АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 2, 1940

УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК

А. Л. ГОЛЬДЕНВЕЙЗЕР

(Москва)

Целью работы является некоторый пересмотр общих уравнений теории тонких оболочек, данных Лявом, и вывод их другими методами. Как известно, Ляв в своей теории не дает уравнений, аналогичных уравнениям неразрывности деформаций общей задачи теории упругости. Поэтому если ограничиться формулами Лява, то уравнения теории тонких оболочек приходится решать лишь в перемещениях. Ниже мы покажем, что соотношения Лява могут быть дополнены некоторыми новыми.

1. Статические уравнения

Предполагая, что поверхность задана в гауссовых координатах в линиях кривизны, будем пользоваться обозначениями: $\mathbf{M}=\mathbf{M}(\alpha, \beta)$ — уравнение поверхности; $\alpha=\text{const}$ и $\beta=\text{const}$ — линии кривизны, $\mathbf{M}_\alpha$, $\mathbf{M}_\beta$, $\mathbf{M}_{\alpha\alpha}$, $\mathbf{M}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{M}_{\beta\beta}$ — частные производные, по переменным, указанным в индексах; R_1 и R_2 — главные радиусы кривизны, соответствующие линиям $\beta=\text{const}$ и $\alpha=\text{const}$; $\mathbf{M}_\alpha{}^2=A^2$, $\mathbf{M}_\beta{}^2=B^2$; $\mathbf{n}$ — единичный вектор нормали; L, N — коэффициенты второй квадратичной формы.

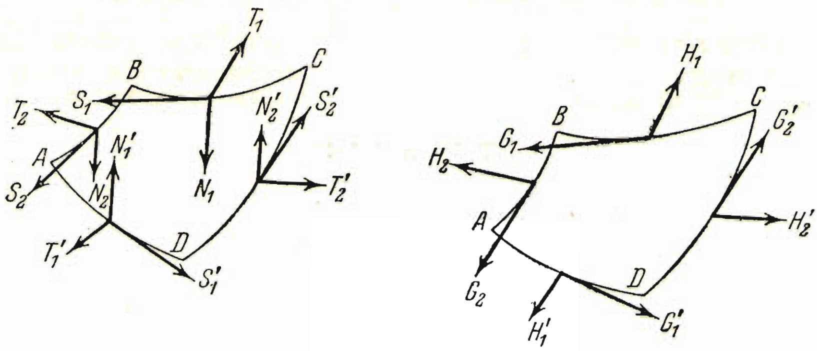
Пусть, кроме внешней нагрузки на сколь угодно малый координатный четырехугольник, выделенный из срединной поверхности линиями α, $\alpha+\delta\alpha$, β, $\beta+\delta\beta$, действуют силы и моменты, для которых, следуя Ляву, приняты обозначения, указанные на фиг. 1.

Равнодействующие всех внутренних сил, действующих на сторонах AB и BC, будут соответственно:

$$\mathbf{R}^{(\alpha)}=\frac{1}{A}S_2\mathbf{M}_\alpha-\frac{1}{B}T_2\mathbf{M}_\beta+N_2\mathbf{n},\quad \mathbf{R}^{(\beta)}=-\frac{1}{A}T_1\mathbf{M}_\alpha-\frac{1}{B}S_1\mathbf{M}_\beta+N_1\mathbf{n}.$$

Внешняя нагрузка может быть представлена вектором:

$$\mathbf{P}=AB\,d\alpha\,d\beta\left(\frac{1}{A}X\mathbf{M}_\alpha+\frac{1}{B}Y\mathbf{M}_\beta-Z\mathbf{n}\right).$$



Фиг. 1.

