АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА“

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 2, 1940

ЗАМЕТКИ

БАЛКА НА УПРУГОМ ОСНОВАНИИ

С. И. МЕЛЬНИК

(Гомель)

Балка бесконечной длины с прямоугольным сечением $2a \times 2h$ (не нарушая общности, положим $2h = 1$) с упругими постоянными m_1, E_1 нагружена по верхней грани нормально действующими усилиями. Балка положена на упругое основание с упругими постоянными m_2, E_2. Трение между балкой и основанием отсутствует. Оси координат выбираем следующим образом: ось z направляем вниз, перпендикулярно верхней грани балки; ось y направляем по оси балки; начало координат в центре прямоугольного сечения балки.

По верхней грани действует данная нагрузка $\psi_1(x, y)$, по нижнему краю действует некоторая неизвестная нагрузка $\psi_2(x, y)$, которую нужно определить.

Пренебрегая в балке напряжениями X_x, нагрузки $\psi_1(x, y)$ и $\psi_2(x, y)$ можно осереднить:

$$\int_{-1/2}^{+1/2} \psi_1(x, y)\, dx = f_1(x), \qquad \int_{-1/2}^{+1/2} \psi_2(x, y)\, dx = f_2(y) \tag{1}$$

и рассматривать для балки случай плоско обобщенного состояния, причем средним напряжениям будут соответствовать средние перемещения [1]. На основание действует нагрузка $\psi_2(x, y)$, которую можно, пользуясь принципом Сан-Венана, положить равной $f_2(y)$. Выражая перемещение $w(y, z)_{z=a}$ для балки через $f_1(y)$ и $f_2(y)$, а среднее перемещение для грунта через функцию $f_2(y)$ и приравняв первое второму, получим интегральное уравнение для определения $f_2(y)$. Приравнивание средних перемещений балки и основания оказывается достаточным для определения единственным образом $f_2(y)$.

Представим функцию $f_1(y)$ в виде:

$$f_1(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \varphi_1(\alpha) \cos \alpha y\, d\alpha\,, \tag{2}$$

где

$$\varphi_1(\alpha) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty f_1(y) \cos \alpha y\, dy \tag{3}$$

абсолютно интегрируемая вместе со своим квадратом функция.

---

[1] Ляв. Математическая теория упругости, § 94.

Не нарушая общности, функцию $f_2(y)$ можно считать симметричной функцией:

$$f_2(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \varphi_2(\alpha)\cos\alpha y\, d\alpha, \tag{4}$$

где

$$\varphi_2(\alpha)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty f_2(y)\cos\alpha y\, dy. \tag{5}$$

Перемещение для балки $w(y, z)\big|_{z=+a}$ может быть выражено через функции $f_1(y)$ и $f_2(y)$ следующим образом[1]:

$$\bar{w}(y, z)\Big|_{z=+a}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \frac{2}{E_1}\left(C_3\operatorname{ch}\alpha a - C_4\operatorname{sh}\alpha a\right)\cos\alpha y\, d\alpha, \tag{6}$$

где

$$C_3=\frac{\varphi_1-\varphi_2}{\alpha}\,\frac{\operatorname{ch}\alpha a}{\operatorname{sh}2\alpha a-2\alpha a},$$

$$C_4=\frac{\varphi_1+\varphi_2}{\alpha}\,\frac{\operatorname{sh}\alpha a}{\operatorname{sh}2\alpha a+2\alpha a}. \tag{7}$$

Эти формулы получаются, если для пластинки бесконечной длины с упругой постоянной E_1, нагруженной по верхнему краю согласно функции (2), а по нижнему краю согласно функции (4), искать решение в виде:

$$\sigma_z=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left[C_1\operatorname{ch}\alpha z + C_2\operatorname{sh}\alpha z + C_3 z\operatorname{ch}\alpha z + C_4 z\operatorname{sh}\alpha z\right]\alpha^2\cos\alpha y\, d\alpha,$$

$$\sigma_y=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left[C_1\alpha^2\operatorname{ch}\alpha z + C_2\alpha^2\operatorname{sh}\alpha z + C_3\alpha\left(2\operatorname{sh}\alpha z+\alpha z\operatorname{ch}\alpha z\right) + \right.$$
$$\left. + C_4\alpha\left(2\operatorname{ch}\alpha z+\alpha z\operatorname{sh}\alpha z\right)\right]\cos\alpha y\, d\alpha,$$

$$\tau=-\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_0^\infty \left[C_1\alpha\operatorname{sh}\alpha z + C_2\alpha\operatorname{ch}\alpha z + C_3\left(\alpha z\operatorname{sh}\alpha z+\operatorname{ch}\alpha z\right) + \right.$$
$$\left. + C_4\left(\alpha z\operatorname{ch}\alpha z+\operatorname{sh}\alpha z\right)\right]\alpha\sin\alpha y\, d\alpha$$

при условии, что $C_3\operatorname{ch}\alpha a - C_4\operatorname{sh}\alpha a$ абсолютно интегрируемая функция[2] и на контуре

$$\tau=0.$$

Если положить пластинку на вторую пластинку ширины $2b$ с упругой постоянной E_2, которая в свою очередь положена на гладкое абсолютно жесткое основание, и перейти к пределу при $b\to\infty$ (законность перехода к пределу легко установить), то получается точная формула для давления пластинки на полуплоскость:

---

[1] См. нашу работу „Пластинка конечной и бесконечной длины на упругом основании, плоская задача". Записки Акад. Наук БССР, 1937.

