АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ — **INSTITUTE OF MECHANICS**

ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА" — **JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS**

Т. IV, в. 2, 1940

О НОМОГРАФИРОВАНИИ СИСТЕМ УРАВНЕНИЙ И АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ

И. А. ВИЛЬНЕР

(Москва)

1. Два уравнения (обобщение на любое число уравнений тривиально)

$$f_1(x, y, z_1) = 0, \qquad f_2(x, y, z_2) = 0 \tag{1.1}$$

изображаются одной номограммой из выравненных точек с четырьмя шкалами x, y, z_1, z_2 при прямолинейных шкалах x, y, если совместна система двух функциональных уравнений

$$\tau_1 = \lambda(x)\mu(y)S(z_1), \qquad \tau_2 = \lambda(x)\mu(y)T(z_2) \tag{1.2}$$

с неизвестными функциями

$$\lambda(x), \qquad \mu(y), \qquad S(z_1), \qquad T(z_2),$$

где

$$z_1 = u(x, y), \quad z_2 = v(x, y)$$

суть функции, неявно определяемые уравнениями (1.1), а

$$\tau_1 = \frac{\partial f_1}{\partial x} : \frac{\partial f_1}{\partial y}, \qquad \tau_2 = \frac{\partial f_2}{\partial x} : \frac{\partial f_2}{\partial y}. \tag{1.3}$$

Система дифференциальных уравнений для определения λ, μ, S, T будет:

$$\tau_1 = \frac{(\tau_1/\tau_2)_x T + (\tau_1/\tau_2) T_x}{(\tau_1/\tau_2)_y T + (\tau_1/\tau_2) T_y}, \qquad \tau_2 = \frac{(\tau_2/\tau_1)_x S + (\tau_2/\tau_1) S_x}{(\tau_2/\tau_1)_y S + (\tau_2/\tau_1) S_y}, \tag{1.4}$$

$$\tau_2 T_y - T_x = 0, \qquad \tau_1 S_y - S_x = 0, \tag{1.5}$$

$$\tau_1 (\lg \mu)_y - S(\tau_1/S)_y = 0, \qquad \tau_1 (\lg \lambda)_x - S(\tau_1/S)_x = 0, \tag{1.6}$$

причем

$$S\tau_2 = \tau_1 T, \tag{1.7}$$

а индексы x, y (здесь и в дальнейшем) указывают переменную, по которой ведется частное дифференцирование.

Можно показать, что система (1.4) (1.5) (1.6) вполне интегрируема, если выполняются необходимые и достаточные условия (доказательство которых мы опускаем):

$$\left\{\frac{\tau_1\tau_2[\lg(\tau_1/\tau_2)]_y + \tau_1[\lg\tau_2]_x - \tau_2[\lg\tau_1]_x}{\tau_2 - \tau_1}\right\}_y = 0, \left\{\frac{[\lg(\tau_2/\tau_1)]_x + \tau_1[\lg\tau_1]_y - \tau_2[\lg\tau_2]_y}{\tau_2 - \tau_1}\right\}_x = 0. \tag{1.8}$$

При этом предполагается, что $\tau_2-\tau_1\neq 0$, т. е.

$$\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}\neq 0. \tag{1.9}$$

Функции λ, μ, S, T определяются системой (1.4), (1.5), (1.6) при условии (1.9) единственным образом до постоянного множителя. В противном случае в силу (1.2) имели бы:

$$\tau_1=\lambda(x)\mu(y)S(z_1)=\lambda^*(x)\mu^*(y)S^*(z_1),\quad \tau_2=\lambda(x)\mu(y)T(z_2)=\lambda^*(x)\mu^*(y)T^*(z_2);$$

откуда

$$\frac{S(z_1)}{S^*(z_1)}=\frac{T(z_2)}{T^*(z_2)}.$$

Это отношение в силу (1.9) равняется постоянной и, следовательно, согласно (1.2)

$$\frac{\tau_1}{S(z_1)}=\lambda(x)\mu(y)$$

функции λ и μ при независимых x, y определяются единственным образом с точностью до постоянного множителя.

Таким образом единственность с точностью до коллинеации номограммы при условиях (1.8) и (1.9) доказана[1].