Суммируя все силы, действующие на элемент $ABCD$, и отбрасывая величины третьего порядка малости, получим:

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}(\mathbf{R}^{(\alpha)}A)-\frac{\partial}{\partial\alpha}(\mathbf{R}^{(\beta)}B)+\mathbf{P}=0,$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(S_2\,\mathbf{M}_\alpha-\frac{A}{B}T_2\,\mathbf{M}_\beta+AN_2\,\mathbf{n}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}T_1\,\mathbf{M}_\alpha+S_1\,\mathbf{M}_\beta-BN_1\,\mathbf{n}\right)-$$
$$-AB\left(\frac{1}{A}X\mathbf{M}_\alpha+\frac{1}{B}Y\mathbf{M}_\beta-Z\mathbf{n}\right)=0. \tag{1}$$

Обозначая векторами $\mathbf{Q}^{(\alpha)}$ и $\mathbf{Q}^{(\beta)}$ моменты, которые создают относительно начала координат внутренние силы и моменты, развивающиеся соответственно на срезах α и β, имеем:

$$\mathbf{Q}^{(\alpha)}=\left(\frac{1}{A}S_2\,\mathbf{M}_\alpha-\frac{1}{B}T_2\,\mathbf{M}_\beta+N_2\,\mathbf{n}\right)\times\mathbf{M}-\frac{1}{B}H_2\,\mathbf{M}_\beta+\frac{1}{A}G_2\,\mathbf{M}_\alpha;$$
$$\mathbf{Q}^{(\beta)}=\left(-\frac{1}{A}T_1\,\mathbf{M}_\alpha-\frac{1}{B}S_1\,\mathbf{M}_\beta+N_1\,\mathbf{n}\right)\times\mathbf{M}-\frac{1}{A}H_1\,\mathbf{M}_\alpha-\frac{1}{B}G_1\,\mathbf{M}_\beta.$$

Момент от внешних сил будет:

$$\mathbf{Q}=AB\,d\alpha\,d\beta\left(\frac{1}{A}X\mathbf{M}_\alpha+\frac{1}{B}Y\mathbf{M}_\beta-Z\mathbf{n}\right)\times\mathbf{M}.$$

Выражение для моментов от всех сил

$$-\frac{\partial}{\partial\beta}(A\mathbf{Q}^{(\alpha)})-\frac{\partial}{\partial\alpha}(B\mathbf{Q}^{(\beta)})+\mathbf{Q}=0$$

после подстановки $\mathbf{Q}^{(\alpha)}$, $\mathbf{Q}^{(\beta)}$, $\mathbf{Q}$ и упрощений при помощи (1) легко привести к виду:

$$-\frac{1}{A}ABN_2\,\mathbf{M}_\alpha+\frac{1}{B}ABN_1\,\mathbf{M}_\beta+AB(S_1+S_2)\,\mathbf{n}+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\beta}\left(G_2\,\mathbf{M}_\alpha-\frac{A}{B}H_2\,\mathbf{M}_\beta\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}H_1\,\mathbf{M}_\alpha+G_1\,\mathbf{M}_\beta\right)=0, \tag{2}$$

или

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(G_2\,\mathbf{M}_\alpha-\frac{A}{B}H_2\,\mathbf{M}_\beta+AR_2\,N_1\,\mathbf{n}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}H_1\,\mathbf{M}_\alpha+G_1\,\mathbf{M}_\beta+BR_1\,N_2\,\mathbf{n}\right)+$$
$$+\left[AB(S_1+S_2)+\frac{\partial(BR_1\,N_2)}{\partial\alpha}-\frac{\partial(AR_2\,N_1)}{\partial\beta}\right]\mathbf{n}. \tag{2'}$$

Векторные уравнения (1) и (2) или (2′) эквивалентны шести уравнениям равновесия, данным Лявом. Чтобы убедиться в этом, достаточно раскрыть в (1) и (2) скобки и выразить $\mathbf{M}_{\alpha\alpha}$, $\mathbf{M}_{\alpha\beta}$, $\mathbf{M}_{\beta\beta}$, $\mathbf{n}_\alpha$, $\mathbf{n}_\beta$ через $\mathbf{M}_\alpha$, $\mathbf{M}_\beta$, $\mathbf{n}$ по известным формулам теории поверхностей. Приравнивая после этого в обоих равенствах коэффициенты при $\mathbf{M}_\alpha$, $\mathbf{M}_\beta$ и $\mathbf{n}$ нулю, в зависимости от того, какие при этом были использованы формулы, получим уравнения в тех или иных криволинейных координатах; для линий кривизны они получатся в форме, приведенной у Лява.

