А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 1, 1940

НЕКОТОРЫЕ ЗАДАЧИ ОБ ИЗГИБЕ КРУГЛОЙ ПЛАСТИНКИ

А. И. ЛУРЬЕ

(Ленинград)

1. **Постановка задачи и краевые условия.** Прогиб серединной плоскости $w(x, y)$ должен быть определен из дифференциального уравнения:

$$\triangle \triangle w = \frac{p(x, y)}{D}, \tag{1}$$

где

$$D = \frac{2Eh^3}{3(1-\mu^2)}$$

(μ — коэффициент Пуассона) обозначает цилиндрическую жесткость пластины.

Вводя комплексные координаты

$$z = x + iy, \quad \bar{z} = x - iy$$

и замечая, что

$$\triangle w = 4 \frac{\partial^2 w}{\partial z \, \partial \bar{z}},$$

можно переписать дифференциальное уравнение (1) в виде:

$$16 \frac{\partial^4 w}{\partial z^2 \, \partial \bar{z}^2} = \frac{1}{D} p(x, y). \tag{2}$$

Общее решение уравнения (2) слагается из частного решения $\widetilde{w}(z, \bar{z})$, соответствующего заданной нагрузке, и общего решения $w^*(z, \bar{z})$ бигармонического уравнения:

$$w(z, \bar{z}) = \widetilde{w}(z, \bar{z}) + w^*(z, \bar{z}). \tag{3}$$

Но, как известно, $w^*(z, \bar{z})$ может быть составлено при помощи двух регулярных в рассматриваемой области функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$:

$$w^*(z, \bar{z}) = \bar{z}\varphi(z) + z\bar{\varphi}(\bar{z}) + \psi(z) + \bar{\psi}(\bar{z}). \tag{4}$$

Не нарушая общности, можно считать

$$\operatorname{Im}\psi(0) = 0, \qquad \operatorname{Im}\varphi'(0), \qquad \varphi(0) = 0. \tag{5}$$

Действительно, разложение w^* в степенной ряд имеет вид:

$$w^*(z, \bar{z}) = \bar{z}\,\varphi(0) + z\,\bar{\varphi}(0) + z\bar{z}\,[\varphi'(0) + \bar{\varphi}'(0)] + \psi(0) + \bar{\psi}(0) + \ldots,$$

откуда видно, что $w^*(z, \bar{z})$ не зависит от $\operatorname{Im}\psi(0)$ и $\operatorname{Im}\varphi'(0)$; что касается слагаемого $\bar{z}\varphi(0) + z\bar{\varphi}(0)$, то его можно считать отнесенным к $\psi(z) + \bar{\psi}(\bar{z})$. Это показывает, что упомянутые постоянные можно произвольно зафиксировать и, в частности, принять равными нулю.

Частное решение $\widetilde{w}(z, \bar{z})$ в том случае, когда нагрузкой является сила P, сосредоточенная в точке

$$\zeta = \rho e^{i\chi},$$

имеет вид:

$$\widetilde{w}(z, \bar{z}) = \frac{P}{16\pi D}(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})\lg(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta}) = \frac{P}{8\pi D}\lambda^2\lg\lambda, \tag{6}$$

где

$$\lambda = |z-\zeta|$$

представляет расстояние от точки приложения силы до рассматриваемой точки

$$z = re^{i\varphi}.$$

При нагрузке $p(\zeta, \bar{\zeta})$, распределенной по произвольному закону, частное решение может быть взято в виде:

$$\widetilde{w}(z, \bar{z}) = \frac{1}{16\pi D}\int(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})\lg(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})\,dp(\zeta, \bar{\zeta}), \tag{7}$$

где действие интегрирования понимается в смысле Стильтьеса. Например, в случае нескольких сил P_i, сосредоточенных в точках ζ_i,

$$\widetilde{w}(z, \bar{z}) = \frac{1}{16\pi D}\sum_{i=1}^{n} P_i(z-\zeta_i)(\bar{z}-\bar{\zeta}_i)\lg(z-\zeta_i)(\bar{z}-\bar{\zeta}_i). \tag{8}$$

В случае пластины с заделанным краем на контуре должны быть выполнены условия:

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial \nu} = 0; \tag{9}$$

для пластины, край которой оперт,

$$w = 0, \quad G = 0; \tag{10}$$

наконец, в случае свободного края

$$G = 0, \qquad N - \frac{\partial H}{\partial s} = 0. \tag{11}$$

Здесь через ν обозначена нормаль к контуру рассматриваемой области (через ϑ обозначим попутно угол между нормалью и осью x), G — изгибающий момент, H — крутящий момент, N — перерезывающая сила на площадке с нормалью ν, s — дуга контура.

