АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА“

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 1, 1940

ПРОДОЛЬНЫЕ КОЛЕБАНИЯ СТЕРЖНЯ ПРИ НАЛИЧИИ ЛИНЕЙНОГО ЗАКОНА ПОСЛЕДЕЙСТВИЯ И РЕЛАКСАЦИИ

А. Ю. ИШЛИНСКИЙ

(Москва)

Многие материалы находящие применение в практике, не вполне упруги. Из класса не вполне упругих материалов следует особо выделить материалы обладающие свойством релаксации и свойством последействия. Под свойством релаксации понимается обычно способность тела изменять интенсивность своего напряженного состояния при неизменном деформированном состоянии, а под свойством последействия — способность тела деформироваться по прекращении изменения действующей на него нагрузки.

Максвелл [1] дал математическое описание явления релаксации, воспользовавшись дифференциальной зависимостью между напряжением материала σ и деформацией ε:

$$\frac{d\varepsilon}{dt}=\nu\sigma+\frac{1}{E}\frac{d\sigma}{dt},$$

где ν и E — физические константы.

Действительно, при $\varepsilon=\mathrm{const}$ имеем:

$$\sigma=\sigma_0 e^{-\nu Et}.$$

Больтцман [2], а позднее Вольтерра [3] дали описание явления релаксации одновременно с явлением последействия посредством интегрального соотношения:

$$\varepsilon(t)=\frac{1}{E}\sigma(t)+\int_{-\infty}^{t}\varphi(t,\tau)\varepsilon(\tau)\,d\tau,$$

где E — физическая константа, $\varphi(t,\tau)$ — некоторая функция, названная „наследственной“.

Явление последействия было описано Томпсоном [4] и при помощи дифференциальных соотношений. Для случая простого растяжения получается дифференциальная зависимость:

$$\sigma=E\varepsilon+\mu\dot{\varepsilon}.$$

Действительно, при $\sigma=\sigma_1=\mathrm{const}$

$$\varepsilon=\frac{\sigma_1}{E}+Ce^{-\frac{E}{\mu}t},$$

где C — константа, зависящая от начальных условий деформирования.

При $\varepsilon = \varepsilon_1 = \mathrm{const}$ имеем:

$$\sigma = E\varepsilon_1,$$

и, следовательно, уравнение Томпсона не дает описания явления релаксации, равно как и уравнение Максвелла не дает описания явления последействия. Тем не менее представляется возможным дать математическое описание последействия и релаксации посредством одного дифференциального соотношения, не прибегая к помощи интегральных уравнений.

Для этого достаточно несколько обобщить дифференциальные соотношения Максвелла и Томпсона, подчинив напряжение σ и деформацию ε дифференциальной зависимости

$$\dot{\sigma} + r\sigma = b\dot{\varepsilon} + nb\varepsilon, \tag{1}$$

где r, n и b — некоторые физические константы.

В самом деле, полагая $\sigma = \sigma_1 = \mathrm{const}$, получим в результате интегрирования дифференциального уравнения:

$$\varepsilon_1 = \frac{r}{nb}\sigma_1 + Ce^{-nt}, \tag{2}$$

т. е. явление последействия, происходящее тем интенсивнее, чем больше коэффициент n, который следует назвать скоростью последействия. Константа C зависит от начальных условий деформирования.

Обратно, полагая $\varepsilon = \varepsilon_1 = \mathrm{const}$, получим аналогично:

$$\sigma = \frac{nb}{r}\varepsilon_1 + De^{-rt}. \tag{3}$$

Константу r следует назвать скоростью релаксации.

Обратная величина

$$T = \frac{1}{r}$$

имеет в литературе название периода релаксации.

При весьма медленном деформировании материал, подчиняющийся приведенной выше зависимости, ведет себя как вполне упругий с модулем упругости $\frac{nb}{r}$. Действительно, при таком деформировании можно пренебречь скоростью изменения деформации ε и скоростью изменения напряжения σ. Следовательно, имеет место

$$r\sigma = nb\varepsilon.$$

Пусть в некоторый момент времени $t_0 = 0$ напряжению σ_0 соответствует некоторая деформация ε_0. Интегрируя правую и левую часть соотношения (1) по времени в пределах от $t = 0$ до $t = \tau$, получим:

$$\sigma_1 - \sigma_0 + \int_0^\tau r\sigma\,dt = b(\varepsilon_1 - \varepsilon_0) + \int_0^\tau bn\varepsilon\,dt.$$

При быстром изменении величин σ и ε, т. е. при весьма малом промежутке времени τ, интегралами, стоящими в правой и левой части этого соотношения, можно пренебречь. Имеем:

$$\sigma_1 - \sigma_0 = b(\varepsilon_1 - \varepsilon_0).$$

Таким образом при быстрых деформированиях материал ведет себя как вполне упругий с модулем упругости b.