Уравнения (1) и (2) допускают образование четырех функций напряжения, аналогичных функциям напряжения плоской задачи (функции Эри). Другими словами, можно доказать, что в теории тонких оболочек все усилия могут быть выражены в виде линейных комбинаций четырех функций и их частных производных, так что все однородные уравнения равновесия тождественно удовлетворятся, какими бы ни были эти четыре функции (предполагая, конечно, что они дифференцируемы нужное число раз).

Для доказательства полагаем: $X=Y=Z=0$.

Тогда соотношение (1) показывает, что каким бы ни был вектор $\mathbf{L}$, можно считать, что

$$S_2\mathbf{M}_\alpha-\frac{A}{B}T_2\mathbf{M}_\beta+AN_2\mathbf{n}=\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\alpha},\quad \frac{B}{A}T_1\mathbf{M}_\alpha+S_1\mathbf{M}_\beta-BN_1\mathbf{n}=\frac{\partial\mathbf{L}}{\partial\beta}. \tag{3}$$

Полагая

$$\mathbf{L}=\frac{\varphi}{A}\mathbf{M}_\alpha+\frac{\psi}{B}\mathbf{M}_\beta-\chi\mathbf{n},$$

где φ, ψ и χ — произвольные функции, из уравнений (3) получим в линиях кривизны:

$$\begin{aligned}
S_1&=\frac{1}{B}\frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\varphi-\frac{\chi}{R_2},\quad & T_1&=\frac{1}{B}\frac{\partial\varphi}{\partial\beta}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\psi,\quad & N_1&=\frac{\psi}{R_2}+\frac{1}{B}\frac{\partial\chi}{\partial\beta},\\
S_2&=\frac{1}{A}\frac{\partial\varphi}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\psi-\frac{\chi}{R_1},\quad & T_2&=\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\varphi-\frac{1}{A}\frac{\partial\psi}{\partial\alpha},\quad & N_2&=-\frac{\varphi}{R_1}-\frac{1}{A}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha}.
\end{aligned} \tag{4}$$

Полагая временно $\chi=0$, подставляем N_1, N_2, S_1, S_2 в уравнение (2′), получим:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(G_2\mathbf{M}_\alpha-\frac{A}{B}H_2\mathbf{M}_\beta+A\psi\mathbf{n}\right)-\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}H_1\mathbf{M}_\alpha+G_1\mathbf{M}_\beta-B\varphi\mathbf{n}\right)=0.$$

По аналогии с (1) можно сразу написать:

$$\begin{aligned}
H_1&=\frac{1}{B}\frac{\partial a}{\partial\beta}-\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}b,\quad & G_1&=\frac{1}{B}\frac{\partial b}{\partial\beta}+\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}a-\frac{c}{R_2},\quad & \varphi&=\frac{b}{R_2}+\frac{1}{B}\frac{\partial c}{\partial\beta},\\
H_2&=\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}a-\frac{1}{A}\frac{\partial b}{\partial\alpha},\quad & G_2&=\frac{1}{A}\frac{\partial a}{\partial\alpha}+\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}b-\frac{c}{R_1},\quad & \psi&=-\frac{a}{R_1}-\frac{1}{A}\frac{\partial c}{\partial\alpha}.
\end{aligned} \tag{5}$$

Полагая теперь $\varphi=\psi=0$, нетрудно проверить, что

$$H_1=H_2=\chi,\qquad G_1=G_2=0 \tag{6}$$

удовлетворяют уравнению (2).

Так как уравнение (2) линейное, то сумма решений удовлетворяет (2) при любых функциях φ, ψ и χ.