Напомним формулы:

$$G = -\frac{1}{2} D \{(1+\mu)\Delta w + (1-\mu)[(w_{xx} - w_{yy})\cos 2\vartheta + 2w_{xy}\sin 2\vartheta]\},$$

$$H = \frac{1}{2} D(1-\mu)[(w_{yy} - w_{xx})\sin 2\vartheta + 2w_{xy}\cos 2\vartheta],$$

$$N = -D\frac{\partial \Delta w}{\partial \nu}.$$

Обозначим через $n = e^{i\vartheta}$ единичный вектор нормали к контуру; тогда, имея в виду соотношения

$$\frac{\partial}{\partial \nu} = n\frac{\partial}{\partial z} + \bar{n}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}, \qquad \frac{\partial}{\partial s} = i\left(n\frac{\partial}{\partial z} - \bar{n}\frac{\partial}{\partial \bar{z}}\right),$$

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial s} = \frac{1}{\rho},$$

$$\cos 2\vartheta = \frac{1}{2}(n^2 + \bar{n}^2), \qquad \sin 2\vartheta = \frac{1}{2i}(n^2 - \bar{n}^2),$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x\,\partial y} = i\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} - \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right), \qquad \frac{\partial^2}{\partial x^2} - \frac{\partial^2}{\partial y^2} = 2\left(\frac{\partial^2}{\partial z^2} + \frac{\partial^2}{\partial \bar{z}^2}\right)$$

(ρ — радиус кривизны дуги контура), приведем граничные условия (9)—(11) к виду:

$$w = 0, \quad A(w) = n\frac{\partial w}{\partial z} + \bar{n}\frac{\partial w}{\partial \bar{z}} = 0, \tag{9'}$$

$$w = 0, \quad B(w) = 2\frac{1+\mu}{1-\mu}\frac{\partial^2 w}{\partial z\,\partial \bar{z}} + n^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \bar{n}^2\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2} = 0, \tag{10'}$$

$$\begin{aligned} B(w) = 0, \quad C(w) = (5-\mu)\left(n\frac{\partial^3 w}{\partial z^2\,\partial \bar{z}} + \bar{n}\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z}^2\,\partial z}\right) - \\ - \frac{2(1-\mu)}{\rho}\left(n^2\frac{\partial^2 w}{\partial z^2} + \bar{n}^2\frac{\partial^2 w}{\partial \bar{z}^2}\right) - (1-\mu)\left(n^3\frac{\partial^3 w}{\partial z^3} + \bar{n}^3\frac{\partial^3 w}{\partial \bar{z}^3}\right). \end{aligned} \tag{11'}$$

Значение z на контуре области в дальнейшем будем обозначать буквой σ. В этой работе мы ограничимся в дальнейшем случаем круглой пластинки, радиус которой для простоты примем равным единице. Тогда

$$n = e^{i\vartheta} = \sigma, \quad \bar{n} = \frac{1}{\sigma}. \tag{12}$$

В силу (3) и (4) граничные условия могут быть записаны в виде: для заделанного края

$$\begin{aligned} &\frac{\varphi(\sigma)}{\sigma} + \sigma\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \psi(\sigma) + \bar{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) = -\widetilde{w}\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}\right), \\ &\varphi'(\sigma) + \bar{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \sigma\bar{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right) + \frac{1}{\sigma}\varphi(\sigma) + \sigma\psi'(\sigma) + \frac{1}{\sigma}\bar{\psi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right) = -A\left[\widetilde{w}\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}\right)\right]; \end{aligned} \tag{9''}$$