Заметим, что существует механическая модель, деформирование которой подчиняется принятому выше закону (1).

Представим себе цилиндр, наполненный вязкой жидкостью, дно которого соединено пружиной жесткости c с поршнем. Если поршень соединить с другой пружиной жесткости b, то при усилии σ, действующем на вторую пружину, общая деформация обеих пружин составится из деформации первой пружины $\varepsilon_2 = \sigma/b$ и второй пружины $\varepsilon_1 = (\sigma - \mu\dot{\varepsilon}_1)/c$, где член $\mu\dot{\varepsilon}_1$ представляет собой сопротивление поршня перемещению в вязкой жидкости.

Таким образом

$$\varepsilon = \frac{\sigma}{b} + \frac{\sigma - \mu\dot{\varepsilon}_1}{c}.$$

С другой стороны,

$$\varepsilon_1 = \varepsilon - \varepsilon_2$$

и, следовательно,

$$\dot{\varepsilon}_1 = \dot{\varepsilon} - \dot{\varepsilon}_2 = \dot{\varepsilon} - \frac{\dot{\sigma}}{b}.$$

Исключая величину ε_1 из выражения для ε, получим:

$$\varepsilon = \frac{\sigma(b+c)}{bc} - \frac{\mu}{c}\dot{\varepsilon} + \frac{\mu}{bc}\dot{\sigma},$$

или

$$\dot{\sigma} + \frac{b+c}{\mu}\sigma = \frac{bc}{\mu}\varepsilon + b\dot{\varepsilon},$$

что и представляет зависимость (1), если положить

$$\frac{c}{\mu} = n, \qquad \frac{b+c}{\mu} = r.$$

Заметим, что для модели всегда имеет место $r > n$, т. е. скорость релаксации должна быть больше скорости последействия. В дальнейшем мы покажем, что то же имеет место и для реального материала.

Покажем, что зависимость (1) представляет частный случай интегральной зависимости Больтцмана-Вольтерра при соответствующем выборе ядра (функции наследственности) $\varphi(t, \tau)$. Действительно, считая σ и ε функциями времени, соотношение (1) можно представить в виде:

$$e^{-nt}\frac{d}{dt}(e^{nt}\varepsilon) = \frac{\dot{\sigma}}{b} + \frac{r\sigma}{b},$$

откуда

$$\varepsilon = e^{-nt}\left\{C + \int e^{n\tau}\left[\frac{1}{b}\dot{\sigma}(\tau) + \frac{r}{b}\sigma(\tau)\right]d\tau\right\}.$$

Наличие множителя $e^{n\tau}$ позволяет назначить интегралу, стоящему в правой части равенства, пределы $-\infty$ и t. Далее

$$\int_{-\infty}^{t} e^{n\tau}\dot{\sigma}(\tau)\,d\tau = e^{n\tau}\sigma(\tau)\Big|_{-\infty}^{t} - \int_{-\infty}^{t} ne^{n\tau}\sigma(\tau)\,d\tau$$

и таким образом имеем:

$$\varepsilon(t) = Ce^{-nt} + \frac{1}{b}\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t}\frac{1}{b}(r-n)e^{-n(t-\tau)}\sigma(\tau)\,d\tau.$$

Константу C следует положить равной нулю, так как σ и ε при $t \to -\infty$ стремятся к нулю (естественное состояние тела).

Таким образом

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{b}\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t}(r-n)\,e^{-n(t-\tau)}\frac{1}{b}\sigma(\tau)\,d\tau$$

и функция наследственности имеет вид:

$$\varphi(t, \tau) = \frac{r-n}{b}e^{-n(t-\tau)}.$$

Точно так же можно было бы получить:

$$\sigma(t) = b\varepsilon(t) - \int_{-\infty}^{t}(r-n)\,e^{-r(t-\tau)}\,b\varepsilon(\tau)\,d\tau,$$

т. е. ядро

$$-(r-n)\,e^{-r(t-\tau)}$$

является резольвентой ядра

$$(r-n)\,e^{-n(t-\tau)}.$$

Совершенно очевидно, что обратно всякое интегральное уравнение Вольтерра

$$\varepsilon(t) = \frac{1}{b}\sigma(t) + \int_{-\infty}^{t}\varphi(t, \tau)\,\sigma(\tau)\,d\tau$$

с ядром вида

$$Ae^{-\alpha(t-\tau)}$$

дифференцированием может быть сведено к дифференциальному соотношению между σ и ε, включающему σ, ε, $\dot\sigma$ и $\dot\varepsilon$ в линейной комбинации.

