киев)

§ 1. Механический смысл уравнений равновесия оболочек. Приведенная упругая реакция срединной поверхности

Теория деформаций и распределения напряжений внутри тонких упругих оболочек основывается на приведении общей трехмерной задачи теории упругости к двухмерной задаче определения перемещений точек срединной поверхности оболочки [1]. Это приведение обычно осуществлялось при помощи введения ряда вспомогательных гипотез относительно характера деформации материала оболочки, которые основываются на предположении о малости ее толщины. Гипотезы эти, вообще говоря, не являются следствиями общих теорем теории упругости, и поэтому, строго говоря, полная система уравнений, которую можно было бы составить на основании уравнений теории упругости и вспомогательных гипотез, была бы несовместной системой. Это затруднение обходят, выбирая из несовместной системы некоторую совместную систему уравнений. Подробный анализ этого вопроса до настоящего времени не был опубликован [1].

Однако общий механический смысл уравнений, содержащих перемещения срединной поверхности, установить легко, независимо от способа получения этих уравнений.

Действительно, эти уравнения имеют следующий общий вид:

$$L^i(u_j) + X^i = 0 \qquad (i, j = 1, 2, 3), \tag{1}$$

где L^i представляет некоторую операцию над перемещениями срединной поверхности u_j, дающую в результате контравариантный вектор; X^i — контравариантные компоненты главного вектора объемных и поверхностных сил, действующих на элемент оболочки и перенесенных в срединную поверхность.

---

[1] Общее исследование различных гипотез теории оболочек произведено в работе автора „Основные уравнения теории оболочек и некоторые методы их интегрирования", подготовленной в настоящее время к печати.

В состав оператора $L^i(u_j)$ могут входить моменты сил, приложенных к элементу оболочки, как некоторые параметры.

Уравнения (1) можно рассматривать как условия равновесия двухмерного упругого континуума (срединной поверхности), находящегося под действием сил X^i. Оператор $L^i(u_j)$ представляет упругую реакцию указанного континуума. Выбор той или иной частной системы уравнений из полной несовместной системы уравнений теории оболочек равносилен выбору тех или иных упругих свойств этого двухмерного многообразия. Конечно, наиболее обоснованным составом упругой реакции будет тот, который непосредственно вытекает из совместных уравнений теории упругости без дополнительных гипотез.

Такая система состоит из двенадцати уравнений с двенадцатью неизвестными функциями. Приведение ее к системе трех уравнений, соответствующих трем условиям равновесия точки на срединной поверхности, в общем случае не может быть выполнено в замкнутой форме. Формально же такое приведение возможно, что доказывает существование решения задачи приведения трехмерной задачи к двухмерной (для достаточно тонких оболочек).

Таким образом всегда можно определить реакцию упругой срединной поверхности, условно заменяющей трехмерную оболочку, которая уравновешивает внешние силы (объемные и поверхностные), перенесенные в срединную поверхность.

Отсюда вытекает, что работа внешних сил на перемещениях точек оболочки может быть заменена работой приведенной реакции срединной поверхности на перемещениях этой последней.

§ 2. Общие интегральные уравнения равновесия оболочек

Рассмотрим некоторую скалярную функцию $q(z)$, определенную на интервале $(-Mh, +Mh)$, где $2h$ — толщина оболочки и $M>1$, и удовлетворяющую условиям:

a) функция $q(z)$ кусочно непрерывна на интервале $(-Mh, +Mh)$;

b) функция $q(z)$ равна нулю на интервалах $(-\varepsilon h, +\varepsilon h)$, $(h-\varepsilon h, h+\varepsilon h)$, $(-h-\varepsilon h, -h+\varepsilon h)$, где $\varepsilon \leqslant 1$;

c) кроме того,

$$\int_{-h}^{+h} q(z)\,dz = 1.$$

Условимся называть приведенным перемещением срединной поверхности ковариантный вектор, имеющий следующие компоненты:

$$u_i \overset{*}{=} \int_{-h}^{+h} q(z)\, v_i\, dz, \tag{2}$$

где v_i — компоненты векторов перемещений точек оболочки, расположенных на общей нормали к недеформированной срединной поверхности, перенесенные в срединную поверхность по правилам параллельного переноса векторов, а звездочка над знаком равенства указывает, что равенство (2) не инвариантно.

Очевидно, функцию $q(z)$ можно всегда выбрать таким образом, чтобы разность между u_i и действительными перемещениями соответствующей точки срединной поверхности v_{i0} удовлетворяла условию:

$$|u_i - v_{i0}| < Ah^m,$$

где A — некоторое постоянное число порядка единицы, m — произвольное положительное число ($m \geqslant 1$).

Более конкретный выбор функции $q(z)$ будет указан ниже.

Предположим теперь, что функция $q(z)$ представляет интенсивность нагрузки, распределенной вдоль отрезка $(-Mh, Mh)$, расположенного внутри неограниченной упругой среды, и направленной по i-ой координатной линии. На основании известных выражений перемещений и напряжений в неограниченной упругой среде, вызванных сосредоточенной силой, имеющей заданное направление, легко найти перемещения и напряжения, вызванные распределенной указанным способом нагрузкой $q(z)$.

