А К А Д Е М И Я   Н А У К   С С С Р
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

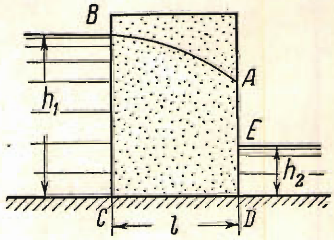
Т. IV, в. 1, 1940

РАСЧЕТ ФИЛЬТРАЦИИ ЧЕРЕЗ ЗЕМЛЯНУЮ ПЕРЕМЫЧКУ

П. Я. ПОЛУБАРИНОВА-КОЧИНА

(Москва)

В работе по применению теории линейных дифференциальных уравнений к задачам об установившемся плоском движении грунтовых вод, подчиняющееся закону Дарси[1], нами рассмотрен случай движения в земляной перемычке. Эта задача была уже решена раньше Девисоном[2] и Гамелем[3], но их формулы имеют более сложный вид. В настоящей статье даются преобразования наших формул к виду, удобному для вычислений, и приводится пример вычислений по этим формулам — это пример, вычисленный Гамелем и Гюнтером[4]. В § 2 показано, как может быть упрощена формула Гамеля и Девисона и сведена к данной нами формуле.



Фиг. 1.

§ 1. Пусть у земляной плотины с вертикальными откосами (фиг. 1) длина непроницаемого основания будет l, глубины воды в верхнем и нижнем бьефах равны соответственно h_1 и h_2, длина промежутка высачивания h_3. Отобразим конформно область $ABCDE$ на верхнюю полуплоскость вспомогательного комплексного переменного t так, чтобы точки A, B, C, D, E перешли соответственно в точки $t=0, 1, a, b, \infty$. Тогда для комплексной координаты и комплексного потенциала

$$z=x+iy, \quad f=\varphi+i\psi$$

-φ — потенциал скорости, ψ — функция тока) будем иметь выражения[2]:

$$z=-B\int_a^t \frac{(4\lg 2+\pi i)\,U_1-U_2}{\sqrt{(1-t)(t-a)(b-t)}}\,dt, \tag{1}$$

$$f=-kBi\int_a^t \frac{4\lg 2\,U_1-U_2}{\sqrt{(1-t)(t-a)(b-t)}}\,dt. \tag{2}$$

Здесь B, a и b — вещественные параметры, которые должны быть определены в зависимости от заданных длин h_1, h_2, и l, k — коэффициент фильтрации. Длина промежутка высачивания h_3 является искомой величиной.

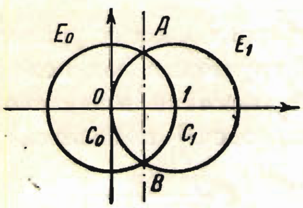
Функции U_1 и U_2, стоящие под знаком интегралов, представляют линейно независимые решения дифференциального уравнения гипергеометрического ряда

$$t(1-t)U''+(1-2t)U'-\frac{1}{4}U=0 \tag{3}$$

и имеют различный вид в различных областях плоскости комплексного переменного t. А именно, рассмотрим по Таннери[6], который подробно исследовал уравнение (3), области, изображенные на фиг. 2.

1. Внутри круга C_0, т. е. при $|t|<1$, имеем:

$$U_1(t)=F\left(\frac{1}{2},\frac{1}{2},1,t\right)=P(t), \qquad U_2(t)=P(t)\lg t+G(t)=Q(t), \tag{4}$$



Фиг. 2.