Заметим, что ядра такого типа дают плохое совпадение экспериментальных кривых деформирования материалов с теоретическими. Поэтому на предлагаемый закон следует смотреть как на описывающий явление в первом приближении. Кроме того, как и в отношении соотношений Больтцмана-Вольтерра так и в отношении соотношения (1) может быть сделан упрек в том, что они не описывают чисто упругих явлений, которые почти всегда имеют место при напряжениях, не превышающих предела упругости, равно как и не описывают явления упрочнения и наклепа наблюдаемого в металлах. Это обстоятельство может быть учтено дальнейшим обобщением соотношения (1). Именно, можно принять:

$$\dot\sigma + r\sigma = b\dot\varepsilon + nb\varepsilon + \alpha(r-n)k \quad \text{при} \quad |r\sigma - nb\varepsilon| > (r-n)\sigma_s,$$

где

$$\alpha = \operatorname{sign}(r\sigma - nb\varepsilon)$$

и

$$\dot\sigma = b\dot\varepsilon \quad \text{при} \quad |r\sigma - nb\varepsilon| < (r-n)\sigma_s.$$

Указанные соотношения, обобщающие наше основное, могут быть получены изучением законов деформирования модели, приведенной выше, усложненной кулоновой силой трения σ_s поршня о стенки.

Оставляя эти усложненные соотношения в стороне, изучим продольные колебания стержня, материал которого подчиняется закону (1).

Ограничимся случаем однородного стержня длиной l постоянного поперечного сечения F. Если расстояние какого-либо сечения от одного из его концов обозначить через x, а перемещение сечения в направлении оси через u, то при малых смещениях будем иметь:

$$\varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}.$$

Выделим элемент стержня длиной dx. Уравнение движения этого элемента имеет вид:

$$\rho F dx \frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = F\left(\sigma + \frac{\partial \sigma}{\partial x} dx\right) - F\sigma,$$

откуда

$$\frac{\partial \sigma}{\partial x} = \rho \frac{\partial^2 u}{\partial t^2}.$$

Покажем теперь, что задача о продольных колебаниях этого стержня может иметь лишь единственное решение при условии упругой заделки его концов (в частности, при свободных или при жестко закрепленных концах) и при условии задания перемещений сечений, скорости $\frac{\partial u}{\partial t}$ сечений и распределения напряжений σ в начальный момент времени $t_0 = 0$.

Значение распределения напряжений по стержню существенно потому, что одним и тем же деформациям в материале, обладающем свойством релаксации и последействия, могут соответствовать различные напряжения.

Пусть $u_1(x, t)$ и $u_2(x, t)$ — два решения задачи, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям.

Вследствие линейности всех соотношений разность $u = u_1 - u_2$ будет также решением задачи, но с нулевыми начальными данными, т. е.

$$u(x, 0) = 0, \quad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t} = 0, \quad \frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma_0}{\partial x} = 0.$$

Покажем, что u тождественно равно нулю. Для этой цели рассмотрим интеграл:

$$W = \int_0^l \left\{ \frac{\sigma^2}{2b} + \frac{nb}{2(r-n)}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2 \right\} dx. \tag{4}$$

(Нетрудно видеть, что первый член подинтегрального выражения дает значение суммы потенциальных энергий обеих пружин приведенной выше модели).

Составим производную этого интеграла по времени:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \int_0^b \left\{ \frac{1}{b}\sigma\frac{\partial \sigma}{\partial t} + \frac{nb}{r-n}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right)\left(\frac{\partial \varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{b}\frac{\partial \sigma}{\partial t}\right) + \rho\frac{\partial u}{\partial t}\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} \right\} dx. \tag{5}$$

Замечая, что

$$\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial \sigma}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} = \varepsilon,$$

интегрированием по частям легко получить:

$$\int_0^l \frac{\partial\sigma}{\partial x}\frac{\partial u}{\partial t}\,dx = \sigma\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^l - \int_0^l \sigma\frac{\partial^2 u}{\partial t\,\partial x}\,dx = \sigma\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^l - \int_0^l \sigma\frac{\partial\varepsilon}{\partial t}.$$

Производя подстановку и приведение подобных членов, получим из (5):

$$\frac{\partial W}{\partial t} = \sigma\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^l + \int_0^l \left[-\sigma + \frac{nb}{r-n}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right)\right]\left(\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{b}\frac{\partial\sigma}{\partial t}\right)dx. \tag{6}$$

При упругой заделке концов стержня должно иметь место:

$$\sigma_0 = k_0 u_0 \quad \text{при} \quad x = 0 \quad \text{и} \quad \sigma_1 = -k_1 u_1 \quad \text{при} \quad x = l.$$

Таким образом

$$\sigma\frac{\partial u}{\partial t}\Big|_0^l = -k_1 u_1 \frac{\partial u_1}{\partial t} - k_0 u_0 \frac{\partial u_0}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(k_0 u_0^2 + k_1 u_1^2). \tag{7}$$