Очевидно, эти перемещения и напряжения выражаются формулами:

$$v_{(i)j} = \int\limits_{-Mh}^{+Mh} q(z)\, u_{(i)j}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, dz, \qquad \tau^{jk}_{(i)} = \int\limits_{-Mh}^{+Mh} q(z)\, t^{jk}_{(i)}(x, y, z; \xi, \eta, \zeta)\, dz, \tag{3}$$

где $u_{(i)j}$ и $t^{jk}_{(i)}$ суть соответственно перемещения и напряжения, вызванные в неограниченной упругой среде сосредоточенной силой, направленной по i-ой координатной линии, x, y, z — криволинейные координаты точки приложения вспомогательной силы, ξ, η, ζ — координаты любой точки упругой среды.

Функции $v_{(i)j}$ и $\tau^{jk}_{(i)}$ являются соответственно компонентами ковариантного вектора и контравариантного тензора второго ранга в точке $M(\xi, \eta, \zeta)$.

Функции $u_{(i)j}$ и $t^{jk}_{(i)}$ для любых значений переменных всегда можно ограничить неравенствами:

$$|u_{(i)j}| < \frac{A}{r}, \qquad |t^{jk}_{(i)}| < \frac{B}{r^2},$$

где A и B — некоторые положительные постоянные и r — расстояние между точкой упругой среды $M(\xi, \eta, \zeta)$ и точкой приложения сосредоточенной силы $N(x, y, z)$.

Принимая во внимание свойства функции $q(z)$, можно утверждать, что существенно особыми точками функций $v_{(i)j}$ и $\tau^{jk}_{(i)}$ являются точки, лежащие на оси z и координаты которых z равны $\pm\varepsilon h$, $-h+\varepsilon h$, $h-\varepsilon h$, $-h-\varepsilon h$, $h+\varepsilon h$. Последние две точки находятся за пределами оболочки. При приближении к этим точкам функции $v_{(i)j}$ и $\tau^{jk}_{(i)}$ неограниченно возрастают по абсолютной величине, но не быстрее, чем функции r^{-1} при $r \to 0$.

Во всех остальных точках оси z, лежащих между указанными точками, функции $v_{(i)j}$ и $\tau^{jk}_{(i)}$ имеют несущественные (устранимые) особенности.

Применяя теорему Бетти к системе нагрузок, приложенных к оболочке и соответствующим перемещениям, с одной стороны, и к вспомогательной нагрузке интенсивности $q(z)$ с соответствующими перемещениями $v_{(i)j}$ — с другой, получим:

$$\int_{-h}^{+h} q(z)\, v_i\, dz \overset{*}{=} \Phi_i - \int_{(S)} \overline{K}^{j}_{(i)} u_i\, dS + A_{(i)1} - A_{(i)2} \qquad (i=1,\ 2,\ 3), \tag{4}$$

где Φ_i — работа сил, приложенных к внешним поверхностям оболочки на вспомогательных перемещениях $v_{(i)j}$:

$$\Phi_i = \int_{(s_1)} S^i v_{(i)j}\, ds + \int_{(s_2)} S^j v_{(i)j}\, ds, \tag{5}$$

причем интегрирование производится по внешним поверхностям оболочки;

$$\overline{K}_{(i)}^{j} = -L^j(v_{(i)k})$$

сила, статически эквивалентная силам, приложенным к внешним поверхностям оболочки; эти силы принадлежат к группе сил, уравновешивающих нагрузку $q(z)$;

$$A_{(i)1} = \int_{(s_k)} S^j v_{(i)j}\, ds$$

работа сил, приложенных к контурным поверхностям оболочки на вспомогательных перемещениях $v_{(i)j}$;

$$A_{(i)2} = \int_{(s_k)} S^j_{(i)} v_j\, ds$$

работа вспомогательных сил, приложенных к контурной поверхности на действительных перемещениях.

Оставаясь в пределах точности, принятой в теории оболочек, выразим приближенно $A_{(i)1}$ и $A_{(i)2}$ через работу усилий и моментов, приложенных к краю срединной поверхности:

$$A_{(i)1} = \int_{(\sigma_k)} T^j v_{(i)j}\, d\sigma + \int_{(\sigma_k)} L_j\, \omega^j_{(i)}\, d\sigma, \quad A_{(i)2} = \int_{(\sigma_k)} T^j_{(i)} u_j\, d\sigma + \int_{(\sigma_k)} L_{(i)j}\, \omega^j\, d\sigma, \tag{6}$$

где T^j и $T^j_{(i)}$ — усилия, соответствующие основным и вспомогательным перемещениям, приложенные к контуру срединной поверхности, L_j и $L_{(i)j}$ — приведенные моменты, соответствующие тем же перемещениям, ω^j и $\omega^j_{(i)}$ — углы поворота края срединной поверхности, которые в силу предполагаемой малости могут быть определены по формулам:

$$\omega^j = \frac{1}{2\sqrt{g}} (\nabla_i v_k - \nabla_k v_i) \qquad (i,\ k,\ j = 1,\ 2,\ 3)$$

(g — определитель, составленный из компонентов метрического тензора).