Решения системы дифференциальных уравнений (1.5) могут быть записаны в виде:

$$T=e^{\int\limits_{x_0,\,y_0}^{x,\,y}\varphi_1\,dx+\psi_1\,dy+c_1},\qquad S=e^{\int\limits_{x_0,\,y_0}^{x,\,y}\varphi_2\,dx+\psi_2\,dy+c_2}, \tag{1.10}$$

где интегрирование ведется по произвольному контуру, соединяющему точки (x_0, y_0), (x, y); c_1 и c_2 — произвольные постоянные, а φ_1, ψ_1, φ_2, ψ_2 определяются формулами:

$$\begin{aligned}\varphi_1&=\tau_2\frac{\tau_1[\lg(\tau_1/\tau_2)]_y-[\lg(\tau_1/\tau_2)]_x}{\tau_2-\tau_1}, & \psi_1&=\frac{\tau_1[\lg(\tau_1/\tau_2)]_y-[\lg(\tau_1/\tau_2)]_x}{\tau_2-\tau_1},\\ \varphi_2&=\tau_1\frac{[\lg(\tau_2/\tau_1)]_x-\tau_2[\lg(\tau_2/\tau_1)]_y}{\tau_2-\tau_1}, & \psi_2&=\frac{[\lg(\tau_2/\tau_1)]_x-\tau_2[\lg(\tau_2/\tau_1)]_y}{\tau_2-\tau_1}.\end{aligned} \tag{1.11}$$

Функции μ и λ из уравнений (1.6) будут:

$$\mu=e^{-\int\limits_{y_0}^{y}\Delta_2 dy+c_3},\qquad \lambda=e^{-\int\limits_{x_0}^{x}\Delta_1 dx+c_4}, \tag{1.12}$$

где c_3, c_4 суть произвольные постоянные, а Δ_1, Δ_2 определяются по формулам:

$$\begin{aligned}\Delta_1&=\frac{\tau_1\tau_2[\lg(\tau_1/\tau_2)]_y+\tau_1[\lg\tau_2]_x-\tau_2[\lg\tau_1]_x}{\tau_2-\tau_1},\\ \Delta_2&=\frac{[\lg(\tau_2/\tau_1)]_x+\tau_1[\lg\tau_1]_y-\tau_2[\lg\tau_2]_y}{\tau_2-\tau_1}.\end{aligned} \tag{1.13}$$

[1] Если $\frac{D(f_1, f_2)}{D(x, y)}=0$, т. е. между z_1 и z_2 имеет место зависимость, то две номограммы сливаются в одну с двойной градуировкой шкалы z_1, z_2. Единственность может быть, а может и не быть.

Произвольные постоянные в (1.10) должны подбираться с соблюдением условия (1.7), что возможно при выполнении (1.8).

Дальнейшее преобразование левых частей уравнений (1.1) к каноническому виду Коши затруднений не представляет. Мы на этом не останавливаемся (см. курс Н. А. Глаголева [3]).

Заметим, что если дано только одно из уравнений (1.1), то условие его номографируемости номограммой первого жанра с прямолинейными шкалами x, y получается как простое следствие изложенного и сводится, очевидно, к условию существования общего решения для двух дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка (1.8) с неизвестной функцией τ_2.

Мы не останавливаемся на преобразовании условия (1.8) к виду, данному в этом случае Массо [1] и Гронвалем [2].

2. Задача номографирования функций комплексного переменного $w = f(z)$ приводится к номографированию одной из двух систем уравнений в действительной области[1].

$$f_1 \equiv u^2 + v^2 - r^2 = 0, \qquad f_2 \equiv v/u - \operatorname{tg}\theta = 0, \tag{2.1}$$

если $w = re^{i\theta}$, или

$$f_1 \equiv u - p = 0, \qquad f_2 \equiv v - q = 0, \tag{2.2}$$

если $w = p + iq$, причем $u = u(a, b)$, $v = v(a, b)$.

Ограничиваясь аналитическими функциями, для каждой из систем (2.1), (2.2) с помощью условий Коши-Римана будем иметь согласно (1.3):

$$\tau_1 = \tau, \qquad \tau_2 = -1/\tau, \tag{2.3}$$

где соответственно для систем (2.1) и (2.2)

$$\tau = \frac{uu_a + vv_a}{uu_b + vv_b}, \qquad \tau = \frac{u_a}{u_b}, \tag{2.4}$$

причем x и y заменены на a и b.

Необходимые и достаточные условия (1.8) для аналитических функций в силу (2.3) перепишутся в виде:

$$\left[\frac{2\tau_b + \tau\tau_a - \tau_a/\tau}{1 + \tau^2}\right]_b = 0, \qquad \left[\frac{2\tau_a + \tau_b/\tau - \tau\tau_b}{1 + \tau^2}\right]_a = 0. \tag{2.5}$$

Системы уравнений (1.4) — (1.6) в рассматриваемом случае будут:

$$\frac{2\tau_a S - \tau S_a}{2\tau_b S - \tau S_b} = -\frac{1}{\tau}, \qquad \frac{2\tau_a T + \tau T_a}{2\tau_b T + \tau T_b} = \tau, \tag{2.6}$$

$$S_a - \tau S_b = 0, \qquad \tau T_a + T_b = 0,$$

$$\tau\,[\lg\mu]_b - S\,[\tau/S]_b = 0, \qquad \tau\,[\lg\lambda]_a - S\,[\tau/S]_a = 0, \tag{2.7}$$

а условие (1.7) примет вид:

$$-\tau^2 T = S. \tag{2.8}$$

Единственность имеет место, так как

$$\frac{D(u, v)}{D(a, b)} = u_a{}^2 + u_b{}^2 \neq 0. \tag{2.9}$$

[1] В дальнейшем всюду предполагается, что при $w = p + iq$ аналитическая функция $f(z)$ отлична от линейной функции (последний случай, как легко видеть, тривиален).