Далее из соотношения (1) следует:

$$\frac{\partial\varepsilon}{\partial t} - \frac{1}{b}\frac{\partial\sigma}{\partial t} = n\varepsilon - \frac{r}{b}\sigma \tag{8}$$

и, следовательно, с помощью (7) и (8) из соотношения (6) имеем:

$$\frac{\partial W}{\partial t} = -\frac{\partial}{\partial t}\frac{1}{2}(k_0 u_0^2 + k_1 u_1^2) + \int_0^l \frac{r\sigma - nb\varepsilon}{r-n}\left(n\varepsilon - \frac{r\sigma}{b}\right)dx, \tag{9}$$

откуда с помощью (4) получим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial t}\left\{\int_0^l \left[\frac{\sigma^2}{2b} + \frac{nb}{2(r-n)}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right)^2 + \frac{\rho}{2}\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right]dx + \frac{1}{2}k_0 u_0^2 + \right.\\ \left. + \frac{1}{2}k_1 u_1^2\right\} = -\int_0^l \frac{(r\sigma - nb\varepsilon)^2}{b(r-n)}\,dx.\end{gathered} \tag{10}$$

В правой части получившегося равенства стоит заведомо отрицательная или равная нулю величина, поэтому выражение, стоящее в левой части равенства, с течением времени может лишь убывать, а так как в начальный момент времени σ, u $\left(\text{и, следовательно, } \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x}\right)$, $\frac{\partial u}{\partial t}$ равны нулю, то для другого момента времени имеем:

$$\int_0^l \left\{\frac{\sigma^2}{2b} + \frac{nb}{2(r-n)}\left(\varepsilon - \frac{\sigma}{b}\right)^2 + \rho\left(\frac{\partial u}{\partial t}\right)^2\right\}dx + \frac{1}{2}k_0 u_0^2 + \frac{1}{2}k_1 u_1^2 \leqslant 0,$$

откуда следует, что при условии $r > n$ каждый член подинтегрального выражения в отдельности будет равен нулю, т. е.

$$\sigma = 0, \quad \varepsilon = \frac{\partial u}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial t} = 0, \quad u_1 = 0, \quad u_2 = 0$$

и, следовательно,

$$u \equiv 0,$$

что и доказывает единственность решения. Как видим, условие превышения скорости релаксации r над скоростью последействия n оказалось существенным для доказательства. Если бы это было не так, то стержень имел бы способность к самовозбуждению своих колебаний, что физически не реально (для модели, приводимой выше, случай $r > n$ соответствует отрицательному значению коэффициента вязкости).

Для дальнейших исследований удобно исключить из рассмотрения величины σ и ε. Дифференцируя основное соотношение по x, получим:

$$\frac{\partial^2\sigma}{\partial x\partial t}+r\frac{\partial\sigma}{\partial x}=b\frac{\partial^2\varepsilon}{\partial x\partial t}+bn\frac{\partial\varepsilon}{\partial x},$$

а так как

$$\frac{\partial\sigma}{\partial x}=\rho\frac{\partial^2 u}{\partial t^2},\qquad \varepsilon=\frac{\partial u}{\partial x},$$

то

$$\rho\frac{\partial^3 u}{\partial t^3}+\rho r\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=b\frac{\partial^3 u}{\partial x^2\partial t}+bn\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}. \tag{11}$$

Полученное дифференциальное уравнение третьего порядка и надлежит решать при изучении колебания стержня при наличии релаксации и последействия простейшего типа. Уравнения характеристик, получаемые из соотношения

$$\rho\,dx^3=b\,dt^2\,dx,$$

имеют вид:

$$dx=\pm\sqrt{\frac{\rho}{b}}\,dt\quad\text{и}\quad x=\text{const}.$$

Они дают основание предполагать, что решения уравнения (11) будут одновременно обладать гиперболическими и параболическими особенностями, т. е. наряду с волновыми давлениями будет иметь место затухание движения частиц стержня.

Уравнение (11) для перемещения u может быть разрешено обычным методом Фурье разделения переменных. Действительно, полагая

$$u=X(x)\,T(t), \tag{12}$$

получаем:

$$X(\rho T'''+r\rho T'')=X''(bT'+nbT), \tag{13}$$

или

$$\frac{\rho T'''+r\rho T''}{bT'+nbT}=\frac{X''}{X}=\pm a^2,$$

где a^2 — произвольная постоянная, перед которой в задаче о колебаниях стержня конечной длины следует сохранить знак минус.

Разберем в качестве примера задачу о продольных колебаниях стержня с заделанными концами. В этом случае имеет место:

$$u(0,t)=0,\quad u(l,t)=0,\quad\text{или}\quad X(0)=0,\quad X(l)=0,$$

а так как

$$X=A\cos ax+B\sin ax,$$

то получаем условие нетривиального решения в виде:

$$A=0, \quad al=m\pi,$$

где m — целое число.