Заменяя φ и ψ в формулах (4) при помощи (5), получим окончательные формулы теории тонких оболочек, выражающие внутренние усилия, при помощи четырех функций a, b, c и χ, которые можно назвать функциями напряжения:

$$S_1 = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{a}{R_1}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial c}{\partial\beta} + \frac{b}{R_2}\right) - \frac{\chi}{R_2},$$

$$S_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial c}{\partial\beta} + \frac{b}{R_2}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{a}{R_1}\right) - \frac{\chi}{R_1},$$

$$T_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial c}{\partial\beta} + \frac{b}{R_2}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{a}{R_1}\right),$$

$$T_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{a}{R_1}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial c}{\partial\beta} + \frac{b}{R_2}\right), \tag{7}$$

$$N_1 = -\frac{a}{R_1 R_2} - \frac{1}{AR_2}\frac{\partial c}{\partial\alpha} + \frac{1}{B}\frac{\partial\chi}{\partial\beta}, \qquad N_2 = -\frac{b}{R_1 R_2} - \frac{1}{BR_1}\frac{\partial c}{\partial\beta} - \frac{1}{A}\frac{\partial\chi}{\partial\alpha},$$

$$H_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial a}{\partial\beta} - \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}b + \chi, \qquad H_2 = \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}a - \frac{1}{A}\frac{\partial b}{\partial\alpha} + \chi,$$

$$G_1 = \frac{1}{B}\frac{\partial b}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}a - \frac{c}{R_2}, \qquad G_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial a}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}b - \frac{c}{R_1}.$$

Заметим, что при $A = B = 1$ и $R_1 = R_2 = \infty$ функция c обращается в известную функцию напряжения плоской задачи.

2. Геометрические соотношения

Всякая деформация срединной поверхности может быть задана при помощи шести функций, которые можно называть компонентами деформации. Пусть

$$A'^2\,d\alpha^2 + 2A'B'\cos\chi'\,d\alpha\,d\beta + B'^2\,d\beta^2, \quad L'\,d\alpha^2 + 2M'\,d\alpha\,d\beta + N'\,d\beta^2$$

соответственно первая и вторая квадратичные формы деформированной поверхности, тогда компоненты деформации могут быть заданы так:

$$\begin{aligned} &\varepsilon_1 = A' - A, && \omega = \cos\chi', && \varkappa_1 = -\frac{L'}{A'^2} + \frac{L}{A^2}(1 - \varepsilon_1), \\ &\varepsilon_2 = B' - B, && \tau = \frac{M'}{A'B'}, && \varkappa_2 = -\frac{N'}{B'^2} + \frac{N}{B^2}(1 - \varepsilon_2). \end{aligned} \tag{8}$$

Эти шесть компонент деформации совпадают с введенными Лявом (исключение представляет τ, которое Ляв ошибочно вводит таким образом, что оно оказывается несимметричным).

Соотношениями (8) можно воспользоваться, чтобы выразить коэффициенты первой и второй квадратичной формы деформированной поверхности через A, B, L, N и шесть компонент деформации. Внося полученный результат в уравнения Кодацци-Гаусса, после упрощений получим:

$$\frac{1}{R_2}\left[B\frac{\partial\omega}{\partial\alpha} - A\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega\right] + \frac{1}{R_1}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega -$$
$$- \left[-A\frac{\partial\varkappa_1}{\partial\beta} + B\frac{\partial\tau}{\partial\alpha} - \frac{\partial A}{\partial\beta}(\varkappa_1 - \varkappa_2) + 2\frac{\partial B}{\partial\alpha}\tau\right] = 0,$$

$$\frac{1}{R_1}\left[A\frac{\partial\omega}{\partial\beta} - B\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{\partial A}{\partial\beta}\omega\right] + \frac{1}{R_2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\omega -$$
$$- \left[-B\frac{\partial\varkappa_2}{\partial\alpha} + A\frac{\partial\tau}{\partial\beta} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}(\varkappa_2 - \varkappa_1) + 2\frac{\partial A}{\partial\beta}\tau\right] = 0,$$

$$\frac{\varkappa_1}{R_2} + \frac{\varkappa_2}{R_1} - \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\beta}\left\{\frac{1}{B}\left[B\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{\omega}{2}\right) - A\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta} - \frac{\partial A}{\partial\beta}(\varepsilon_1 - \varepsilon_2) + \frac{\partial B}{\partial\alpha}\omega\right]\right\} -$$
$$- \frac{1}{AB}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left\{\frac{1}{A}\left[A\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{\omega}{2}\right) - B\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha} - \frac{\partial B}{\partial\alpha}(\varepsilon_2 - \varepsilon_1) + \frac{\partial A}{\partial\beta}\omega\right]\right\} = 0.$$