для опертого края

$$\frac{1}{\sigma}\varphi(\sigma)+\sigma\overline{\varphi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)+\psi(\sigma)+\overline{\psi}\left(\frac{1}{\sigma}\right)=-\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right),$$

$$\sigma\varphi''(\sigma)+2\frac{1+\mu}{1-\mu}\varphi'(\sigma)+\frac{1}{\sigma}\overline{\varphi}''\left(\frac{1}{\sigma}\right)+2\frac{1+\mu}{1-\mu}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)+ \qquad (10'')$$

$$+\sigma^2\psi''(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2}\overline{\psi}''\left(\frac{1}{\sigma}\right)=-B\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right];$$

для свободного края

$$\sigma\varphi''(\sigma)+2\frac{1+\mu}{1-\mu}\varphi'(\sigma)+\frac{1}{\sigma}\overline{\varphi}''\left(\frac{1}{\sigma}\right)+2\frac{1+\mu}{1-\mu}\overline{\varphi}'\left(\frac{1}{\sigma}\right)+$$

$$+\sigma^2\psi''(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2}\overline{\psi}''\left(\frac{1}{\sigma}\right)=-B\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right], \qquad (11'')$$

$$(3+\mu)\left[\sigma\varphi''(\sigma)+\frac{1}{\sigma}\overline{\varphi}''\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]-(1-\mu)\left[\sigma^2\varphi'''(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2}\overline{\varphi}'''\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]-$$

$$-2(1-\mu)\left[\sigma^2\psi''(\sigma)+\frac{1}{\sigma^2}\overline{\psi}''\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]-(1-\mu)\left[\sigma^3\psi'''(\sigma)+\frac{1}{\sigma^3}\overline{\psi}'''\left(\frac{1}{\sigma}\right)\right]=$$

$$=-C\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right].$$

Умножая эти равенства справа и слева на

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{d\sigma}{\sigma-z}$$

и интегрируя по контуру γ единичного круга, на основании известных правил вычисления интегралов Коши, получим (см. также (5)[1]:

для заделанного края

$$\frac{1}{z}\varphi(z)+\overline{\varphi}'(0)+\psi(z)+\overline{\psi}(0)=L(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)d\sigma}{\sigma-z},$$

$$\varphi'(z)+2\overline{\varphi}'(0)+\frac{1}{z}\varphi(z)+z\psi'(z)=K(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{A\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right]d\sigma}{\sigma-z}; \qquad (I)$$

для опертого края

$$\frac{1}{z}\varphi(z)+\overline{\varphi}'(0)+\psi(z)+\overline{\psi}(0)=L(z), \qquad (II)$$

$$z\varphi''(z)+2\frac{1+\mu}{1-\mu}\varphi'(z)+2\frac{1+\mu}{1-\mu}\overline{\varphi}'(0)+z^2\psi''(z)=M(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\gamma\frac{B\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right]d\sigma}{\sigma-z};$$

---

[1] Мусхелишвили Н. И. Некоторые задачи теории упругости, § 61, стр. 208 — 212, 1933.

для свободного края

$$\begin{gathered} z\varphi''(z)+2\frac{1+\mu}{1-\mu}\varphi'(z)+2\frac{1+\mu}{1-\mu}\bar{\varphi}'(0)+z^2\psi''(z)=M(z), \\ (3+\mu)z\varphi''(z)-(1-\mu)z^2\varphi'''(z)-2(1-\mu)z^2\psi''(z)-(1-\mu)z^3\psi'''(z)= \\ =N(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma}\frac{C\left[\widetilde{w}\left(\sigma, \frac{1}{\sigma}\right)\right]d\sigma}{\sigma-z}. \end{gathered} \tag{III}$$

2. Случай заделанной пластинки. Определив из системы дифференциальных уравнений (I) неизвестные функции $\varphi(z)$ и $\psi(z)$, после всех вычислений получим:

$$\begin{gathered} w(z, \bar{z})=\widetilde{w}(z, \bar{z})+2\,\mathrm{Re}\left\{L(z)-\frac{1}{2}L(0)-\right. \\ \left.-\frac{1}{2}(1-z\bar{z})\left[K(z)-\frac{1}{2}K(0)-zL'(z)\right]\right\}. \end{gathered} \tag{13}$$

Это решение было получено автором в 1927 г.[1]. Из него прямым путем можно получить известное решение Мичелля для изгиба круглой пластины с заделанными краями сосредоточенной силой.

