АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 2, 1940

# К ВОПРОСУ О КРУЧЕНИИ ПРИЗМАТИЧЕСКОГО СТЕРЖНЯ СИЛАМИ, РАСПРЕДЕЛЕННЫМИ ПО ЕГО БОКОВОЙ ПОВЕРХНОСТИ

П. М. РИЗ

(Москва)

В работе Н. В. Зволинского и моей [1] рассмотрен вопрос о кручении силами, распределенными по поверхности и создающими некоторый крутящий момент. В настоящей заметке я хочу указать на возможность осуществить деформацию кручения призматического стержня осевыми силами, распределенными на боковой поверхности и, разумеется, не создающими никакого крутящего момента.

Пусть компоненты поверхностных сил будут:

$$\overline{X}=0,\quad \overline{Y}=0,\quad \overline{Z}=k\,(y\cos nx - x\cos ny),$$

где $\cos nx$ и $\cos ny$ — направляющие косинусы нормали к боковой поверхности.

Легко проверить, что приложенная система сил в каждом сечении статически эквивалентна нулю (следует иметь в виду, что начало координат выбрано в центре тяжести одного из поперечных сечений, ось $z$ есть ось стержня).

В самом деле

$$\oint \overline{Z}\,ds = k\oint (y\cos nx - x\cos ny)\,ds = k\oint y\,dy + x\,dx = 0,$$

$$\oint x\overline{Z}\,ds = k\oint x\,(y\cos nx - x\cos ny)\,ds = k\oint xy\,dy + x^2\,dx = k\iint y\,dx\,dy = 0,$$

$$\oint y\overline{Z}\,ds = k\oint y\,(y\cos nx - x\cos ny)\,ds = -k\iint x\,dx\,dy = 0.$$

Нетрудно установить непосредственной проверкой, что точным решением задачи об упругом равновесии под действием заданных сил на боковой поверхности будет следующее решение:

$$\sigma_{xx}=\sigma_{yy}=\sigma_{zz}=\sigma_{xy}=0,\quad \sigma_{xz}=k\left\{y+\frac{J_p}{T}(\varphi_x'-y)\right\},\quad \sigma_{yz}=k\left\{-x+\frac{J_p}{T}(\varphi_y'+x)\right\}.$$

Здесь $J_p$ — полярный момент инерции сечения, $T$ — его геометрическая жесткость на кручение, $\varphi(x, y)$ — функция кручения.

Данная система напряжений удовлетворяет граничным условиям на боковой поверхности, уравнениям равновесия и уравнениям совместности.

Условия отсутствия напряжений в двух торцевых сечениях, ограничивающих стержень, выполняются только в интегральном смысле.

Действительно,

$$\iint \sigma_{yz}\,dx\,dy = \iint \sigma_{xz}\,dx\,dy = \iint (x\sigma_{yz} - y\sigma_{xz})\,dx\,dy = 0.$$

Мы приводим здесь также выражения для перемещений, определенных с точностью до перемещений абсолютно твердого тела:

$$u = -\frac{k}{G}\left(\frac{J_p}{T}-1\right)yz, \qquad v = \frac{k}{G}\left(\frac{J_p}{T}-1\right)xz, \qquad w = \frac{k}{G}\frac{J_p}{T}\varphi(x, y).$$

Очевидно, что эти перемещения соответствуют закручиванию стержня, причем угол поворота сечений на единицу длины $\tau$ определится следующей формулой:

$$\tau = \frac{k}{G}\left(\frac{J_p}{T}-1\right).$$

Эта величина $\tau$ при заданных $k$ и $G$ будет тем больше, чем более вытянутым будет сечение стержня, так как для вытянутых профилей $J_p$ на много больше, чем $T$.

Таким образом можно считать установленным, что осевые силы, статически эквивалентные нулю, могут вызвать своеобразное „безмоментное" закручивание призматического стержня. Природа этого явления станет, может быть, яснее, если мы заметим, что поверхностные силы стремятся исказить профиль поперечного сечения стержня сходно с тем, как он искажается при Сан-Венановском кручении, тогда, исходя из принципа взаимности, естественно будет ожидать деформации кручения, которая и имеет место в действительности.

Уравнения, решения которых здесь приведены, встретились мне в связи с иного рода задачами; формальное решение их дано в моей работе „Деформации естественно закрученных стержней" [2], там же решается формально задача, соответствующая кручению осевой силой $\overline{Z} = kz\,(y \cos nx - x \cos ny)$, переменной вдоль оси стержня и также не дающей крутящего момента.

Поступила в редакцию 15 I 1940.

ЛИТЕРАТУРА

1. Зволинский Н. В. и Риз П. М. Кручение цилиндрического стержня силами распределенными по его боковой поверхности. „Известия Академии Наук. Отделение технических наук". 1939. № 8.
2. Риз П. М. Деформации естественно закрученных стержней. „Доклады Академии Наук". Т. XXIII. Вып. I.

## CONCERNING THE TORSION OF A PRISMATIC BAR BY AXIAL FORCES DISTRIBUTED ALONG ITS SIDE SURFACE

P. M. RIZ

(Summary)

In the previous work, in collaboration with H. V. Zvolinsky [1], the author examined the torsion of a prismatic bar due to forces distributed along the side surface and creating a torsional torque.

In this article the author points out that a deformation of torsion of the prismatic bar may be created by axial forces distributed along its side surface without any torsional torque.