Решения уравнений (2.6) согласно (1.10) и (2.3) будут:

$$T = e^{\int\limits_{a_0,b_0}^{a,b} \varphi_1 da + \psi_1 db + c_1}, \qquad S = e^{\int\limits_{a_0,b_0}^{a,b} \varphi_2 da + \psi_2 db + c_2}, \tag{2.10}$$

где

$$\varphi_1 = 2\frac{\tau_b - \tau_a/\tau}{1+\tau^2}, \quad \psi_1 = 2\frac{\tau_a - \tau\tau_b}{1+\tau^2}, \quad \varphi_2 = 2\frac{\tau_b + \tau\tau_a}{1+\tau^2}, \quad \psi_2 = 2\frac{\tau_b/\tau - \tau_a}{1+\tau^2}; \tag{2.11}$$

а решения уравнений (2.7)

$$\mu = e^{-\int\limits_{b_0}^{b} \Delta_2 db + c_3}, \qquad \lambda = e^{-\int\limits_{a_0}^{a} \Delta_1 da + c_4}, \tag{2.12}$$

где

$$\Delta_1 = \frac{2\tau_b + \tau\tau_a - \tau_a/\tau}{1+\tau^2}, \qquad \Delta_2 = \frac{2\tau_a + \tau_b/\tau - \tau\tau_b}{1+\tau^2}. \tag{2.13}$$

Произвольные постоянные c_1 и c_2 должны удовлетворять условию (2.8).

3. Используя условия Коши-Римана, можно доказать, что если некоторая функция $\tau(a, b)$ есть частное двух сопряженных гармонических функций, то она удовлетворяет дифференциальному уравнению:

$$(1+\tau^2)(\tau_{aa} + \tau_{bb}) - 2\tau(\tau_a^2 + \tau_b^2) = 0. \tag{3.1}$$

Наоборот, каждое решение дифференциального уравнения (3.1) может быть представлено как отношение двух сопряженных гармонических функций (в существенном только двумя способами). Доказательство опускаем. Как видно из соотношений (2.4), в рассматриваемом случае τ удовлетворяет (3.1).

Общее решение (3.1) может быть представлено в виде:

$$\tau = \operatorname{tg} \varphi, \tag{3.2}$$

где φ — произвольная гармоническая функция переменных a, b, т. е.

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{aa} + \varphi_{bb} = 0. \tag{3.3}$$

4. Так как функция, обратная аналитической, есть аналитическая (в случае многозначности рассматривается каждая ветвь отдельно), то соотношения (2.3), (2.5), (3.1), (3.2), (3.3) сохраняют силу для любой аналитической функции $p + iq = f(a + ib)$ с заменой в них a на p и b на q.

В этом случае необходимые и достаточные условия прямолинейности шкал p, q примут вид согласно (2.5):

$$\left[\frac{2\tau_q + \tau\tau_p - \tau_p/\tau}{1+\tau^2}\right]_q = 0, \qquad \left[\frac{2\tau_p - \tau\tau_q + \tau_q/\tau}{1+\tau^2}\right]_p = 0. \tag{4.1}$$

Здесь

$$\tau = a_p / a_q, \tag{4.2}$$

где

$$a_p = b_q = \frac{u_a}{u_a^2 + u_b^2}, \qquad b_p = -a_q = \frac{u_b}{u_a^2 + u_b^2}. \tag{4.3}$$

Вместо (3.1), (3.3) получим соответственно:

$$(1+\tau^2)(\tau_{pp} + \tau_{qq}) - 2\tau(\tau_p^2 + \tau_q^2) = 0, \tag{4.4}$$

$$\Delta\varphi \equiv \varphi_{pp} + \varphi_{qq} = 0. \tag{4.5}$$

5. Найдем условие прямолинейности шкал r, θ для аналитической функции в форме $re^{\theta i} = f(a + ib)$.