Заметим, что, следуя известным выводам теории оболочек о краевых условиях задачи, можно утверждать, что работа моментов, приложенных к контуру, сводится к работе одного изгибающего момента. При этом соответственно изменяется состав компонентов вектора усилий [1].

Таким образом краевые условия связывают восемь функций, из которых четыре должны быть заданы.

Равенство (4) не изменит своей формы, если к функциям $v_{(i)j}$ прибавить некоторые произвольные функции $v'_{(i)j}$, которые можно рассматривать как составляющие перемещений упругой среды, вызванные некоторыми поверхностными и объемными несосредоточенными силами. Эти функции могут иметь лишь изолированные особенности, с тем лишь ограничением, что в особых точках напряжения $\tau'^{jk}_{(i)}$, соответствующие перемещениям $v'_{(i)j}$, должны возрастать не быстрее, чем r^{-1} при $r \to 0$. При этих условиях левая часть равенства (4) останется без изменения. Не изменит своей формы и правая часть, так как сила $-L^j(v_{(i)k} + v'_{(i)k})$ будет попрежнему статически эквивалентна нагрузке срединной поверхности объемными силами (зависящими только от $v'_{(i)j}$) и поверхностными, приложенными к внешним поверхностям оболочки.

Это свойство равенства (4) позволяет исключить из состава суммы $A_{(i)1} - A_{(i)2}$ члены, содержащие четыре неизвестные величины, характеризующие напряженное и деформированное состояние контура срединной поверхности.

Для этого достаточно выбрать произвольные вспомогательные функции $v'_{(i)j}$ так, чтобы члены, содержащие неизвестные функции, обратились тождественно в нуль.

На основании сказанного можно сделать вывод, что определение функций $v'_{(i)j}$ не представляет затруднений, так как их не требуется подчинять дифференциальным уравнениям, а только условиям на контуре. В дальнейшем мы предполагаем, что определение функций $v'_{(i)j}$ произведено и, следовательно, разность $A_{(i)1} - A_{(i)2}$ есть заданная функция.

Тогда на основании равенства (2) получим:

$$u_i = F_i - \int\limits_{(s)} K^j_{(i)} u_j \, ds \qquad (i = 1, 2, 3), \tag{7}$$

где

$$F_i = \Phi_i + A_{(i)1} - A_{(i)2}, \qquad K^j_{(i)} = -L^j\left(v_{(i)j} + v'_{(i)j}\right).$$

Уравнения (7) представляют собой искомую систему интегральных уравнений равновесия тонких оболочек.

На основании свойств функций $v_{(i)j}$ и $\tau^{jk}_{(i)}$ можно заключить, что полученные интегральные уравнения являются интегральными уравнениями Фредгольма второго рода с регулярными ядрами. Действительно, срединная поверхность не содержит особых точек этих функций.

Вспомогательные усилия и моменты, приложенные к контуру усилия, и моменты, зависящие от нагрузки $q(z)$, остаются непрерывными и дифференцируемыми функциями дуги контура даже при переходе точек приложения нагрузки на контурную поверхность, если исключить несущественные особенности, соответствующие точке пересечения нормали к срединной поверхности, на которой расположена нагрузка $q(z)$, с срединной поверхностью.

Исключение несущественных особенностей диктуется также соображениями вытекающими из физического смысла равенства (4), так как работа нагрузок $q(z)$ уже учтена выражением, стоящим в левой части этого равенства.

Поэтому функции $v'_{(i)}$ будут функциями непрерывными и дифференцируемыми на срединной поверхности.

Отсюда вытекает справедливость нашего утверждения относительно свойств уравнений (7).

Остановимся на вопросе о существовании решения уравнений (7). Существование решения уравнений (7) находится в непосредственной зависимости от существования решений общей задачи теории упругости, так как уравнения (7) можно рассматривать как некоторую приближенную форму общих уравнений теории упругости. Отсюда вытекает, что, вообще говоря, всегда можно так определить ядра уравнений (7), чтобы последние имели решение при смешанных условиях на поверхности оболочки. В частности, если определить ядра, исходя из совместной системы двенадцати уравнений, о которых шла речь в § 1, существование решения можно считать обеспеченным при тех же общих условиях, при которых имеет решение соответствующая общая задача теории упругости, т. е. при наличии заданных на части поверхности перемещений, исключающих перемещения оболочки как абсолютно твердого тела.

§ 3. Некоторые методы приближенного решения интегральных уравнений, основанные на применении способов аппроксимации функций

Интегральные уравнения, найденные нами, позволяют найти общее решение задачи теории оболочек путем приведения системы к одному интегральному уравнению и последовательного применения классических формул Фредгольма. Однако этот способ решения задачи нельзя считать достаточно эффективным.

Укажем некоторые способы приближенного решения задачи.

Остановимся прежде всего на применении метода наименьших квадратов[1].