Действительно, подставляя вместо $\widetilde{w}(\sigma, 1/\sigma)$ его значение (6), находим после элементарных выкладок:

$$L(z)=-\frac{P}{16\pi D}\left[\zeta\bar{\zeta}+\left(1-\frac{\zeta}{z}\right)(1-z\bar{\zeta})\lg(1-z\bar{\zeta})\right], \tag{14}$$

$$K(z)=-\frac{P}{16\pi D}\left[2-\bar{\zeta}z+\left(2-z\bar{\zeta}-\frac{\zeta}{z}\right)\lg(1-z\bar{\zeta})+\zeta\bar{\zeta}\right]. \tag{15}$$

По формулам (6) и (13) находим теперь:

$$\begin{gathered} w=\frac{P}{16\pi D}\left[(1-z\bar{z})(1-\zeta\bar{\zeta})+(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})\lg\frac{(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})}{(1-z\bar{\zeta})(1-\bar{z}\zeta)}\right]= \\ =\frac{P}{16\pi D}\left\{(1-r^2)(1-\rho^2)+[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varkappa)]\lg\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varkappa)}{1+r^2\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varkappa)}\right\}. \end{gathered} \tag{16}$$

3. Случай опертой пластинки. Решение также дано в упомянутой выше работе автора. Оно имеет вид:

$$\begin{gathered} w=\widetilde{w}(z, \bar{z})+2\mathrm{Re}\left\{L(z)-\frac{1}{2}L(0)-\right. \\ \left.-(1-z\bar{z})\frac{1-\mu}{4}z^{\frac{1-\mu}{2}-1}\int\limits_0^z\left[M(z)-\frac{1}{2}M(0)-z^2L''(z)\right]z^{-\frac{1-\mu}{2}}dz\right\}. \end{gathered} \tag{17}$$

В случае нагрузки сосредоточенной силой имеем:

$$M(z)=-\frac{P}{16\pi D}\left\{2\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[2+\lg(1-z\bar{\zeta})\right]+1-\zeta\bar{\zeta}-z\bar{\zeta}+\frac{1-\zeta\bar{\zeta}}{1-z\bar{\zeta}}\right\}. \tag{18}$$

Подстановка в (17) после элементарных преобразований дает:

$$w=\frac{P}{16\pi D}\left\{(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})\lg\frac{(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})}{(1-z\bar{\zeta})(1-\bar{z}\zeta)}-(1-z\bar{z})(1-\zeta\bar{\zeta})\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}-\right.\right.$$

$$\left.\left.-2\operatorname{Re} z^{-\frac{1+\mu}{2}}\int_0^z\frac{u^{-\frac{1-\mu}{2}}du}{1-\bar{\zeta}u}\right]\right\}.$$

Заменяя переменную интегрирования u на s/z, можно предыдущему выражению придать форму:

$$w=\frac{P}{16\pi D}\left\{(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})\lg\frac{(z-\zeta)(\bar{z}-\bar{\zeta})}{(1-z\bar{\zeta})(1-\bar{z}\zeta)}-\right.$$

$$\left.-(1-z\bar{z})(1-\zeta\bar{\zeta})\left[\frac{1-\mu}{1+\mu}-2\operatorname{Re}\int_0^1\frac{s^{-\frac{1-\mu}{2}}ds}{1-s\bar{\zeta}z}\right]\right\}=$$

$$=\frac{P}{16\pi D}\left\{[r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varkappa)]\lg\frac{r^2+\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varkappa)}{1+r^2\rho^2-2r\rho\cos(\varphi-\varkappa)}+\right.$$

$$\left.+(1-r^2)(1-\rho^2)\left[2\int_0^1\frac{[1-sr\rho\cos(\varphi-\varkappa)]\,s^{-\frac{1-\mu}{2}}ds}{1+s^2r^2\rho^2-2sr\rho\cos(\varphi-\varkappa)}-\frac{1-\mu}{1+\mu}\right]\right\}. \tag{19}$$

Решение рассмотренной задачи не столь прямым методом было в 1935 г. опубликовано Е. Рейсснером [2]. Как видно, оно получается как простой частный случай из нашего решения, данного в указанной выше работе.