Из (2.1) получим:

$$a_r = \frac{1}{r} b_\theta = \frac{uu_a + vv_a}{r(u_a^2 + u_b^2)}, \qquad b_r = -\frac{1}{r} a_\theta = \frac{uu_b + vv_b}{r(u_a^2 + u_b^2)}, \tag{5.1}$$

$$\tau_1 = -\frac{1}{r} \frac{uu_a + vv_a}{uu_b + vv_b}, \qquad \tau_2 = \frac{1}{r} \frac{uu_b + vv_b}{uu_a + vv_a}, \tag{5.2}$$

или, полагая $\tau_1 = \tau$, будем иметь:

$$\tau_1 = \tau, \qquad \tau_2 = -\frac{1}{r^2 \tau}. \tag{5.3}$$

Условия (1.8) после замены x, y соответственно на r, θ с помощью (5.3) перепишутся так:

$$\left[\frac{2\tau_\theta + r^2 \tau\tau_r - \tau_r/\tau + 2r\tau^2}{1 + r^2\tau^2}\right]_\theta = 0, \qquad \left[\frac{2r^2\tau_r - r^2\tau\tau_\theta + \tau_\theta/\tau + 2r\tau}{1 + r^2\tau^2}\right]_r = 0. \tag{5.4}$$

6. Дифференциальное уравнение, аналогичное (3.1), в рассматриваемом случае для функции τ, определенной формулой (5.3), будет:

$$(1 + r^2\tau^2)(r^2\tau_{rr} + \tau_{\theta\theta} + 3r\tau_r + \tau) - 2r\tau(r^3\tau_r^2 + 2\tau\tau_r r^2 + r\tau^2 + r\tau_\theta^2) = 0. \tag{6.1}$$

Общее решение его можно записать в виде:

$$\tau = (1/r)\,\mathrm{tg}\,\varphi, \tag{6.2}$$

где φ — произвольная гармоническая функция переменных r, θ, т. е.

$$\Delta\varphi \equiv r^2\varphi_{rr} + r\varphi_r + \varphi_{\theta\theta} = 0. \tag{6.3}$$

7. Производя указанные в левых частях (2.5), (4.1), (5.4) дифференцирования и складывая каждую из пар этих соотношений, получим в каждом случае тождественно нуль в силу соотношений (3.1), (4.4), (6.1) соответственно.

Таким образом для того, чтобы аналитическая функция $w = f(a + ib)$ допускала номограмму с двумя прямолинейными шкалами по переменным (a, b), (p, q), (r, θ), необходимо и достаточно, чтобы функция τ, определенная с помощью (2.4), (4.2), (5.3), удовлетворяла соответственно одному из уравнений (2.5), одному из уравнений (4.1), одному из уравнений (5.4).

Таким образом в каждой из систем дифференциальных уравнений (2.5), (3.1), (4.1), (4.4), (5.4) и (6.1) останется только два независимых уравнения, поэтому в дальнейшем речь будет итти только о первых уравнениях (2.5), (4.1), (5.4).

8. Заменяя функцию τ в (2.5), (4.1) с помощью (3.2) и в (6.1) с помощью (6.2), получим после преобразований и сокращения на 2 удобные для дальнейшего исследования формы дифференциальных уравнений:

$$[\varphi_b - \varphi_a \,\mathrm{ctg}\, 2\varphi]_b = 0, \tag{8.1}$$

$$[\varphi_q - \varphi_p \,\mathrm{ctg}\, 2\varphi]_q = 0, \tag{8.2}$$

$$[\varphi_\theta - r\varphi_r \,\mathrm{ctg}\, 2\varphi]_\theta = 0. \tag{8.3}$$

Выполняя дифференцирования и делая замену переменных: в (8.1) a и b на p и q с помощью (2.2), а также a и b на r и θ с помощью (2.1), в (8.2)

p и q на a и b с помощью (2.2), в (8.3) r и θ на a и b с помощью (2.1), используя при этом дифференциальные уравнения Лапласа (3.3), (4.5) и (6.3) и уравнения Коши-Римана в формах соответственно

$$p_a = q_b, \quad r_a = r\theta_b, \quad a_p = b_q, \quad a_r = \frac{1}{r} b_\theta,$$

$$p_b = -q_a, \quad r_b = -r\theta_a, \quad a_q = -b_p, \quad b_r = -\frac{1}{r} a_\theta,$$

а также равенства (3.2), (2.4), (4.2), (5.3), (6.2) и некоторые вытекающие из них дифференциальные соотношения, получим, например, вместо (8.1) слева:

$$\frac{u_b^2}{2\tau}(1+\tau^2)^2(\varphi_{pq} - 2\varphi_p\varphi_q \operatorname{ctg} 2\varphi), \tag{8.4}$$

где

$$\tau = u_a/u_b.$$

Воспользуемся результатом дифференцирования соотношения (4.2):

$$\frac{\partial^2 \lg \tau}{\partial p\, \partial q} = -\frac{(1+\tau^2)}{\tau}(\varphi_{pq} - 2\varphi_p\varphi_q \operatorname{ctg} 2\varphi), \tag{8.5}$$

где $\tau = -u_a/u_b$, а φ то же, что в (8.4).