Станем искать приближенные значения перемещений в форме полиномов:

$$u_{(n)i} = \sum_{\rho=0}^{n} P_{(i)\rho}(x^j), \tag{8}$$

где $P_{(i)\rho}(x^j)$ — полином ρ-ой степени переменных x^j с неопределенными коэффициентами. Подставляя в уравнение (7) вместо u_i его приближенное значение $u_{(n)i}$, получим приближенное значение заданной функции F_i:

$$F_{(n)i} = \sum_{\rho=1}^{n} F_{(i)\rho},$$

[1] Метод наименьших квадратов к решению интегральных уравнений был применен Виарда и Мюнтцем.

где

$$F_{(i)\rho} = P_{(i)\rho} + \int\limits_{(s)} K_{(i)}^{j} P_{(j)\rho}\, ds.$$

Введем обозначение

$$R_{(n)i} = F_i - F_{(n)i}$$

и определим коэффициенты полиномов $P_{(i)\rho}$ из условий минимума интегралов:

$$J_{(n)i} = \int\limits_{(s)} R_{(n)i}^2\, ds. \tag{9}$$

Покажем, что при возрастании числа n приближенные значения $u_{(n)}$ стремятся к u_i, если основная система уравнений имеет решения, т. е. в этом случае процесс получения приближенных значений $u_{(n)i}$ будет сходящимся.

Заметим предварительно, что вариационная задача (9) всегда имеет решение при достаточной полноте системы аппроксимирующих функций. Это условие выполнено. Следовательно,

$$\lim_{n\to\infty} J_{(n)i} = 0, \quad \lim_{n\to\infty} R_{(n)i} = 0.$$

(Это равенство, как и ниже равенство (10), имеет место для всех значений аргументов, за исключением быть может множества точек меры нуль).

Введем обозначения

$$w_i = \lim_{n\to\infty} (u_i - u_{(n)i}).$$

На основании вышесказанного имеем:

$$u_{(n)i} = F_i - R_{(n)i} - \int\limits_{(s)} K_{(i)}^{j} u_{(n)j}\, ds, \quad u_i = F_i - \int\limits_{(s)} K_{(i)}^{j} u_j\, ds.$$

Производя вычитание и переходя к пределу при $n \to \infty$, найдем:

$$w_i = -\int\limits_{(s)} K_{(i)}^{j} w_j\, d \qquad s (i = 1,\ 2,\ 3). \tag{10}$$

Если основная система уравнений имеет решения, то система (10) допускает лишь решения $w_i = 0$. Это подтверждает правильность наших заключений о сходимости указанного процесса последовательных приближений.

Заметим, что погрешности для любого значения n являются решениями интегральных уравнений:

$$w_{(n)i} = R_{(n)i} - \int\limits_{(s)} K_{(i)}^{j} w_{(n)j}\, ds.$$

Теперь остановимся более подробно на выборе функции $q(z)$, на которую, кроме общих требований § 2, не было наложено более определенных ограничений.

Обозначим значения кусочно непрерывной функции $q(z)$ на интервале $(h + \varepsilon h,\ Mh)$ через $q_1(z)$, на интервале $(\varepsilon h,\ h - \varepsilon h)$ через $q_2(z)$, на интервале $(-h + \varepsilon h,\ -\varepsilon h)$ через $q_3(z)$, на интервале $(-h - \varepsilon h,\ -Mh)$ через $q_4(z)$.

Наложим теперь на функции q_1, q_2, q_3, q_4, например, следующие условия:

$$\int_0^{Mh} z^k q(z)\, dz = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$(k=0,\ 1, \ldots, n).$$

$$\int_0^{-Mh} z^k q(z)\, dz = 0 \qquad \text{(b)}$$

Из равенства (a) вытекает:

$$\int_{h+\varepsilon h}^{Mh} p_k(t)\, q_1(t)\, dt = -\int_{\varepsilon h}^{h-\varepsilon h} p_k(\alpha)\, q_2(\alpha)\, d\alpha, \qquad \text{(c)}$$

где p_k — некоторые полиномы.

Предположим, что функция $q_2(z)$ задана.

Для удобства вычислений положим $M = 2 - \varepsilon$ и сделаем замену переменных:

$$t = \frac{1}{2} h (1 - 2\varepsilon) \left(z + \frac{3}{1-2\varepsilon}\right),$$

$$\alpha = \frac{1}{2} h (1 - 2\varepsilon) \left(z + \frac{1}{1-2\varepsilon}\right) = \frac{1}{2}\, h \left(z' + \frac{3}{1+2\varepsilon}\right).$$

Выберем полином $p_k(t)$ так, чтобы при указанной замене переменной t он преобразовался в полином Лежандра $P_k(z)$:

$$p_k(t) = P_k(z).$$

Тогда полином $p_k(\alpha)$ преобразуется следующим образом:

$$p_k(\alpha) = P_k(z') = P_k\left(z - \frac{2}{1-2\varepsilon}\right).$$

Равенство (c) приобретает вид:

$$\int_{-1}^{+1} P_k(z)\, Q_1(z)\, dz = -\int_{-1}^{+1} P_k\left(z - \frac{2}{1-2\varepsilon}\right) Q_2(z)\, dz, \qquad \text{(c')}$$