Эти уравнения вполне аналогичны уравнениям Сан-Венана и могут быть поэтому названы условиями неразрывности деформации теории тонких оболочек[1]. Название представляется законным, в частности, потому, что при

$$R_1 = R_2 = \infty \quad \text{и} \quad A = B = 1$$

выведенные равенства превращаются в уравнения неразрывности деформаций изгиба пластинки и плоской задачи. Необходимо также отметить, что уравнениями неразрывности деформаций можно воспользоваться для определения температурных напряжений[2] (при этом уравнения неразрывности становятся неоднородными).

Соотношениям, связывающим деформации срединной поверхности, можно придать вид, аналогичный уравнениям равновесия; введем для этого еще шесть следующих величин: ω_1, ω_2 — соответственно углы между линиями α и β на деформированной и недеформированной поверхности (так что $\omega_2 - \omega_1 = \omega$); γ_1, γ_2 — углы между α и β линиями деформированной поверхности и нормалью к недеформированной поверхности; наконец, τ_1, τ_2 — величины, определяемые формулами:

$$\tau_1 = \tau - \frac{\omega_2}{R_1}, \quad \tau_2 = -\left(\tau + \frac{\omega_1}{R_2}\right).$$

Пусть u, v, w обозначают проекции смещения на касательные к линиям α и β и на внутреннюю нормаль; тогда все введенные величины можно выразить через u, v, w и их производные. Получим[3]:

$$\begin{gathered}
\varkappa_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}\right),\\
\varkappa_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}\right),\\
\tau_2 = -\frac{1}{B}\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}\right) + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}\right),\\
\tau_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta} + \frac{v}{R_2}\right) - \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha} + \frac{u}{R_1}\right),\\
\frac{1}{R_2}\gamma_1 = -\frac{1}{AR_2}\frac{\partial w}{\partial\alpha} - \frac{u}{R_1R_2}, \qquad \frac{1}{R_1}\gamma_2 = -\frac{1}{BR_1}\frac{\partial w}{\partial\beta} - \frac{v}{R_1R_2},\\
\omega_1 = \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}u - \frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}, \qquad \omega_2 = -\frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}v + \frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta},\\
\varepsilon_1 = \frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha} + \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}v - \frac{w}{R_1}, \qquad \varepsilon_2 = \frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta} + \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}u - \frac{w}{R_2}.
\end{gathered} \tag{9}$$

Сравнивая (9) и (7), нетрудно заметить, что если положить $\chi = 0$, то величины S_1, S_2, T_1, T_2, N_1, N_2, G_1, G_2, H_1, H_2 так же выражаются через a, b и c, как соответственно величины τ_2, τ_1, $\varkappa_2$, $\varkappa_1$, γ_1/R_2, γ_2/R_1, ε_2, ε_1, ω_2, ω_1 выражаются через u, v и w.

---

[1] Этот результат автором доложен совету Центрального научно-исследовательского института промышленных сооружений в 1937 г.

[2] Вопрос автором разобран в кандидатской диссертации „Уравнения неразрывности деформаций теории тонких оболочек", представленной Институту механики Московского университета 1 октября 1939 г.

[3] Подробный вывод этих соотношений см. в работе автора [1].