Для функции $T(t)$ получаем дифференциальное уравнение:

$$T'''+rT''+\mu(T'+nT)=0, \tag{14}$$

где

$$\mu=\frac{ba^2}{\rho}=\frac{b\pi^2}{\rho l^2}m^2. \tag{15}$$

Соответствующее характеристическое уравнение

$$\lambda^3+r\lambda^2+\mu(\lambda+n)=0 \tag{16}$$

имеет все коэффициенты положительными и, следовательно, не может иметь положительных корней. Возможны два случая: все три корня отрицательны и один корень отрицателен, два другие сопряженные комплексные. В последнем случае вещественные части комплексных корней отрицательны, если только $r>n$. Действительно, если обозначить корни соответственно через

$$\alpha+\beta i, \quad \alpha-\beta i, \quad \gamma,$$

согласно теореме Вьетта имеем:

$$2\alpha+\gamma=-r, \quad \alpha^2+\beta^2+2\alpha\gamma=\mu, \quad (\alpha^2+\beta^2)\gamma=-n\mu. \tag{17}$$

Деля третье равенство на второе и замечая, что

$$-n>-r,$$

имеем:

$$\frac{(\alpha^2+\beta^2)\gamma}{\alpha^2+\beta^2+2\alpha\gamma}=-n>2\alpha+\gamma,$$

откуда

$$0>2\alpha[\alpha^2+2\alpha\gamma+\gamma^2+\beta^2],$$

что и доказывает отрицательность α.

Далее, если второе равенство Вьетта умножить на γ и вычесть из него третье, то получим:

$$2\alpha\gamma^2=\mu(n+\gamma).$$

По только что доказанному

$$2\alpha\gamma^2<0$$

и, следовательно,

$$n+\gamma<0,$$

откуда

$$-r<\gamma<-n,$$

если принять во внимание первое из равенств (17).

Покажем теперь, что появление трех отрицательных корней характеристического уравнения возможно лишь при достаточно малых по сравнению с r значениях n и при μ, заключенных в известных пределах.

Чтобы исследовать этот вопрос, предположим, что все корни уравнения (16) отрицательны и равны соответственно γ_1, γ_2, γ_3, причем пусть

$$\gamma_1\leqslant\gamma_2\leqslant\gamma_3\leqslant 0. \tag{18}$$

Равенства (17) в этом случае примут вид:

$$\gamma_1+\gamma_2+\gamma_3=-r, \quad \gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1=\mu, \quad \gamma_1\gamma_2\gamma_3=-n\mu. \tag{19}$$

При принятых обозначениях корень γ_3 наименьший по абсолютной величине, поэтому

$$3|\gamma_3| \leqslant r.$$

С другой стороны, деля второе из равенств (19) на третье, получим:

$$\frac{1}{\gamma_1}+\frac{1}{\gamma_2}+\frac{1}{\gamma_3}=-\frac{1}{n}, \quad \text{или} \quad \frac{1}{|\gamma_1|}+\frac{1}{|\gamma_2|}+\frac{1}{|\gamma_3|}=\frac{1}{n},$$

откуда при условии

$$|\gamma_1|+|\gamma_2|+|\gamma_3|=r$$

следует, что наименьшее значение величина $\frac{1}{n}$ принимает при

$$|\gamma_1|=|\gamma_2|=|\gamma_3|=\frac{r}{3}.$$

Таким образом в случае отрицательных корней всегда должно иметь место

$$\frac{9}{r} \leqslant \frac{1}{n}, \quad \text{или} \quad n \leqslant \frac{r}{9}.$$

Считая корень γ_3 известным, можно найти оставшиеся два корня решением квадратного уравнения:

$$\lambda^2+(r+\gamma_3)\lambda+\mu+r\gamma_3+\gamma_3^2=0,$$

которое получится при делении левой части характеристического уравнения на двучлены $\lambda-\gamma_3$ при отделении корня γ_3.

Решение этого квадратного уравнения имеет вид:

$$\lambda=\frac{-(r+\gamma_3)\pm\sqrt{(r+\gamma_3)^2-4(\mu+r\gamma_3+\gamma_3^2)}}{2}.$$

Чтобы значение корней было вещественно, необходимо

$$(r+\gamma_3)^2-4(\mu+r\gamma_3+\gamma_3^2) \geqslant 0. \tag{20}$$

Далее в силу принятого условия (18)

$$\frac{-(r+\gamma_3)+\sqrt{(r+\gamma_3)^2-4(\mu+r\gamma_3+\gamma_3^2)}}{2}<\gamma_3. \tag{21}$$

Решение неравенств (20), (21) относительно μ приводит к неравенствам;

$$-\gamma_3(2r+3\gamma_3)<\mu<\frac{1}{4}(r^2-2r\gamma_3-3\gamma_3^2).$$

При $\gamma_3=0$ (в этом случае $n=0$ и последействие отсутствует) имеем условие:

$$0<\mu<\frac{1}{4}r^2.$$

При увеличении абсолютного значения γ_3 верхняя и нижняя границы возможного значения γ_3 возрастают, приближаясь вместе с тем друг к другу

При наибольшем значении $|\gamma_3|$, т. е. при $\gamma_3=-r/3$, три вещественных корня имеют место лишь при

$$\mu=\frac{r^2}{3}.$$

В этом случае все три корня равны между собой.