4. Случай свободного края. Исключая из (III) функцию $\psi(z)$, получим:

$$\varphi''(z)=\frac{1}{2(3+\mu)}\left[\frac{1}{z}N(z)+(1-\mu)M'(z)\right]. \tag{20}$$

Так как функция $\varphi(z)$ должна быть голоморфна в круге единичного радиуса, то задача будет иметь решение при условии

$$N(0)=0. \tag{21}$$

Исключив теперь из второго уравнения (III) $\varphi''(z)$, получим:

$$z\,[z^2\psi''(z)]'=\frac{1}{2}zM'(z)-\frac{(1-\mu)}{2(3+\mu)}z^2M''(z)-\frac{1}{2(3+\mu)}zN'(z)-\frac{1+\mu}{(1-\mu)(3+\mu)}N(z),$$

откуда следует:

$$z^2\psi''(z)=\frac{1}{2}[M(z)-M(0)]-\frac{1-\mu}{2(3+\mu)}\int_0^z zM''(z)\,dz-$$

$$-\frac{1}{2(3+\mu)}N(z)-\frac{1+\mu}{(1-\mu)(3+\mu)}\int_0^z\frac{N(z)}{z}\,dz,$$

или после интегрирования по частям:

$$z^2\psi''(z)=\frac{2}{3+\mu}[M(z)-M(0)]-\frac{1-\mu}{2(3+\mu)}zM'(z)-$$

$$-\frac{1}{2(3+\mu)}N(z)-\frac{1+\mu}{(1-\mu)(3+\mu)}\int_0^z\frac{N(z)}{z}\,dz. \tag{22}$$

Поскольку функция $\psi(z)$ голоморфна в круге единичного радиуса, разложение правой части уравнения в ряд Тейлора должно начинаться с членов, содержащих z^2. Это приводит к условию

$$(1-\mu)M'(0)-N'(0)=0. \tag{23}$$

Частное решение $\widetilde{w}(z,\bar z)$ возьмем в форме (7).

Вычисляем $C\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right]$, $B\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right]$:

$$C\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right]=\frac{1}{16\pi D}\int dp\left\{(3+\mu)\left[\frac{\sigma}{\sigma-\zeta}+\frac{1}{1-\sigma\bar\zeta}\right]+(1-\mu)\left[\frac{\sigma^2}{(\sigma-\zeta)^2}+\frac{1}{(1-\sigma\bar\zeta)^2}\right]+\right.$$

$$\left.+2(1-\mu)\left[\frac{\sigma^2\bar\zeta}{\sigma-\zeta}+\frac{\zeta}{\sigma(1-\sigma\bar\zeta)}\right]-(1-\mu)\left[\frac{\sigma^3\zeta}{(\sigma-\zeta)^2}+\frac{\zeta}{\sigma(1-\sigma\bar\zeta)^2}\right]\right\},$$

$$B\left[\widetilde{w}\left(\sigma,\frac{1}{\sigma}\right)\right]=\frac{1}{16\pi D}\int dp\left\{2\,\frac{1+\mu}{1-\mu}\left[2+\lg\left(1-\frac{\zeta}{\sigma}\right)+\lg(1-\bar\zeta\sigma)\right]+\right.$$

$$\left.+\frac{\sigma(1-\sigma\bar\zeta)}{\sigma-\zeta}+\frac{\sigma-\zeta}{1-\bar\zeta\sigma}\right\}.$$

Далее находим значения интегралов:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^2}{(\sigma-\zeta)^2}\frac{d\sigma}{\sigma-z}=1,\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sigma(1-\sigma\bar\zeta)}\frac{d\sigma}{\sigma-z}=\frac{\bar\zeta}{1-z\bar\zeta};$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\sigma^3}{(\sigma-\zeta)^3}\frac{d\sigma}{\sigma-z}=z+2\zeta,\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{1}{\sigma(1-\sigma\bar\zeta)^2}\frac{d\sigma}{\sigma-z}=\frac{2\bar\zeta-z\bar\zeta^2}{(1-z\bar\zeta)^2},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\lg\left(1-\frac{\zeta}{\sigma}\right)}{\sigma-z}\,d\sigma=0,\qquad \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma\frac{\lg(1-\sigma\bar\zeta)}{\sigma-z}\,d\sigma=\lg(1-z\bar\zeta)$$

и т. д.