где

$$Q_1(z) = q_1(t), \quad Q_2(z) = q_2(\alpha).$$

Функцию $Q_1(z)$ можно представить при помощи разложения по полиномам Лежандра:

$$Q_{(n)\,1}(z) \approx \sum_{j=1}^{n} B_j P_j(z), \qquad (11)$$

где

$$B_j = -\frac{2j+1}{2} \int_{-1}^{+1} P_j\left(z - \frac{2}{1-2\varepsilon}\right) Q_2(z)\, dz.$$

Увеличивая n в формуле (11), получим в пределе бесконечную последовательность функций $Q_{(n)1}$. Вообще говоря, эта последовательность может быть расходящейся, но определенный механический смысл она сохраняет всегда. Действительно, возвратимся к нагрузке $q_{(n)1}(t)$. Составим функцию:

$$P_{(n)1}(t) = \frac{h(1-2\varepsilon)}{n} q_{(n)1}(t).$$

Эту функцию можно рассматривать как равнодействующую распределенных сил интенсивности $q_{(n)1}(t)$, приложенную к $^1/_n$ части промежутка, на котором эти силы распределены.

Если существует

$$\lim_{n\to\infty} P_{(n)1}(t) = P(t),$$

то можно утверждать, что особенности, соответствующие предельной нагрузке $q_{(n)1}(t)$, соответствуют непрерывному распределению конечных сосредоточенных сил на интервале $(h+\varepsilon h,\ 2h-\varepsilon h)$. Если этот предел не существует, то на указанном интервале следует распределить особенности более высокого порядка (например, типа силовых дублетов и т. д.). В этом и заключается механический смысл предела бесконечной последовательности функций:

$$Q_{(n)1}(t) = q_{(n)1}(z).$$

Аналогично функции $q_{(n)1}(z)$ можно найти функцию $q_{(n)4}(z)$ и таким образом полностью построить функцию $q(z)$. Легко заметить, что вызванные этой нагрузкой перемещения и напряжения затухают вблизи линии, на которой она размещена.

Действительно, представим себе неограниченную среду, в которой приложена нагрузка $q(z)$. Воспользуемся для определения напряжений и перемещений системой координат Декарта, причем в качестве оси z примем линию, на которой распределена нагрузка. Тогда напряжения и перемещения можно представить в некоторой области в форме рядов, расположенных по степеням z, где z — координаты точек приложения нагрузки. Чтобы определить эту область, заметим, что разложение указанных функций в ряды по степеням z зависит от условий возможности разложения в ряд функции r^{-n}, где r — расстояние от некоторой точки на оси z до той точки M упругой среды, в которой определяются перемещения. Представим r в форме:

$$r = r_0\left(1 - 2\frac{z}{r_0}\cos\varphi + \frac{z^2}{r_0^2}\right)^{1/2},$$

где r_0 — расстояние от начала координат до точки M, φ — угол, образованный вектором $\bar{r}_0$ с осью z. Условие возможности разложения r по степеням z имеет вид:

$$\left| -2\frac{z}{r_0}\cos\varphi + \frac{z^2}{r_0^2}\right| < 1,$$

или, усиливая неравенство,

$$2\frac{|z|}{r_0} + \frac{z^2}{r_0^2} < 1;$$

откуда

$$r_0 > \frac{|z|}{\sqrt{2}-1} \approx 2.5\,|z|,$$

т. е.

$$(r_0)_{\min} > 2.5Mh. \tag{12}$$

Опишем вокруг начала координат сферу радиусом $(r_0)_{\min}$. На основании формул (3) и свойств (c) функции $q(z)$ можно утверждать, что в точках, лежащих вне сферы радиуса $(r_0)_{\min}$, перемещения и напряжения, вызванные нагрузкой $q(z)$, равны нулю.

Обращаются в нуль и производные от указанных величин. Следовательно, при таком выборе нагрузки $q(z)$ ядра $K^j_{(i)}$ обращаются в нуль за пределами сферы, имеющей радиус $(r_0)_{\min}$.

Можно воспользоваться этим свойством ядер $K^j_{(i)}$ для локального изучения напряжений и перемещений при помощи метода наименьших квадратов.

Оставляя без изменения все предыдущие рассуждения, ограничим область интегрирования совокупностью точек, удовлетворяющих неравенству (12) и лежащих в окрестности точки $M(x_0, y_0, z_0)$. Решая задачу, найдем приближенное представление перемещений в указанной области, наилучшее в смысле метода наименьших квадратов. Очевидно, коэффициенты, входящие в решение, будут функциями точки $M(x_0, y_0, z_0)$.

Мы ограничимся этими указаниями относительно применения метода наименьших квадратов к решению основной задачи.