Если разделить третье из равенств (19) на второе, то получим:

$$\frac{\gamma_1\gamma_2\gamma_3}{\gamma_1\gamma_2+\gamma_2\gamma_3+\gamma_3\gamma_1}=-n,$$

откуда

$$n=\frac{-\gamma_3}{1+\frac{\gamma_3}{\gamma_1}+\frac{\gamma_3}{\gamma_2}}<-\gamma_3.$$

Следовательно, при уменьшении абсолютного значения γ_3 имеет место уменьшение n.

Решение дифференциального уравнения (14) для функции $T(t)$ имеет вид:

$$T=D_1 e^{\lambda_1 t}+D_2 e^{\lambda_2 t}+D_3 e^{\lambda_3 t}, \tag{22}$$

где λ_1, λ_2, λ_3 — корни характеристического уравнения (16).

Заметим, что согласно (15) для каждого m имеет место своя система значений корней характеристического уравнения.

Общее решение дифференциального уравнения колебаний (11) запишется, таким образом, в виде:

$$u(x, t)=\sum_{m=1}^{\infty}\left(D_{1, m} e^{\lambda_{1, m} t}+D_{2, m} e^{\lambda_{2, m} t}+D_{3, m} e^{\lambda_{3, m} t}\right)\sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{23}$$

Остается удовлетворить начальным условиям. Пусть в начальный момент времени $t=0$ известны: перемещение u, скорость $\frac{\partial u}{\partial t}$ и ускорение $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial\sigma}{\partial x}$ как функции абсциссы x сечений стержня.

Разлагая эти функции в ряды по синусам кратных углов в интервале $0\leqslant x\leqslant l$, получим:

$$u(x, 0)=\sum A_m\sin\frac{m\pi x}{l}, \qquad \frac{\partial u(x, 0)}{\partial t}=\sum B_m\sin\frac{m\pi x}{l},$$
$$\frac{\partial^2 u(x, 0)}{\partial t^2}=\sum C_m\sin\frac{m\pi x}{l}. \tag{24}$$

Производя подсчет $\frac{\partial u}{\partial t}$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}$ из общего решения, полагая в нем $t=0$ и сравнивая коэффициенты при $\sin\frac{m\pi x}{l}$, получим уравнения

$$D_1+D_2+D_3=A, \qquad \gamma_1 D_1+\gamma_2 D_2+\gamma_3 D_3=B,$$
$$\gamma_1^2 D_1+\gamma_2^2 D_2+\gamma_3^2 D_3=C \tag{25}$$

для определения констант D_1, D_2, D_3 (индекс m в уравнениях опущен).

Детерминант этой системы (25)

$$\Delta=(\gamma_1-\gamma_2)(\gamma_2-\gamma_3)(\gamma_3-\gamma_1), \tag{26}$$

вообще говоря, отличен от нуля, за исключением случая кратных корней.

Если же при некотором значении m встречаются кратные корни, то следует поступить так, как это обычно делается в теории линейных дифференциальных уравнений. Именно, если, например, $\lambda_2=\lambda_3$, то решение уравнения (14) берем в виде

$$T=D_1 e^{\lambda_1 t}+D_2 e^{\lambda_2 t}+D_3 te^{\lambda_3 t}$$

и для определения D_1, D_2, D_3 получим уравнения

$$D_1+D_2=A, \qquad D_1\lambda_1+D_2\lambda_2+D_3=B, \qquad D_1\lambda_1^2+D_2\lambda_2^2+2D_3\lambda_2=C$$

с детерминантом

$$\Delta = \lambda_1 (\lambda_1 - \lambda_2).$$

Наконец, в исключительном случае трех равных корней решение уравнения (14) имеет вид:

$$T = D_1 e^{\lambda_1 t} + D_2 t e^{\lambda_1 t} + D_3 t^2 e^{\lambda_1 t}$$

и детерминант обратится в единицу.

Таким образом все константы общего решения могут быть найдены.

Заметим, что обращение детерминанта (26) в нуль возможно в конечном числе случаев. Это обращение в нуль возможно лишь для отрицательных корней характеристического уравнения, а эти последние могут иметь место только при

$$n < \frac{r}{9} \quad \text{и} \quad 0 < \mu < \frac{r^2}{3}.$$

Но в силу (15) последнее неравенство будет справедливо только для конечного числа значений m.