[2] Для функции φ_2 согласно формуле (12) ниже это выполняется.

$$f_2(y)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int\limits_0^\infty \frac{\operatorname{sh}2\alpha a+2\alpha a\operatorname{ch}2\alpha a}{\operatorname{ch}2\alpha a\operatorname{sh}2\alpha a+2\alpha a+(E_1/E_2)(\operatorname{sh}^2 2\alpha a-4\alpha^2 a^2)}\varphi_1(\alpha)\cos\alpha y\,d\alpha).$$

Пользуясь решением Бусинека для перемещения упругого полупространства, найдем:

$$\overline{w}_{\text{ср}}\Big|_{z=+a}=\frac{\lambda_2+2\mu_2}{4\pi\mu_1(\lambda_2+\mu_2)}\int\limits_{-\infty}^{+\infty} f_2(\eta)\left[-\lg\frac{-1+\sqrt{1+(y-\eta)^2}}{1+\sqrt{1-(y-\eta)^2}}+\right.$$
$$\left.+2\sqrt{(y-\eta)^2}-2\sqrt{1+(y+\eta)^2}\right]d\eta. \tag{8}$$

Функция $\varphi_2(\alpha)$ определяется из интегрального уравнения, которое получается приравниванием перемещения нижней грани балки перемещению основания:

$$\varphi_2(\alpha)=U_1(\alpha)+$$
$$+\frac{2}{\pi}kU_2(\alpha)\int\limits_0^\infty\cos\alpha y\left[\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\int\limits_0^{+\infty}\varphi_2(\alpha_1)\cos\alpha_1\eta\,d\alpha_1\left(\lg\frac{-1+\sqrt{1+(y-\eta)^2}}{1+\sqrt{1+(y-\eta)^2}}+\right.\right.$$
$$\left.\left.+2\sqrt{1+(y-\eta)^2}\right)d\eta\right]dy, \tag{9}$$

где

$$U_1(\alpha)=\frac{2\alpha a\operatorname{ch}2\alpha a+\operatorname{sh}2\alpha a}{2\alpha a+\operatorname{sh}2\alpha a\operatorname{ch}2\alpha a}\varphi_1(\alpha),$$

$$U_2(\alpha)=\frac{\alpha(\operatorname{sh}^2 2\alpha a-4\alpha^2a^2)}{2\alpha a+\operatorname{sh}2\alpha a\operatorname{ch}2\alpha a}, \tag{10}$$

$$k=\frac{\lambda_2+2\mu_2}{4\pi\mu_2(\lambda_2+\mu_2)}\cdot\frac{E_1}{2}. \tag{11}$$

Пользуясь интегралом Фурье для $\varphi_2(\alpha)$, найдем:

$$\varphi_2(\alpha)=\frac{U_1(\alpha)}{1-2kU_2(\alpha)\theta(\alpha)}, \tag{12}$$

где

$$\theta(\alpha)=\int\limits_0^\infty\left[\lg\frac{-1+\sqrt{1+t^2}}{1+\sqrt{1+t^2}}+2\sqrt{1+t^2}-2\sqrt{t^2}\right]\cos\alpha t\,dt;$$

законность изменения порядка интегрирования доказывается легко.

В заключение приводим значения $f_2(y)$ для сосредоточенной силы $P=1$ и при $k=1/4$, $a=2$, полученные при помощи изложенного решения:

y	0	1/8	1/4	1/2	1	2	3	4	6
$f_2(y)$	0.168	0.167	0.166	0.163	0.145	0.102	0.074	0.050	0.015

Значения функции $f_2(y)$ для той же сосредоточенной силы $P=1$ при подсчете с помощью решения сопротивления материалов будут:

y	0	1/8	1/4	1/2	1	2	3	4	6
$f_2(y)$	0.168	0.167	0.167	0.163	0.153	0.125	0.085	0.044	0.011

Заметим, что коэффициент пропорциональности k взят из условия совпадения значений $f_2(y)$ при $y=0$ для сравниваемых решений.

Поступила в редакцию 10 XII 1938.

CONCERNING A BEAM ON AN ELASTIC FOUNDATION

S. I. MELNIK

(Summary)

The beam is assumed to be of infinite length, with a rectangular cross-section $2a \times 1$, with the elastic constants m_1, E_1 and loaded on the top edge by normal forces f_1 [see first formulae (1)]. The elastic constants of the foundation are denoted by m_2, E_2.

The pressure f_2 [taken in form (1)] of the beam on the foundation will then be obtained in the form

$$f_2(y) = \sqrt{\frac{2}{\pi}} \int_0^\infty \frac{U_1(\alpha)}{1 - 2kU_2(\alpha)\,\theta(\alpha)} \cos \alpha y \, d\alpha ,$$

where U_1, U_2, k, θ are given by formulae (10), (11), (12) respectively.

The formulae for uneven loads will be analogous.