Однородные уравнения (1) и (2') удовлетворяются при любых a, b, c и χ, следовательно, будут удовлетворяться и векторные уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\tau_1 \mathbf{M}_\alpha - \frac{A}{B}\varkappa_1 \mathbf{M}_\beta + A\frac{\gamma_2}{R_1}\mathbf{n}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\varkappa_2 \mathbf{M}_\alpha + \tau_2 \mathbf{M}_\beta - B\frac{\gamma_1}{R_2}\mathbf{n}\right) = 0, \quad (10)$$

$$\frac{\partial}{\partial\beta}\left(\varepsilon_1 \mathbf{M}_\alpha - \frac{A}{B}\omega_1 \mathbf{M}_\beta + A\gamma_1 \mathbf{n}\right) - \frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{B}{A}\omega_2 \mathbf{M}_\alpha + \varepsilon_2 \mathbf{M}_\beta + B\gamma_2 \mathbf{n}\right) + \left[AB(\tau_1+\tau_2) - \frac{\partial}{\partial\beta}(A\gamma_1) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(B\gamma_2)\right]\mathbf{n} = 0. \quad (11)$$

Кроме того, легко проверить, что тождественно удовлетворяется и уравнение:

$$AB(\tau_1+\tau_2) - \frac{\partial}{\partial\beta}(A\gamma_1) + \frac{\partial}{\partial\alpha}(B\gamma_2) = 0. \quad (12)$$

Можно было бы утверждать, что между задачей об отыскании внутренних усилий, удовлетворяющих всем уравнениям равновесия, и задачей об отыскании деформаций и угловых перемещений существует полная аналогия, если бы геометрические факторы не удовлетворяли дополнительному уравнению (12) или если бы $\chi = 0$.

3. Связь между деформациями и усилиями

В пределах допущений теории упругости выведенные уравнения могут считаться точными, так как для их разыскания не было нужды в пользовании дополнительными упрощающими допущениями. Для дальнейшего построения теории тонких оболочек необходимо ввести некоторые гипотезы. Так как надо связать деформации срединной поверхности с равнодействующими усилий, распределенных на конечной толщине оболочки, то закон Гука оказывается недостаточным. Ляв принимает фундаментальную для всей теории тонких оболочек гипотезу Кирхгофа о том, что прямолинейное волокно, перпендикулярное к срединной плоскости до деформации, остается после деформации прямым и перпендикулярным к срединной поверхности (гипотеза о линейном распределении деформаций).

Эта дополнительная гипотеза может быть заменена и другой, например, гипотезой о линейности распределения напряжений по толщине оболочки, и в зависимости от этого можно выводить те или иные формулы, связывающие усилия с деформациями.

Не касаясь вопроса о выборе дополнительного допущения, мы положим, что тем или иным способом восемь внутренних усилий T_1, T_2, S_1, S_2, G_1, G_2, H_1, H_2 выражены линейно через шесть компонент деформаций.

Тогда шесть из этих соотношений можно разрешить относительно компонент деформации, а в оставшихся исключить деформации и получить два дополнительных линейных недифференциальных соотношения, связывающих усилия.

Таким образом оказывается, что для определения десяти внутренних усилий получается шесть уравнений равновесия, три уравнения неразрывности деформаций (их можно выразить в усилиях) и два дополнительных недифференциальных соотношения.

Противоречие между числом уравнений и числом неизвестных устраняется, если одно из дополнительных соотношений будет повторять шестое уравнение равновесия [коэффициент при n в уравнении (2')], которое также недифференциальное.

В этом случае мы будем иметь, не считая уравнений неразрывности деформаций, семь уравнений в усилиях.

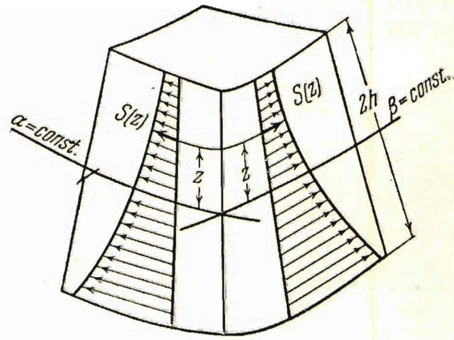
Установив тем или иным способом дополнительное недифференциальное соотношение, мы при его помощи можем определить χ через a, b и c.

Распоряжаясь статическими и геометрическими уравнениями и соотношениями между деформациями и усилиями, можно получить полную систему уравнений теории тонких оболочек одним из трех способов:

1) Исключив χ в уравнениях (7), подставить усилия в уравнения неразрывности деформаций, что даст три уравнения относительно трех функций напряжений.

