АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
INSTITUTE OF MECHANICS

ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА“
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 2, 1940

О ПРИМЕНЕНИИ ЭФФЕКТИВНЫХ МЕТОДОВ КОНФОРМНОГО ОТОБРАЖЕНИЯ К РЕШЕНИЮ ОДНОЙ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ СТЕРЖНЕЙ

Д. Б. ТОПОЛЯНСКИЙ

(Киев)

Как известно [1], задача об изгибе поперечной силой приводится к задаче Неймана относительно так называемой функции изгиба χ, гармонической в данной области, нормальная производная которой на контуре будет:

$$\frac{d\chi}{dn} = -\left[\frac{1}{2}\nu x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\nu\right)y^2\right]\cos(n, x) - (2+\nu)\,xy\cos(ny), \tag{1}$$

где n — внешняя нормаль к контуру области, ν — коэффициент Пуассона, или, если ввести комплексную функцию изгиба

$$X = \chi + i\chi',$$

к задаче Дирихле относительно сопряженной гармонической функции χ' с контурным условием

$$\chi' = -\left(1-\frac{1}{2}\nu\right)\frac{y^3}{3} - \nu x^2\frac{y}{2} + 2(1+\nu)\int xy\,dx \tag{2}$$

(произвольная постоянная отброшена).

Н. И. Мусхелишвили [1] применил для решения этой задачи метод конформного отображения. Так как точные отображающие функции известны лишь для немногих поперечных контуров, то при решении задач об изгибе стержней существенным является применение эффективных методов конформного отображения, в частности, метода Л. В. Канторовича.

Одним из преимуществ эффективных методов конформного отображения является то, что, решая задачу об изгибе стержней приближенно, можно определить, для какого контура, близкого к данному, фактически решена задача.

Пользуясь тем, что функцию, голоморфную внутри единичного круга, можно найти по контурному условию ее действительной части, получим комплексную функцию изгиба в случае односвязного сечения в виде $X(z) = \tau(\zeta)$, причем

$$\tau(\zeta) = \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{\left(1-\frac{\nu}{2}\right)\frac{(\omega-\overline{\omega})^3}{3} - \frac{\nu}{2}(\omega+\overline{\omega})^2(\omega-\overline{\omega}) + 2(1+\nu)\int\limits_{\sigma}(\omega^2-\overline{\omega}^2)(d\omega+d\overline{\omega})}{\sigma-\zeta}\,d\sigma + c, \tag{3}$$

или

$$\tau(\zeta) = \frac{1}{4}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{k\omega^3 - \omega^2\overline{\omega} + \overline{\omega}^2\omega - k\overline{\omega}^3 + 2(1+\nu)\int\limits_{\sigma}(\omega^2-\overline{\omega}^2)(d\omega+d\overline{\omega})}{\sigma-\zeta}\,d\sigma + c, \tag{4}$$

где $Z=\omega(\zeta)$ есть функция, отображающая данную область S на круг $|\zeta|\leqslant 1$ (γ его окружность), а $k=(1-2\nu)/3$.

При приближенном решении задачи строится приближенное выражение функции, отображающей область S на круг единичного радиуса.

В качестве примера приведем приближенное выражение функции изгиба для эллиптического поперечного сечения и сравним его с известным точным решением.

Возьмем, следуя Л. В. Канторовичу [2], такое приближенное выражение функции (исправив вкравшуюся опечатку на стр. 334), отображающей внутренность эллипса

$$3x^2+5y^2-4=0 \tag{5}$$

на круг единичного радиуса ($|\zeta|\leqslant 1$):

$$Z \backsimeq 0.99\,(\zeta+0.12\zeta^3+0.03\zeta^5+0.01\zeta^7). \tag{6}$$

После всех вычислений, отбросив члены со степенями ζ выше третьей, которые имеют очень малые коэффициенты, получим приближенное выражение для функции изгиба:

$$\chi \backsimeq -(0.96+0.73\nu)\,x+(0.22-0.04\nu)\,(x^3-3xy^2). \tag{7}$$

Точное выражение, как известно, будет:

$$\chi=-\left(\frac{26}{27}+\frac{20}{27}\nu\right)x+\left(\frac{13}{54}+\frac{1}{54}\nu\right)(x^3-3xy^2). \tag{8}$$

Поступила в редакцию 24 XI 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1. Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости. Изд. Акад. Наук СССР. 1933.
2. Канторович Л. В. и Крылов В. И. Методы приближенного решения уравнений в частных производных. 1936.

APPLICATION OF CONFORMAL REPRESENTATION TO THE PARTICULAR PROBLEM OF BENDING OF A BAR

D. B. TOPOLIANSKY

(Summary)

The author shows by using the special example of a bar with elliptical cross-section (5), that the approximate expression (6) of the function transforming the internal area of the ellipse onto a circle of unit radius results in the approximate expression for the function of bending (8) which is very close to the exact function.

This computation by conformal representation[2] permits us to determine the contour for which the solution obtained is exact.
