АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА“

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 2, 1940

О ФИЛЬТРАЦИИ В АНИЗОТРОПНОМ ГРУНТЕ

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

(Москва)

Мы рассматриваем плоское движение грунтовой воды в слоистом грунте (фиг. 1), в котором существуют два основных направления (параллельных „осям фильтрации“ x_1, y_1), вдоль которых коэффициенты фильтрации суть постоянные k_1 и k_2, причем полагаем:

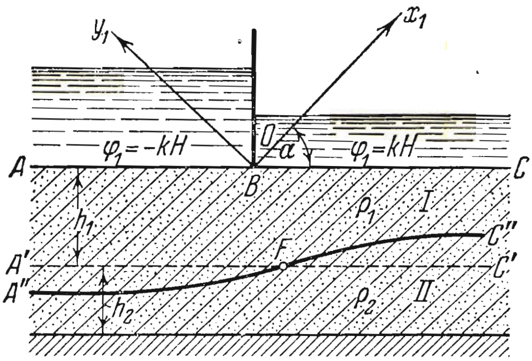
$$k_1 = \mu^2, \quad k_2 = \nu^2.$$

Считаем, что движение установившееся и следует закону Дарси, а поэтому имеем уравнения движения:

$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial x_1} - \frac{g}{k_1}u_1 - g\sin\alpha,$$
$$0 = -\frac{1}{\rho}\frac{\partial p}{\partial y_1} - \frac{g}{k_2}v_1 - g\cos\alpha \tag{1}$$

и уравнение неразрывности

$$\frac{\partial u_1}{\partial x_1} + \frac{\partial v_1}{\partial y_1} = 0. \tag{1'}$$



Фиг. 1.

Эти уравнения могут быть переписаны в виде:

$$u_1 = \mu^2\frac{\partial\varphi}{\partial x_1}, \qquad v_1 = \nu^2\frac{\partial\varphi}{\partial y_1}, \qquad \mu^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial x_1^2} + \nu^2\frac{\partial^2\varphi}{\partial y_1^2} = 0, \tag{2}$$

где

$$\varphi(x_1, y_1) = -\frac{p}{\rho g} - x_1\sin\alpha - y_1\cos\alpha, \tag{3}$$

p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести, u_1, v_1 — проекции скорости на оси x_1, y_1, $\alpha = \angle \xi 0 x_1$, ξ — горизонтальная ось.

Введем функцию тока $\psi(x_1, y_1)$ с помощью равенств:

$$u_1 = \mu\nu\frac{\partial\psi}{\partial y_1}, \qquad v_1 = -\mu\nu\frac{\partial\psi}{\partial x_1}. \tag{4}$$

Функция $\psi(x_1, y_1)$ удовлетворяет уравнению:

$$\mu^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial x_1^2} + \nu^2 \frac{\partial^2\psi}{\partial y_1^2} = 0.$$

Замена переменных

$$x_1 = \mu x, \quad y_1 = \nu y$$

дает для φ и ψ уравнение Лапласа по x и y.

При этом

$$\varphi(x, y) + i\psi(x, y) = f(z),$$

где

$$z = x + iy.$$

Оси x, y совпадают с осями x_1, y_1, но масштабы по ним уменьшены соответственно в μ и ν раз.

Будем рассматривать три системы координат (фиг. 1): основные ξ, η и вспомогательные x_1, y_1 и x, y. Они связаны уравнениями:

$$\begin{aligned} \xi &= x_1 \cos\alpha - y_1 \sin\alpha = \mu x \cos\alpha - \nu y \sin\alpha, \\ \eta &= x_1 \sin\alpha + y_1 \cos\alpha = \mu x \sin\alpha + \nu y \cos\alpha, \\ x_1 &= \mu x = \xi \cos\alpha + \eta \sin\alpha, \\ y_1 &= \nu y = -\xi \sin\alpha + \eta \cos\alpha. \end{aligned} \tag{5}$$

В системе x, y мы получаем некоторое фиктивное движение в области, получаемой из области плоскости ξ, η аффинным преобразованием (при котором прямые переходят в прямые, но углы между ними изменяются).

На границе области в плоскости x, y будут выполняться следующие условия:

1) на границе водного бассейна $\varphi(x, y) = \text{const}$, так как на соответствующей границе плоскости $x_1 y_1$ мы имеем $\varphi(x_1, y_1) = \text{const}$;

2) на непроницаемой границе $\psi(x, y) = \text{const}$;

3) на свободной поверхности давление постоянно, а поэтому имеем:

$$\varphi + \mu x \sin\alpha + \nu y \cos\alpha = \text{const}; \tag{6}$$

4) кроме того, на депрессионной кривой

$$\psi(x, y) = \text{const};$$

5) на плоскости скорости (u, v) депрессионной кривой соответствует окружность:

$$u^2 + v^2 + \mu \sin\alpha u + \nu \cos\alpha v = 0; \tag{7}$$

6) на промежутке высачивания имеет место уравнение (6).