2) В уравнениях равновесия заменить усилия через деформации, а деформации через перемещения. Это свяжет три компонента перемещения тремя уравнениями.

3) Выразить каждое из усилий через три компонента перемещений и приравнять эти выражения тем же усилиям, выраженным через функции напряжений. Это даст шесть уравнений с шестью неизвестными функциями.



Фиг. 2.

Что касается вышеупомянутого дополнительного соотношения, то проф. В. З. Власов указал нам, что его можно получить и из чисто статических соображений, пользуясь тем, что шесть уравнений равновесия не обеспечивают парности касательных усилий во всех точках по толщине оболочки.

Рассмотрим элемент оболочки, не отвлекаясь от его толщины, и обозначим через $S(z)$ показанное на фиг. 2 сдвигающее усилие. Тогда если положить

$$S(\alpha, \beta, z) = [f_1(z) + f_2(z)]\, g(\alpha, \beta),$$

где $f_1(z)$ — произвольная нечетная функция, а $f_2(z)$ — произвольная четная функция, то $S(z)$ связывается с величинами S_1, S_2, H_1, H_2 формулами:

$$S_1 = \left[\frac{1}{R_2}\int_{-h}^{+h} z f_1(z)\, dz + \int_{-h}^{+h} f_2(z)\, dz\right] g, \quad S_2 = \left[-\frac{1}{R_1}\int_{-h}^{+h} z f_1(z)\, dz - \int_{-h}^{+h} f_2(z)\, dz\right] g,$$

$$H_1 = \left[\int_{-h}^{+h} z f_1(z)\, dz + \frac{1}{R_2}\int_{-h}^{+h} z^2 f_2(z)\, dz\right] g, \quad H_2 = \left[-\int_{-h}^{+h} z f_1(z)\, dz - \frac{1}{R_1}\int_{-h}^{+h} z^2 f_2(z)\, dz\right] g.$$

Иэ этих равенств получается:

$$S_1+S_2+\frac{H_1}{R_1}+\frac{H_2}{R_2}=0, \qquad \nu\left(\frac{S_1}{R_1}+\frac{S_2}{R_2}\right)+H_1+H_2=0, \tag{13}$$

где

$$\nu=\frac{\int\limits_{-h}^{+h} z^2 f_2(z)\,dz}{\int\limits_{-h}^{+h} f_2(z)\,dz}.$$

Второе уравнение (12) и есть дополнительное соотношение, в то время как первое повторяет шестое уравнение равновесия. Если, в частности, принять гипотезу, что напряжения меняются по толщине оболочки по линейному закону, то $\nu=h^2/3$.

Поступила в редакцию
15 XI 1939.

Доложена на Всесоюзном совещании
по строительной механике
в Институте механики Акад. Наук Союза ССР
(22—26 XI 1939).

ЛИТЕРАТУРА

1. Гольденвейзер А. Л. Дополнения и поправки к теории оболочек Лява. Сб. „Пластинки и оболочки". Госстройиздат. 1939. [Стр. 99].

EQUATIONS OF THE THEORY OF THIN SHELLS

A. L. GOLDENWEISER

(Summary)

This article is devoted to a review of the theory of thin shells which was deduced by Love. The questions are considered from the static and the geometrical points of view. The equations of equilibrium in vector form are deduced in terms of lines of curvature. This permits of easy expressions for all the internal forces of the shell by means of four arbitrary functions and their derivatives in such a manner, that all the equations (homogeneous) of the equilibrium are satisfied identically.

When considering the bending of the shell the dependence of strain and angle displacements on its linear displacements is deduced, a formula for the deformation of τ is deduced which differs from that deduced by Love.

By means of Codazzi-Gauss's conditions three equations are obtained for the deformations. These equations are called "strain-continuity equations". The strain continuity equations of plane stress are a particular case of those mentioned above.

The geometrical relations are given a form in which the analogy between the geometrical and static equations of the theory of thin shells becomes clear