§ 4. Метод замены ядер в основных интегральных уравнениях, основанный на приближенном определении упругой реакции срединной поверхности

Мысль о распространении некоторых положений теории балок на упругом основании на теорию оболочек не нова. Метод „упругого основания" в теории оболочек был выдвинут и развит в работах И. Я. Штаермана [2], [3].

В настоящем параграфе мы попытаемся обобщить этот метод с целью найти новые упрощенные формы интегральных уравнений теории оболочек.

По существу методы, которые мы здесь рассмотрим, также относятся к методам аппроксимации функций[1], но эта аппроксимация основана на ряде физических гипотез о характере деформаций упругой среды для некоторых частных случаев нагрузки и краевых условий. Чтобы выяснить основную идею этого метода, рассмотрим сперва частный случай круглой цилиндрической трубы с переменной толщиной стенок, свободно опертой на концах и находящейся под действием нагрузки, изменяющейся вдоль образующей и постоянной на фиксированном поперечном сечении.

Отнесем эту оболочку к следующей системе координат: ось x направим по оси трубы, начало поместим на одном из ее концов; второй координатой будем считать длину дуги поперечного сечения, отсчитываемую от некоторой начальной точки.

---

[1] На тесную связь между методами аппроксимации функций и методами строительной механики указывает в своих работах И. Я. Штаерман.

Тогда приближенное дифференциальное уравнение равновесия такой оболочки будет иметь вид:

$$\frac{d^2}{dx^2}\left(D\frac{d^2w}{dx^2}\right)+\frac{2Ehw}{(1-\mu^2)a^2}=Q(x), \tag{13}$$

где D — цилиндрическая жесткость, E — модуль Юнга, μ — коэффициент Пуассона, w — радиальное перемещение, $Q(x)$ — нагрузка поверхности оболочки.

Это уравнение, как известно, представляет уравнение равновесия балки-полоски, вырезанной вдоль образующей и находящейся под действием нагрузки $Q(x)$ и реакции „упругого основания" $\frac{2Ehw}{(1-\mu^2)a^2}$. Указанный смысл уравнения (13) позволяет составить соответствующее интегральное уравнение следующим образом.

Рассмотрим балку переменной жесткости $D\,ds$ (ds — ширина полоски), свободно опертую и находящуюся под действием силы, равной $1\cdot ds$, перпендикулярной к оси балки и приложенной в точке с координатой x. Обозначим радиальные перемещения, вызванные этой силой, через $v(\xi, x)$. Чтобы вызвать перемещения $v(\xi, x)$ в оболочке, надо, кроме единичной силы, приложить к балке-полоске реакцию упругого основания, равную $-\frac{2Ehv(\xi,x)}{(1-\mu^2)a^2}$. Применяя теперь теорему Бетти к действительным нагрузкам и нагрузкам, состоящим из единичной силы и упругой реакции, получим:

$$\int\limits_0^{2\pi R} w(x)\,ds=\int\limits_0^{2\pi R}\left[F+\frac{2Eh}{(1-\mu^2)a^2}\int\limits_0^l v(\xi,x)\,w(\xi)\,d\xi\right]ds, \tag{14}$$

где

$$F=\int\limits_0^l v(\xi,x)\,Q(\xi)\,d\xi$$

есть заданная функция.

Так как на основании свойств нагрузки можно предположить, что w не зависит от s, из (14) вытекает:

$$w=F+\frac{2Eh}{(1-\mu^2)a^2}\int\limits_0^l v(\xi,x)\,w(\xi)\,d\xi. \tag{14'}$$

Это уравнение имеет регулярное симметрическое ядро и может быть решено известными приемами.

Этот метод может быть уточнен определением реакции упругого основания из уравнений (1).

Функции $v(\xi, x)$ определяются из дифференциального уравнения:

$$D_1\frac{d^2v}{d\xi^2}=M(\xi,x),$$

где $M(\xi, x)$ — изгибающий момент в точке $N_1(\xi)$ от силы $1\cdot ds$, приложенной в точке $N_2(x)$, а $D_1=D\,ds$.

Поэтому

$$\frac{d^2}{d\xi^2}\left(D\frac{d^2v}{d\xi^2}\right)=0.$$

Последнее равенство имеет смысл всюду, за исключением точки $N_2(x)$. На этом основании составляющие реакции „упругого основания" будут иметь вид:

$$K^j_{(3)}=-L^j_{(3)}\left[v(\xi,x)\right].$$

Чтобы найти теперь перемещения $u_3=w$, заметим, что на основании условий симметрии $u_2=0$.

Для определения u_1, как и раньше, рассмотрим полоску шириной ds, к которой вдоль образующей в точке $N_2(x)$ приложена сила $1\cdot ds$. Соответствующие перемещения определяются без труда. Обозначим их через $u(\xi,x)$. Определяя ядро

$$K^j_{(1)}=-L^j_{(1)}(u)$$

и применяя теорему Бетти, получим, принимая во внимание, что искомые и заданные функции не зависят от координаты s (условие симметрии):

$$u_i=F_i-\int_0^l K^j_{(i)}\,u_j\,d\xi \qquad (i,j=1,2). \tag{7'}$$

Легко заметить, что все сказанное относительно симметричных деформаций круглых цилиндрических труб обобщается на симметричные деформации оболочек вращения.