Я рассматриваю случай анизотропного грунта в связи с задачей[1] об отжиме рассола при движении грунтовой воды в таком грунте[2].

Имеем два слоя жидкости (фиг. 1) с постоянными плотностями ρ_1 и ρ_2 $(\rho_2 > \rho_1)$. При движении воды под гидротехническим сооружением, за которое здесь,

[1] Поставлена управлением Соликамского гидроузла.

[2] Вопросом о фильтрации в анизотропном грунте под гидротехническими сооружениями занимается В. С. Козлов.

ради простоты, принимается точечный шпунт B, нижний слой — рассола — будет отжиматься по линии $A''C''$. Спрашивается, каким будет установившееся движение и каково, в частности, уравнение линии $A''C''$.

В установившемся движении в области II будет покой, $A''C''$ будет линией тока. Условие непрерывности давления вдоль линии раздела дает уравнение:

$$(\rho_2-\rho_1)(\mu x\sin\alpha+\nu y\cos\alpha)=\rho_1\varphi_1-\rho_2\varphi_2$$

(φ_1, φ_2 — потенциалы скорости I и II областей), или

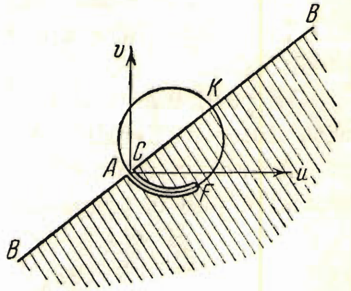
$$\varphi_1-\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)(\mu x\sin\alpha+\nu y\cos\alpha)=\text{const}.$$

На годографе скорости имеем окружность:

$$u^2+v^2-Au-Bv=0,$$

где

$$A=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)\mu\sin\alpha,\qquad B=\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)\nu\cos\alpha.$$



Фиг. 2.

Годограф скорости изображен на фиг. 2. Отображая заштрихованную область после ее инверсии в круге радиуса CK с центром в начале, а также область комплексного потенциала на полуплоскость вспомогательного комплексного переменного t так, чтобы точкам B, A, F, C отвечали соответственно точки $t=\infty$, $t=-1$, $t=a$, $t=1$, найдем:

$$f=\varphi+i\psi=\frac{2H}{\pi}\arcsin t,$$

$$z=\xi\left(\frac{\cos\alpha}{\mu}-\frac{i\sin\alpha}{\nu}\right)+\eta\left(\frac{\sin\alpha}{\mu}+\frac{i\cos\alpha}{\nu}\right)=$$

$$=\frac{2H(\nu\cos\alpha-i\mu\sin\alpha)}{\pi\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)(\mu^2\sin^2\alpha+\nu^2\cos^2\alpha)}\left[\frac{1}{2}\lg(1-t^2)+i\arcsin t+\lg 2\right]+$$

$$+\frac{h_1(\nu\cos\alpha-i\mu\sin\alpha)}{\pi(\mu^2\sin^2\alpha+\nu^2\cos^2\alpha)}\left[\lg\frac{1+t}{1-t}-\frac{\pi i}{2}\right],$$

где h_1 — первоначальная глубина верхнего слоя; мы здесь ограничиваемся случаем

$$h_1>\frac{H}{\frac{\rho_2}{\rho_1}-1}.$$

Уравнение линии раздела $A''C''$ в случае изотропного грунта имеет вид:

$$\xi=\frac{h_1}{\pi}\lg\frac{1+t}{1-t}+\frac{H}{\pi\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)}\lg 4(1-t^2)=X(t),\quad \eta=\frac{2H}{\pi\left(\frac{\rho_2}{\rho_1}-1\right)}\arcsin t-h_1=Y(t). \tag{8}$$

Для анизотропного грунта оно принимает вид:

$$\xi=mX(t)+nY(t),\quad \eta=Y(t), \tag{9}$$

где

$$m=\frac{\mu\nu}{\mu^2\sin^2\alpha+\nu^2\cos^2\alpha},\qquad n=\frac{\mu^2-\nu^2}{\mu^2\sin^2\alpha+\nu^2\cos^2\alpha}\sin\alpha\cos\alpha.$$

Если вместо точечного шпунта взять флютбет (горизонтальный непроницаемый отрезок), то уравнение (9) сохраняется, но X и Y в уравнениях (8) будут, конечно, иметь другие выражения.

Поступила в редакцию 7 I 1940. Институт механики Акад. Наук СССР.

CONCERNING FILTRATION IN ANISOTROPIC SOIL

P. J. POLOUBARINOVA-KOCHINA

(Summary)

The author deals with the stabilized flow of ground water in lamelated soil in which there are two principal directions with constant coefficients of filtration.

In particular the author deals with the problem of the flow of two fluids with different densities (fresh and salt water) under a dam.

As an example of the above investigation the problem of ground flow around a pile is treated.