Отсюда видим, что выражение (8.4) отличается от левой части (8.5) не обращающимся в нуль множителем, по сокращении на который уравнение (8.1) и аналогичным путем (8.2) и (8.3) можно представить в виде:

$$\frac{\partial^2 \lg \tau}{\partial p\, \partial q} = 0, \tag{8.6}$$

$$\frac{\partial^2 \lg \tau}{\partial r\, \partial \theta} = 0, \tag{8.7}$$

$$\frac{\partial^2 \lg \tau}{\partial a\, \partial b} = 0, \tag{8.8}$$

где τ определяется из соответственно (4.2), (5.3), (2.4).

Интегрируя, например, систему уравнений (8.8), (2.4), без труда найдем, что функция u должна быть вида:

$$u = F[\varphi(a), \psi(b)]. \tag{8.9}$$

На вопросе об определении класса аналитических функций, для которых это имеет место, мы не останавливаемся.

9. Пусть теперь аналитическая функция $p + iq = u(a, b) + iv(a, b)$ допускает номограмму с двумя прямолинейными шкалами по каким угодно двум из четырех переменных a, b, p, q, например, по переменным b, q.

Используя условия Коши-Римана, из уравнений (2.2) найдем, считая b, q независимыми переменными:

$$a_b = \frac{u_a}{u_b}, \quad a_q = -\frac{1}{u_b}, \quad p_b = \frac{u_a^2 + u_b^2}{u_b}, \quad p_q = -\frac{u_a}{u_b}, \tag{9.1}$$

$$\tau_1 = -\frac{u_a^2 + u_b^2}{u_a}, \quad \tau_2 = -u_a, \tag{9.2}$$

где положено:

$$\tau_1 = p_b/p_q, \qquad \tau_2 = a_b/a_q. \tag{9.3}$$

Условия (1.8) запишутся так:

$$\left[\frac{\tau_1\tau_2[\lg(\tau_1/\tau_2)]_q + \tau_1[\lg\tau_2]_b - \tau_2[\lg\tau_1]_b}{\tau_2-\tau_1}\right]_q = 0,$$
$$\left[\frac{[\lg(\tau_2/\tau_1)]_b + \tau_1[\lg\tau_1]_q - \tau_2[\lg\tau_2]_q}{\tau_2-\tau_1}\right]_b = 0, \tag{9.4}$$

где τ_1, τ_2 определяются согласно (9.2).

При этом

$$\frac{D(a, p)}{D(b, q)} = \begin{vmatrix} a_b & a_q \\ p_b & p_q \end{vmatrix} = 1 \neq 0. \tag{9.5}$$

Следовательно, имеет место единственность номограммы с точностью до коллинеации.

Дифференцируя равенства (9.2), после преобразований найдем:

$$\frac{\partial^2 \lg\tau_2}{\partial b\,\partial q} = -\frac{1}{u_b}\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial a\,\partial b}, \qquad \frac{\partial^2 \lg\tau_1}{\partial b\,\partial q} = \frac{1}{a_q}\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial p\,\partial q}, \tag{9.6}$$

где a_q определено по (4.3). Во избежание повторений, в дальнейшем в выражениях, подобных (8.6)—(8.8), (9.6), под τ (с индексом или без) условимся понимать значение τ, соответствующее тем двум переменным, по которым дифференцируется $\lg\tau$.

Уравнения (9.6) после ряда преобразований с использованием условий Коши-Римана и частичной замены переменных b, q на a, b могут быть записаны в виде:

$$\frac{\partial^2 \lg\tau_1}{\partial b\,\partial q} = \frac{2}{u_b}\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial a\,\partial b}, \qquad \frac{\partial^2 \lg\tau_2}{\partial b\,\partial q} = \frac{2}{u_b}\left[\frac{2\tau_b + \tau\tau_a - \tau_a/\tau}{1+\tau^2}\right]_b. \tag{9.7}$$

Второе из этих уравнений с помощью (8.4), (8.5), (8.1) и (2.5) может быть представлено в виде:

$$\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial b\,\partial q} = -\frac{2}{a_q}\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial p\,\partial q}. \tag{9.8}$$

Равенства (9.6), (9.7), (9.8) дают:

$$\frac{1}{a_q}\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial p\,\partial q} = \frac{2}{u_b}\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial a\,\partial b}, \quad \frac{2}{a_q}\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial p\,\partial q} = \frac{1}{u_b}\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial a\,\partial b}. \tag{9.9}$$

Так как детерминант этой системы

$$\begin{vmatrix} 1/a_q & 2/u_b \\ 2/a_q & 1/u_b \end{vmatrix} = -\frac{3}{a_q u_b} = 3(1+\tau^2) \neq 0, \tag{9.10}$$

то выполняются равенства (8.6), (8.8), т. е.

$$\frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial a\,\partial b} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \lg\tau}{\partial p\,\partial q} = 0; \tag{9.11}$$

а следовательно, согласно (9.6) также и равенства:

$$\frac{\partial^2 \lg\tau_1}{\partial b\,\partial q} = 0, \qquad \frac{\partial^2 \lg\tau_2}{\partial b\,\partial q} = 0 \tag{9.12}$$

(выполнение одного из равенств (9.12) конечно, недостаточно для возможности построения номограммы с двумя прямолинейными шкалами b, q).