Представим себе замкнутую оболочку вращения, опертую на контур, совпадающий с кривой пересечения оболочки с плоскостью, перпендикулярной к оси вращения. Обозначим переменный радиус вращения через $r(x)$, где x — длина дуги меридиана, отсчитываемая от вершины оболочки; эту длину выберем первой координатой точек срединной поверхности. Второй координатой будет угол долготы φ. Выделим из оболочки арку-полоску ширины $ds=r(x)\,d\varphi$ вдоль меридиана и нагрузим ее в симметричных точках, имеющих одинаковую координату x, силами, направленными по касательным к координатным линиям и равными по величине $r(x)\,d\varphi$ (в случае симметричных деформаций можно ограничиться силами, направленными по нормали к поверхности оболочки и по касательной к линии $\varphi=\text{const}$).

Обозначим перемещения точек арки-полоски, вызванные одновременным действием этих сил, через $v_{(i)}(\xi,x)$. Перемещения эти, очевидно, симметричны (вследствие симметрии вспомогательной нагрузки) и, следовательно, от угла φ не зависят.

Применяя теорему Бетти, найдем:

$$\begin{aligned}\int_0^{2\pi} u_i(x)\,r(x)\,d\varphi &= \int_0^{2\pi}\int_0^l Q^j(\xi)\,v_{(i)j}(\xi,x)\,r(\xi)\,d\xi\,d\varphi\,-\\ &-\int_0^{2\pi}\int_0^l K^j_{(i)}(\xi,x)\,u_j(\xi)\,r(\xi)\,d\xi\,d\varphi \qquad (i=1,3).\end{aligned} \tag{15}$$

Замечая, что подинтегральные выражения не зависят от φ, найдем:

$$w_i = F_i - \int_0^l K^j_{(i)}(\xi, x)\, w_j\, d\xi \qquad (i, j = 1, 3), \tag{15'}$$

где

$$w_i = u_i(x)\, r(x), \qquad F_i = \int_0^l Q^j(\xi)\, v_{(i)j}(\xi, x)\, r(\xi)\, d\xi.$$

Рассмотрим теперь оболочку вращения, находящуюся под действием асимметрической нагрузки.

Приложим к рассмотренной выше арке-полоске силу, направленную по касательной к i-ой координатной линии и равную по величине $e^{-ik\varphi} r(x)\, d\varphi$ (x, φ — координаты точки приложения силы). Перемещения, вызванные в арке этой силой, очевидно, выражаются следующим образом:

$$v'_{(i)j} = v_{(i)j}(\xi, x)\, e^{-ik\varphi} \qquad (i = \sqrt{-1}),$$

где функции $v_{(i)j}(\xi, x)$ имеют смысл, указанный выше.

Заметим, что при определении $v_{(2)j}$ следует выделенную полоску рассматривать не как арку, а как стержень малой жесткости, не воспринимающий действия изгибающих моментов; к этому стержню, кроме сосредоточенной силы, можно приложить распределенную нагрузку, обеспечивающую определенную форму его деформированной оси.

Выберем перемещения $v'_{(i)j}$ в качестве вспомогательных перемещений точек срединной поверхности оболочки. Применяя теорему Бетти, получим

$$\int_0^{2\pi} u_i(x, \varphi)\, r(x)\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi = \int_0^{2\pi}\int_0^l Q^j(\xi, \varphi)\, r(\xi)\, v_{(i)j}(\xi, x)\, e^{-ik\varphi}\, d\xi\, d\varphi -$$
$$- \int_0^{2\pi}\int_0^l K^j_{(i)}(\xi, x; k)\, u_j(\xi, \varphi)\, r(\xi)\, e^{-ik\varphi}\, d\varphi\, d\xi.$$

Откуда найдем:

$$w_{ik}(x) = F_{ik} - \int_0^l K^j_{(i)}(\xi, x; k)\, w_{ik}(\xi)\, d\xi. \tag{16}$$

Здесь нами обозначены через $w_{ik}(x)$ коэффициенты Фурье функции

$$w_i = u_i(x, \varphi)\, r(x).$$

Таким образом в этом случае мы имеем возможность построить ряд Фурье функции w_i и таким образом в случае равномерной сходимости этого ряда относительно переменной φ найти решение задачи.

Значительно большие затруднения представляют те задачи, в которых ядро $K^j_{(i)}$ зависит от φ. Это имеет место в случае куполов более общего типа, чем оболочки вращения, а также при условиях на контуре, являющихся функциями от φ.