Теперь получаем:

$$N(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int dp\left\{4+(1-\mu)z\bar\zeta+\frac{(3+\mu)+(1-\mu)\zeta\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}+\frac{(1-\mu)(1-\zeta\bar\zeta)}{(1-z\bar\zeta)^2}\right\}, \quad (24)$$

$$M(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int dp\left\{\frac{2(1+\mu)}{1-\mu}[2+\lg(1-z\bar\zeta)]+1-\bar\zeta z-\zeta\bar\zeta+\frac{1-\zeta\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}\right\} \quad (25)$$

и согласно (21) и (23):

$$N(0) = -\frac{1}{2\pi D}\int dp = 0, \quad (26)$$

$$(1-\mu)M'(0) - N'(0) = \frac{1}{2\pi D}\int \bar\zeta dp = 0. \quad (27)$$

Отсюда следует, что условия (21) и (23) выражают требования равенства нулю главного вектора и суммы моментов всех внешних нагрузок относительно двух осей, лежащих в плоскости пластинки. Иными словами, система параллельных сил, приложенных к пластинке, должна находиться в равновесии. Таковы, как это следовало ожидать, условия существования решения поставленной задачи.

Заметим, что в силу (26) и (27) выражения (24) и (25) могут быть переписаны в виде:

$$N(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int\left\{\frac{(3+\mu)+(1-\mu)\zeta\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}+\frac{(1-\mu)(1-\zeta\bar\zeta)}{(1-z\bar\zeta)^2}\right\}dp, \quad (26')$$

$$M(z) = -\frac{1}{16\pi D}\int\left\{\frac{2(1+\mu)}{1-\mu}\lg(1-z\bar\zeta)+\frac{1-\zeta\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}-\zeta\bar\zeta\right\}dp. \quad (27')$$

Согласно (20) вычисляем теперь:

$$\varphi'(z) = \frac{1-\mu}{3+\mu}\frac{1}{16\pi D}\int\left\{\lg(1-z\bar\zeta)-\frac{1-\zeta\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}+(1-\zeta\bar\zeta)\right\}dp+\frac{1-\mu}{2(1+\mu)}\frac{1}{16\pi D}\int\zeta\bar\zeta\, dp\,.$$

Постоянная интегрирования находится из первого соотношения (III):

$$\varphi'(0) = \bar\varphi'(0) = \frac{1-\mu}{4(1+\mu)}M(0).$$

Далее из (22) находим:

$$z^2\psi''(z) = -\frac{2(1+\mu)}{16\pi D}\left[\frac{1}{3+\mu}+\frac{1}{1-\mu}\right]\int\lg(1-z\bar\zeta)\,dp +$$

$$+\frac{1}{16\pi D}\frac{1-\mu}{3+\mu}\int\left\{\frac{1-\zeta\bar\zeta}{(1-z\bar\zeta)^2}-\frac{1-2\zeta\bar\zeta}{1-z\bar\zeta}-\zeta\bar\zeta\right\}dp.$$

Дальнейшие интегрирования дают:

$$\varphi(z) = \frac{1-\mu}{3+\mu}\frac{1}{16\pi D}\int\left\{(z-\zeta)\lg(1-z\bar\zeta)+\frac{1}{2}\frac{1-\mu}{1+\mu}z\zeta\bar\zeta\right\}dp, \quad (28)$$

$$\psi(z) = \frac{2(1+\mu)}{16\pi D}\left(\frac{1}{3+\mu}+\frac{1}{1-\mu}\right)\int k(z\bar\zeta)\,dp+\frac{3+\mu}{1-\mu}\frac{1}{16\pi D}\int(1-z\bar\zeta)\lg(1-z\bar\zeta)\,dp -$$

$$-\frac{1-\mu}{3+\mu}\frac{1}{16\pi D}\int(1-\zeta\bar\zeta)\lg(1-z\bar\zeta)\,dp+\frac{1}{2}w_0+\frac{1}{2}(\omega_2+i\omega_1)z. \quad (29)$$