10. Рассматривая аналитическую функцию комплексного переменного $b+ai$

$$p+iq=v(a,\ b)+iu(a,\ b)$$

и применяя в ней результат предыдущего параграфа, получим, что аналитическая функция $p+iq=f(a+ib)$ допускает номограмму с прямолинейными шкалами a и p тогда и только тогда, когда выполняются равенства (9.11) или равенства, аналогичные (9.12):

$$\frac{\partial^2 \lg \tau_1}{\partial a\, \partial p}=0, \quad \frac{\partial^2 \lg \tau_2}{\partial a\, \partial q}=0. \tag{10.1}$$

11. Рассматривая аналитическую функцию комплексного переменного $b+\alpha i$

$$p+iq=u(-\alpha,\ b)+iv(-\alpha,\ b),$$

где $\alpha=-a$, и применяя к ней результаты двух предыдущих параграфов, получим, что аналитическая функция $p+iq=u(a,\ b)+iv(a,\ b)$ допускает номограмму с двумя прямолинейными шкалами по переменным $(p,\ b)$ или $(q,\ a)$ тогда и только тогда, когда выполняются равенства (8.6), (8.8), или, что то же, (9.11), или, что равносильно, имеют место соответственно равенства:

$$\frac{\partial^2 \lg \tau_1}{\partial p\, \partial b}=0, \quad \frac{\partial^2 \lg \tau_2}{\partial p\, \partial b}=0, \quad \frac{\partial^2 \lg \tau_1}{\partial q\, \partial a}=0, \quad \frac{\partial^2 \lg \tau_2}{\partial q\, \partial a}=0. \tag{11.1}$$

12. Для аналитической функции в полярных координатах

$$w=re^{i\theta}=f(z)=u(a,\ b)+iv(a,\ b)$$

условие ее номографируемости номограммой с двумя прямолинейными шкалами по любым двум переменным $(a,\ r)$, $(a,\ \theta)$, $(b,\ r)$ $(b,\ \theta)$ совпадают с условиями номографируемости аналитической функции

$$p+iq=\lg f(z)=u^*(a,\ b)+iv^*(a,\ b)$$

номограммой с прямолинейными шкалами $(a,\ p)$, $(a,\ q)$, $(b,\ p)$, $(b,\ q)$ в силу инвариантности уравнения

$$\frac{\partial^2 \lg \tau}{\partial x\, \partial y}=0, \tag{12.1}$$

где τ имеет известный из раздела **1** смысл относительно любых невырождающихся преобразований независимых переменных x, y вида

$$x=x(\eta), \quad y=y(\xi), \tag{12.2}$$

так как имеет место тождество:

$$\frac{\partial^2 \lg (f_\eta/f_\xi)}{\partial \eta\, \partial \xi}=\frac{\partial^2 \lg (f_x/f_y)}{\partial x\, \partial y}\, x_\eta y_\xi. \tag{12.3}$$

13. Пусть аналитическая функция $w=f(z)$ задана на произвольной поверхности Σ с первой квадратичной формой:

$$ds^2=E\,du^2+G\,dv^2; \tag{13.1}$$

причем пусть

$$\frac{\partial^2 \lg (E/G)}{\partial u\, \partial v} = 0. \tag{13.2}$$

Тогда аналитическая функция на поверхности Σ будет отнесена к координатной изотермической сети u, v.

В изотермических параметрах $u_1 = u_1(u)$ и $v_1 = v_1(v)$ аналитическая функция на поверхности Σ будет иметь вид:

$$p + iq = f(u_1 + iv_1), \tag{13.3}$$

и к ней применимы все результаты разделов **9—11**.

Возвращаясь к переменным u, v, получим в силу (12.3) для произвольной аналитической функции, отнесенной к произвольным изотермическим координатным сетям поверхности Σ, те же условия для номографируемости на плоскости, что и в разделах **9—11**. Вместе с тем получаем обобщение рассмотренных в разделах **9—11** условий номографируемости аналитической функции на плоскости, так как полярная и декартова координатные сети суть частные случаи изотермических сетей.