В этом случае будем искать решение в форме ряда $\sum u_{ik}(x)e^{-ik\varphi}$. Приложим к арке-полоске силу, равную $R(x,\varphi)e^{-ik\varphi}d\varphi$. Применяя теорему Бетти, получим:

$$\int_0^{2\pi} u_{ik}(x)R(x,\varphi)\,d\varphi+\cdots=\int_0^{2\pi}\int_0^l Q^j(\xi,\varphi)R(\xi,\varphi)v_{(i)j}(\xi,x,\varphi)e^{-ik\varphi}\,d\xi\,d\varphi-$$

$$-\int_0^{2\pi}\int_0^l K^j_{(i)}(\xi,x,\varphi;k)u_{jk}(\xi)R(\xi,\varphi)\,d\varphi\,d\xi+\cdots,$$

откуда

$$u_{ik}(x)=F_{ik}-\int_0^l \overline{K}^j_{(i)}(\xi,x;k)u_{jk}(\xi)\,d\xi+\cdots, \tag{17}$$

где

$$R(x,\varphi)=\sqrt{r^2(x,\varphi)+\left[\frac{\partial r(x,\varphi)}{\partial\varphi}\right]^2},\qquad \overline{K}^j_{(i)}=\frac{\int_0^{2\pi} K^j_{(i)}(\xi,x,\varphi;k)R(\xi,\varphi)\,d\varphi}{\int_0^{2\pi} R(x,\varphi)\,d\varphi}.$$

В случае оболочки, мало отличающейся от оболочки вращения, можно применить метод последовательных приближений, отбрасывая для получения первого приближения все члены ряда, стоящего в правой части уравнения (17). В более общих случаях удобнее искать разложение перемещений u_i по некоторым ортогональным функциям $f_k(\varphi)$, отличающимся от круговых. Построение этих функций мы рассчитываем рассмотреть в следующей работе.

Общее решение можно представить в форме ряда $\sum u_{ik}(x)f_k(\varphi)$. Вопрос о сходимости этого ряда нуждается в отдельном исследовании.

Все вышеизложенное относится к тем случаям, когда условия заделки края оболочки выражаются равенствами нулю четырех функций из общего числа восьми, входящих в выражение виртуальных работ сил и моментов, приложенных к краю срединной поверхности. Как известно, этот случай встречается наиболее часто.

В более общих случаях приходится вводить дополнительные вспомогательные перемещения $v'_{(i)j}$, о которых шла речь в § 2 при выводе уравнений (7).

Точно так же дополнительные вспомогательные перемещения приходится вводить при расчете цилиндрической оболочки-свода.

В заключение заметим, что весь указанный способ замены ядер может быть охарактеризован как метод, основанный на применении функций влияния, определяемых для простейших упругих систем при помощи упрощенных методов сопротивления материалов (или в более сложных задачах при помощи теории упругости).

Применение этих функций влияния приводит во многих практически важных случаях (оболочки вращения, цилиндрические оболочки) к интегральным уравнениям с ядрами, имеющими особенности в точке $\xi=x$, но позволяющими их дальнейшую замену алгебраическими ядрами после несложных вычислений (если оставаться в пределах точности теории оболочек Лява). Это ясно видно из приведенных примеров.

В этих случаях метод интегральных уравнений оказывается особенно эффективным.

В этом отношении наш метод примыкает к известным практическим методам расчета оболочек, разработанным рядом авторов (И. Я. Штаерманом, Финстервальдером, Дишингером, Геккелером, А. Гвоздевым, П. Пастернаком, В. Власовым и др.), оставляя в то же время возможность учета изгибающих и крутящих моментов с любой степенью точности.

Поступила в редакцию 5 X 1939.
Доложена на Всесоюзном совещании
по строительной механике
в Институте механики Акад. Наук СССР
(22—26 XI 1939).

Институт математики
Акад. Наук УССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв. Математическая теория упругости.
2. Штаерман И. Я., проф. Основные идеи современной теории куполов и сводов. „Труды Всесоюзной конференции по бетону и железобетону". 1932.
3. Steuermann E., Prof.-Dr. Berechnung der Kuppeln als Bogen auf elastischer Unterlage. „Der Bauingenieur". 1933. H. 21-22.

ON THE INTEGRATION OF EQUATIONS OF THE THEORY OF SHELLS

N. A. KILCHEVSKY

(Summary)

The treatment of fundamental boundary problems of the theory of shells is reduced in this paper to a system of Fredholm's integral equations of the second type with regular nuclei. This reduction may be obtained by the application of Beatty' theorem. The system of integral equations obtained is equivalent to the elasto-static system of differential equations and the boundary conditions.

Hence new possibilities arise for general investigations of boundary problems of the theory of shells as well as for effective calculations of special, and yet sufficiently general cases.

By constructing the particular solutions of equations of the theory of elasticity corresponding to local disturbances, the nuclei for the integral equations can be formed having finite values in the small domain about a point on the middle surface, and infinitesimal values outside this domain. The dimensions of this domain are of the order of the thickness of the shell.

The introduction to the investigation of such nuclei permits the limiting of the investigation by the above-mentioned domain.

By applying certain method of approximation of functions (for example, the method of minimal quadratics) to the solution of integral equations with a limited domain of integration, the displacement in the neighborhood of a point on the middle surface may be obtained.

The method of minimal quadratics results in the general procedure for finding the sequential approximate solutions of the basic system of integral equations.

This process will be convergent in all cases, when the system of integral equations under consideration has solutions.