Здесь w_0, ω_1, ω_2 — постоянные интегрирования. Заметим, что w_0 в силу (5) можно считать вещественным числом; через $k(x)$ обозначена функция:

$$k(x)=\int_0^x \frac{\lg(1-\alpha)}{\alpha}\,d\alpha. \tag{30}$$

Согласно (3), (4), (7) составляем теперь выражение для искомой формы изгиба пластины:

$$w(z,\bar z)=\frac{1}{16\pi D}\int K(z,\bar z;\zeta,\bar\zeta)\,dp(\zeta,\bar\zeta)+w_0+\omega_2 x-\omega_1 y, \tag{31}$$

где ядро $K(z,\bar z;\zeta,\bar\zeta)$ определяется формулой:

$$K(z,\bar z;\zeta,\bar\zeta)=(z-\zeta)(\bar z-\bar\zeta)\left\{\lg(z-\zeta)+\lg(\bar z-\bar\zeta)+\frac{1-\mu}{3+\mu}[\lg(1-z\bar\zeta)+\right.$$

$$\left.+\lg(1-\bar z\zeta)]\right\}+\frac{(1-\mu)^2}{(1+\mu)(3+\mu)}z\bar z\zeta\bar\zeta+\frac{8(1+\mu)}{(1-\mu)(3+\mu)}[(1-z\bar\zeta)\lg(1-z\bar\zeta)+$$

$$+k(z\bar\zeta)+(1-\bar z\zeta)\lg(1-\bar z\zeta)+k(\bar z\zeta)]. \tag{32}$$

Как показывает полученное решение (31), прогиб пластины определяется с точностью до слагаемого

$$w_0+\omega_2 x-\omega_1 y, \tag{33}$$

представляющего перемещение пластины как твердого тела.

Пусть, например, требуется рассмотреть задачу об изгибе круглой пластины, находящейся под действием заданных нагрузок $p(\zeta,\bar\zeta)$, причем в n точках $A_1, A_2,\ldots, A_n$ перемещения w_i заранее заданы (например, равны нулю при наличии точечных опор). Вводя в рассмотрение неизвестные реакции R_1, $R_2,\ldots, R_n$ в точках A_i, будем иметь для определения $n+3$ неизвестных

$$R_1,\ R_2,\ldots,\ R_n;\ \omega_1,\ \omega_2,\ w_0,$$

во-первых, три уравнения статики, во-вторых, n уравнений типа:

$$\begin{aligned} w_i=&\frac{1}{16\pi D}\int K(z_i,\bar z_i;\zeta,\bar\zeta)\,dp(\zeta,\bar\zeta)+\\ &+\frac{1}{16\pi D}\sum_{k=1}^{n}K(z_i,\bar z_i;z_k,\bar z_k)R_k+w_0+\omega_2 x_i-\omega_1 y_i, \end{aligned} \tag{34}$$

(через $z_i=x_i+iy_i$ обозначены координаты точек A_i), выражающих, что прогиб в точках A_i имеет заданное значение. При $n=3$ реакции находятся, конечно, сразу из уравнений статики, а три уравнения (34) служат для нахождения постоянных w_0, ω_1, ω_2.

Поступила в редакцию 24 X 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лурье А. И. К задаче о равновесии пластины с опертыми краями. „Известия Ленинградского политехнического института". 1928. Т. XXXI. Стр. 305—320.

2. Reissner E. Über die Biegung der Kreisplatte mit exzentrischer Einzellast. „Mathematische" Annalen". 1935. 111. Стр. 777.

PROBLEMS CONCERNING THE BENDING OF A CIRCULAR PLATE

A. I. LOURYE

(Summary)

In 1928 the author gave the solution (by Mouskhelishvili's method) for a series of problems concarning the bending of circular plates in cases of clamped and supported edges with an arbitrary distribution of load on the plates.

From the above-mentioned solution the well-known Michell and Reissner solutions for the bending of a circular plate by a concentrated force with the above-mentioned conditions on the edges may be obtained as specific cases (§§ 2 and 3).

In § 4 the solution for the problem of the bending of a free circular plate is given.

For a solution to exist, the external forces must satisfy the three conditions of equilibrium for parallel forces.

The solution rendered in § 4 may be applied to the problem of the bending of a circular plate in the presence of a few arbitrarily distributed pointed supports.