14. Каждое из соотношений (8.6)—(8.8), (9.11), в силу (2.3), (5.3) есть условие Сан-Робера[4] для каждого из уравнений соответствующей системы (2.1), (2.2) и поэтому может быть названо условием Сан-Робера для аналитической функции $w = f(z)$ по соответствующим координатам плоскостей z и w. Все полученные результаты можно резюмировать следующей теоремой.

1°. Для того чтобы аналитическая функция $w = f(z)$, отнесенная в плоскостях z, w к произвольным координатным изотермическим сетям, допускала номограмму с двумя прямолинейными шкалами по координатам одной плоскости (z или w), необходимо и достаточно, чтобы она удовлетворяла условиям Сан-Робера по координатам другой плоскости (w или z)[1].

2°. Номограмма единственна с точностью до коллинеации[2].

3°. Если условия Сан-Робера выполняются как по координатам плоскости z, так и по координатам плоскости w, то номограмма будет нулевого жанра.

Если же условия Сан-Робера выполняются только по координатам одной плоскости, то номограмма будет второго жанра. Криволинейными шкалами будут шкалы тех двух переменных, по которым удовлетворяются условия Сан-Робера.

4°. В случае номограммы второго жанра обе криволинейные шкалы всегда располагаются на одном коническом сечении.

5°. Если аналитическая функция допускает номограмму с двумя прямолинейными шкалами по двум произвольным координатам, принадлежащим

---

[1] Иногда практически удобнее проверять условия Сан-Робера с помощью (2.5), (4.1), (5.4).

[2] Единственность здесь не тривиальна, так как она имеет место согласно разделам 9—11 при выполнении условий Сан-Робера (и даже тогда имеет место (см. ниже) 5° и, следовательно, удовлетворяются условия Сан-Робера по всем координатам), т. е. в тех случаях, когда единственность как раз не имеет места при номографировании одного уравнения [3].

разным плоскостям (одна — плоскости z, другая — плоскости w), то удовлетворяются условия Сан-Робера по любой паре координат, и номограмма будет нулевого жанра.

Следовательно, номограмма нечетного жанра для аналитической функции невозможна.

Таким образом практически возможность номографирования аналитической функции номограммой рассматриваемого типа решается проверкой условий Сан-Робера только по координатам плоскостей z и w в отдельности.

15. В силу раздела **12** выводы 1°—5° справедливы и для аналитической функции, заданной на произвольной поверхности в координатной изотермической сети. Такая функция допускает номограмму с двумя прямолинейными шкалами на плоскости при тех же условиях 1°—5°.

Очевидно, что при тех же условиях возможно номографирование на любой поверхности постоянной кривизны аналитической функции, заданной на произвольной поверхности, так как в этом случае возможно номографирование на плоскости с последующим геодезическим отображением достаточно малой части плоскости на достаточно малую часть поверхности постоянной кривизны.

При этом кривая второго порядка плоскости заменяется ее геодезическим отображением на поверхность постоянной кривизны.

Не останавливаясь здесь на исследовании других возможностей при номографировании аналитических функций, заметим, что аналитическая функция иногда допускает номограмму четвертого жанра на двух конических сечениях, например, функция, определяемая уравнением:

$$z^2+1-z\operatorname{ch}w=0,$$

где $z=re^{i\theta}$, $w=p+iq$.

16. Приведем результат применения изложенного к некоторым элементарным функциям:

$$1)\quad w=e^z.\ \text{Если}\ w=p+iq,\ \text{то}\ \tau=\operatorname{ctg}b=p/q.$$

Критерии (8.6), (8.8) удовлетворяются. Получаем номограмму нулевого жанра.

$$2)\ w=z.\ \text{Если}\ w=re^{i\theta},\ \text{то}\ \tau=-\frac{1}{r}\frac{a}{b}=-\frac{\operatorname{ctg}\theta}{r}.$$

Критерии (8.7), (8.8) удовлетворяются. Получаем номограмму нулевого жанра для перехода от полярных координат к декартовым.

$$3)\quad w=\operatorname{sh}z,\quad w=\operatorname{ch}z,\quad w=\sin z,\quad w=\cos z.$$

Если $w=p+iq$, то $\tau=\operatorname{cth}a\operatorname{ctg}b$ для $w=\operatorname{sh}z$

и аналогично для других.