Это обстоятельство решает вопрос о сходимости ряда (23), которым представлено решение задачи. При $t = 0$ ряд сходится, ибо он представляет начальные значения u в интервале $0 \leqslant x \leqslant l$. При $t > 0$ у членов ряда появляются множители вида $e^{\varkappa t}$, так как корни характеристического уравнения (16) либо отрицательные, либо комплексные с отрицательной вещественной частью. Эти множители могут лишь улучшить сходимость ряда ($\varkappa < 0$).

При $t \to \infty$ колебания будут затухать. Заметим, что колебания представлены членами вида:

$$e^{\alpha t} (D_1 \cos \beta t + D_2 \sin \beta t) \qquad (\alpha < 0).$$

Но из характеристического уравнения (16) следует, что при возрастании μ один из корней стремится (убывая по абсолютной величине) к значению $-n$. Так как два другие корня при больших значениях μ становятся комплексными с отрицательными вещественными частями, то согласно первому из равенств (17)

$$2\alpha = -r - \gamma$$

(где γ — значение отрицательного корня, а α — значение вещественной части комплексного корня) при возрастании μ величина α стремится, возрастая по абсолютной величине, к значению

$$-\frac{r-n}{2}.$$

Далее из второго равенства (17) следует:

$$\beta^2 = \mu - 2\alpha\gamma - \alpha^2 > \mu - \frac{r-n}{2} r - r^2,$$

т. е. с возрастанием μ и соответственно согласно (15) числа m полуволн колебания стержня возрастает частота колебаний β, равно как и декремент затухания α. Таким образом колебания стержня с линейным законом последействия и релаксации сопровождаются сравнительно быстрым затуханием высоких тонов колебания, с „освобождением“ основного тона (если он существует), так как может случиться, что для $m = 1$ все три корня характеристического уравнения будут отрицательными и соответствующее движение будет апериодическим. Кроме того, как было показано выше, для колебаний стержня с последействием и релаксацией возможен и такой случай, когда основной тон существует и быть может существует несколько следующих тонов (соответственно для $m=2$, 3 и т. д.). Затем для ряда чисел m соответствующие тона пропадают из-за апериодичности движения, и далее, при больших числах m, соответствующие им тона появляются вновь.

Обратимся теперь к изучению волновых движений стержня. Ограничимся здесь рассмотрением распространения волн простейшего типа. Для этой цели найдем частные решения уравнения (11) в виде:

$$u = Ce^{ipt+i(c+if)x}, \tag{27}$$

величины p, c, f будем считать действительными. Подставляя выражение (27) в дифференциальное уравнение (11), замечаем, что оно удовлетворится при условии:

$$-i\rho p^3 - r\rho p^2 = bip\,(ic+f)^2 + bn\,(ic+f)^2,$$

или, разделяя вещественную и мнимую части, имеем:

$$n(f^2-c^2) - 2pcf = -\frac{r}{b}p^2\rho, \qquad p(f^2-c^2) + 2ncf = -\frac{1}{b}p^3\rho,$$

откуда

$$cf = \frac{1}{b}\,\frac{p^3\rho\,(r-n)}{2\,(n^2+p^2)} = q, \qquad f^2 - c^2 = -\frac{1}{b}p^2\rho\,\frac{p^2+rn}{n^2+p^2} = -2s, \tag{28}$$

где

$$q>0, \quad s>0.$$

Решая систему (28), получим:

$$f^2 = -s \pm \sqrt{s^2+q^2}, \qquad c^2 = s \pm \sqrt{s^2+q^2},$$

где перед радикалом достаточно удержать знак плюс, так как знак минус меняет лишь роли f и c в решении.

Таким образом

$$f = \pm\sqrt{-s+\sqrt{s^2+q^2}} \quad \text{и} \quad c = \pm\sqrt{s+\sqrt{s^2+q^2}}.$$

Если взять вещественную часть найденного частного решения уравнения, то получим:

$$u = Ce^{-fx}\cos(pt+cx),$$

откуда следует, что p представляет собой частоту волны, c характеризует длину волны (длина волны $\lambda = 2\pi/c$), а f — затухание волны при ее продвижении вдоль стержня.

Выражения для f и c показывают, что затухание волны и скорость распространения p/c зависят от частоты волны p, т. е. имеет место дисперсия простейших волн.

Если частота p весьма мала, то

$$q = \frac{\rho}{b}\,\frac{p^3(r-n)}{2(n^2+p^2)} = \frac{\rho}{b}\,\frac{r-n}{2n^2}p^3 + O(p^5), \qquad 2s = \frac{\rho}{b}p^2\,\frac{p^2+rn}{n^2+p^2} = \rho\frac{p^2 r}{bn} + O(p^4)$$

и

$$f^2 \approx -\frac{\rho p^2 r}{2bn} + \sqrt{\left(\frac{\rho p^2 r}{2bn}\right)^2 + \left(\frac{(r-n)\rho p^3}{2bn^2}\right)^2} = -\frac{\rho p^2 r}{2bn}\left(1 - \sqrt{1 + \left[\frac{(r-n)p}{rn}\right]^2}\right) = O(p^4),$$

т. е. затухание имеет порядок квадрата частоты и весьма мало.

Для c^2 имеем значение:

$$c^2 \approx \rho\frac{p^2 r}{2bn} + \sqrt{\left(\rho\frac{p^2 r}{2bn}\right)^2 + \left(\rho\frac{(r-n)p^3}{2bn^2}\right)^2} = \rho\frac{p^2 r}{bn} + O(p^4),$$

и следовательно, скорость распространения волны

$$a = \frac{p}{c} = \sqrt{\frac{b}{\rho}\frac{n}{r}}$$

не зависит от частоты.

Точно так же при весьма большой частоте p

$$q = \rho\frac{r-n}{2b}p + O(p^0), \qquad s = \rho\frac{1}{2b}p^2 + O(p),$$

$$c^2 \approx \frac{p^2}{2b} + \sqrt{\left(\frac{p^2}{2b}\right)^2 + \left(\frac{r-n}{2b}p\right)^2} = \frac{p^2}{b} + O(p)$$

и скорость распространения волны

$$a = \frac{p}{c} = \sqrt{\frac{b}{\rho}}$$

опять не зависит от частоты.

Затухание f выражается в этом случае в виде:

$$f \approx -\rho\frac{p^2}{2b} + \sqrt{\left(\rho\frac{p^2}{2b}\right)^2 + \left(\rho\frac{(r-n)p}{2b}\right)^2} =$$

$$= \rho\frac{p^2}{2b}\left(-1 + \sqrt{1 + \frac{(r-n)^2}{p^2}}\right) = \frac{(r-n)^2}{4b} + O\left(\frac{1}{p}\right),$$

т. е. стремится к некоторой постоянной.

Решение задачи Коши для стержня бесконечной длины, подобное тому, какое имеется для абсолютно упругого стержня, пока не удалось получить.

Существенно при этом отметить качественную разницу между абсолютно упругим стержнем и стержнем с релаксацией и последействием. Если в первом случае можно искать волновые решения с разрывом непрерывности скоростей и применять их к практическим расчетам, то во втором случае это уже недопустимо, ибо задача требует задания вторых производных смещения (или напряжений) вдоль стержня.

Таким образом явление удара здесь непременно будет сопровождаться возникновением весьма больших напряжений и весь характер волнового движения при ударе будет совершенно иным.

Поступила в редакцию 16 X 1939.

Институт механики
Акад. Наук Союза ССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Clerk I. Maxwell. On the Dynamical Theory of Gases. Philosophical Transactions of the R. Soc. of London 1867. Vol. 157. Part I.
2. Boltzmann. Wiss. Abh. 1874. Vol. 1. Wien-Berlin. 10. 1875.
3. Volterra V. Leçons sur les fonctions de lignes (Coll. Borel). Paris. Gauthier-Villars. 1913.
4. Tompson. Philos. Transactions of the R. Soc. of London. Ser. A. 1932.

LONGITUDINAL OSCILLATIONS OF A BAR WHEN FOR THE RELAXATION AND THE ELASTIC POST-ACTION THE LINEAR LAW IS ADOPTED

A. J. ISHLINSKY

(Summary)

The work generalizes the well-known Maxwell equation for the phenomenon of relaxation.

The generalized equation has form (1), where σ is the stress, ε — the deformation of the bar, b — the elastic constant, r and n are constants.

The mechanical model whose deformation follows the generalized law in the work is described, and the possible further development of this law is also indicated.

Further, equation (11) corresponding to the longitudinal oscillations of a bar is derived and the uniqueness of its solution is proved as well as the procedure for arriving at it by Fourier's method.

As an example the oscillations of a bar with clamped ends are considered. The form of oscillation is given by expression (23) where $\lambda_{1,n}$, $\lambda_{2,n}$, $\lambda_{3,n}$ are the roots of the characteristic equation (16) and the value of μ is determined by formula (15).

For a number of values of m the movement will be aperiodic, and for the other values it will be damping.

Wave motions of the simplest type (27) are discussed at the end of the work.

It appears from the analysis that dispersion of the waves takes place, and for the major values of frequency the spreading velocity of the waves approaches $\sqrt{\frac{b}{\rho}}$, while for the minute values it approaches $\sqrt{\frac{bn}{\rho r}}$.