Критерий (8.6) не удовлетворяется, критерий (8.8) удовлетворяется. Получаем номограмму второго жанра с прямолинейными шкалами p, q и с криволинейными шкалами a, b, расположенными на одном коническом сечении[5].

$$4)\quad w = \operatorname{th} z, \quad w = \operatorname{cth} z, \quad w = \operatorname{tg} z, \quad w = \operatorname{ctg} z.$$

Если $w = re^{i\theta}$, то для $\operatorname{th} z$

$$\tau = \operatorname{th} 2a \operatorname{ctg} 2b, \quad \tau = -\operatorname{ctg}\theta\,\frac{1-r^2}{r+r^3}.$$

Критерии (8.8), (8.7) удовлетворяются. Получаем номограмму нулевого жанра[6].

$$5)\quad w = z^2. \text{ Если } w = re^{i\theta}, \text{ то } \tau = \frac{a}{b}, \quad \tau = \frac{-1 \pm \cos\theta}{r \sin\theta}.$$

Критерии (8.8), (8.7) удовлетворяются. Получаем номограмму нулевого жанра.

$$6)\quad w = z^2. \text{ Если } w = p + iq, \text{ то } \tau = -a/b.$$

Критерии (8.8) удовлетворяются. Критерий (8.6) $\tau = a/b$, или, что проще, в переменных a, b критерий (2.5) не удовлетворяется. Получаем номограмму второго жанра с прямолинейными шкалами p, q и с криволинейными шкалами a, b, расположенными на одном коническом сечении.

$$7)\quad w = 1/z, \text{ если } w = p + iq.$$

Критерии (8.6), (8.8) не удовлетворяются. Номограмма рассматриваемого типа невозможна.

$$8)\quad w = 1/z. \text{ Если } w = re^{i\theta}, \text{ то } \tau = a/b, \quad \tau = (1/r)\operatorname{ctg}\theta.$$

Критерии (8.7), (8.8) удовлетворяются. Получаем номограмму нулевого жанра.

Поступила в редакцию 13 XII 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1. D'Ocange M. Traite de Nomographie. 2 edition. Paris. 1921. [P. 418].
2. Gronwall T. H. Sur les équation entre trois variables representables par des nomogrammes à points alignes. „Journal des mathématiques pures et appliquées" (Liouville journal). 1912. Sér. 6. T. 8. [P. 59—102].
3. Глаголев Н. А. Теоретические основы номографии. Москва—Ленинград. ОНТИ-ГТТИ. 1934. [Стр. 46].
4. P. de Saint Robert. De la résolution de certaines équations à trois variables par le moyen règle glissante. „Memoria del A. R. Accademia di Torino".
5. Вильнер И. А. Номограмма для определения гиперболического синуса и косинуса от комплексного аргумента. Журнал „Электричество". 1934. № 12 [стр. 48] и 1935. № 17 [стр. 45].
6. Вильнер И. А. Номограмма для вычисления гиперболического и кругового тангенса и котангенса от комплексного аргумента. Журнал „Прикладная математика и механика". 1940. Т. IV. № 1. Изд. Акад. Наук СССР.

SUR LES NOMOGRAMMES DES SYSTÈMES D'ÉQUATIONS ET DES FONCTIONS ANALYTIQUES

I. A. VILNER

(Resumé)

Dans ce mémoire on établit les conditions auxquelles doit satisfaire un système d'equations pour admettre un nomogramme à deux échelles rectilignes; ces conditions sont ensuite appliquées à la construction des nomogrammes des fonctions analytiques d'un variable complexe.

En admettant que la fonction $w=f(z)$ dans le plan z et w soit rapportée à des réseaux isothermiques coordonnés arbitraires (en particulier au réseau cartesien, polaire) nous obtenons le théorème suivant.

1°. Pour que la fonction analytique $w=f(z)$ rapportée dans les plans z, w à des reseaux isotermiques coordonnées arbitraire admette pour les coordonnées d'un plan z, w un nomogramme à deux echelles rectilignes, il faut et il suffit que cette fonction vérifie aux conditions de St. Robert pour les coordonnées de l'autre plan respectif w, z.

2°. Le nomogramme est unique à collinéation près.

3°. Si les conditions de St. Robert sont verifiées pour les coordonnées du plan z ainsi que pour les coordonnées du plan w, le nomogramme est du genre nul.

Si les conditions de St. Robert ne sont verifiées que pour un plan, le nomogramme est du deuxième genre. Les échelles curvilignes sont les échelles de deux variable pour lesquelles les conditions de St. Robert sont justifiées.

4°. Dans un nomogramme du deuxième genre les deux échelles curvilignes sont toujours situées sur une conique.

5°. Si une fonction analytique admet un nomogramme à deux échelles rectilignes pour deux coordonnées arbitraire appartenant à deux plans differents (l'une au plan z et l'autre au plan w), les conditions de St. Robert sont necessairement justifiées pour n'importe quelle paire cordonnées et le nomogramme est du genre nul. Un nomogramme du genre impaire est impossible. Ainsi la possibilité de construire un nomogramme de fonction analytique et le genre de ce nomogramme sont établis par la verification de conditions de St. Robert d'après les coordonnées du plan z et du plan w separément.

Un théorème analogue, s'applique à une fonction analytique donnée sur une surface arbitraire par rapports aux reseaux isothermiques arbitraires; cette fonction pouvant être nomographiée sur le plan aussi bien que sur une surface arbitraire courbure constante.