где

$$P(t)=1+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right]^2 t^n,$$

$$G(t)=4\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{1\cdot 3\cdot 5\ldots(2n-1)}{2\cdot 4\cdot 6\ldots 2n}\right]^2 \sum_{m=1}^{2n}(-1)^{m-1}\frac{t^n}{m}. \tag{5}$$

2. Внутри круга C_1, т. е. при $|t-1|<1$,

$$U_1(t)=\frac{4\lg 2}{\pi}P(1-t)-\frac{1}{\pi}Q(1-t),$$

$$U_2(t)=\frac{16\lg^2 2-\pi^2}{\pi}P(1-t)-\frac{4\lg 2}{\pi}Q(1-t). \tag{6}$$

3. В полуплоскости E_0, лежащей влево от прямой AB, функции U_1 и U_2 представляются следующим образом:

$$U_1=\frac{1}{\sqrt{1-t}}P\left(\frac{t}{t-1}\right),$$

$$U_2=\frac{1}{\sqrt{1-t}}\left\{P\left(\frac{t}{t-1}\right)\lg\frac{t}{1-t}+G\left(\frac{t}{t-1}\right)\right\}. \tag{7}$$

4. В полуплоскости E_1, лежащей вправо от прямой AB,

$$U_1=\frac{4\lg 2}{\pi\sqrt{t}}P\left(\frac{t-1}{t}\right)-\frac{1}{\pi\sqrt{t}}\left\{P\left(\frac{t-1}{t}\right)\lg\frac{1-t}{t}+G\left(\frac{t-1}{t}\right)\right\},$$

$$U_2=\frac{16\lg^2 2-\pi^2}{\pi\sqrt{t}}P\left(\frac{t-1}{t}\right)-\frac{4\lg 2}{\pi\sqrt{t}}\left\{P\left(\frac{t-1}{t}\right)\lg\frac{1-t}{t}+G\left(\frac{t-1}{t}\right)\right\}. \tag{8}$$

5. Вне круга C_0, т. е. при $|t|>1$, имеем:

$$U_1=\frac{\pi+4i\lg 2}{\pi\sqrt{t}}P\left(\frac{1}{t}\right)-\frac{i}{\pi\sqrt{t}}Q\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$U_2=\frac{16i\lg^2 2}{\pi\sqrt{t}}P\left(\frac{1}{t}\right)+\frac{\pi-4i\lg 2}{\pi\sqrt{t}}Q\left(\frac{1}{t}\right). \tag{9}$$

С другой стороны, нетрудно видеть, что ряд для функции $P(t)$ с точностью до множителя совпадает с рядом для полного эллиптического интеграла, квадрат модуля которого равен t:

$$P(t)=\frac{2}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{2}}\frac{d\varphi}{\sqrt{1-t\sin^2\varphi}}=\frac{2}{\pi}K(t). \tag{10}$$

Далее, пользуясь соотношением Таннери[6]

$$P(1-t)=\frac{4\lg 2}{\pi}P(t)-\frac{1}{\pi}Q(t),$$

найдем:

$$4\lg 2P(t)-Q(t)=2K(1-t). \tag{11}$$

Пользуясь формулами (10) и (11), уравнения (1) и (2) для промежутка $0<t<1$ можно переписать так:

$$\frac{dz}{dt}=-2B\frac{K(t)-iK(1-t)}{\sqrt{(1-t)(a-t)(b-t)}},\qquad \frac{df}{dt}=-2kB\frac{K(1-t)}{\sqrt{(1-t)(a-t)(b-t)}}. \tag{12}$$

Для промежутка $1<t<\infty$, пользуясь формулами (9), получим:

$$(4\lg 2+\pi i)U_1-U_2=\frac{\pi i}{\sqrt{t}}P\left(\frac{1}{t}\right)=\frac{2i}{\sqrt{t}}K\left(\frac{1}{t}\right),$$

$$4\lg 2U_1-U_2=\frac{4\lg 2P\left(\frac{1}{t}\right)-Q\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t}}=\frac{2K\left(\frac{t-1}{t}\right)}{\sqrt{t}},$$

и уравнения (1), (2) приведутся к виду:

$$\frac{dz}{dt}=-2Bi\frac{K\left(\frac{1}{t}\right)}{\sqrt{t(1-t)(t-a)(b-t)}},\qquad \frac{df}{dt}=-2kBi\frac{K\left(\frac{t-1}{t}\right)}{\sqrt{t(1-t)(t-a)(b-t)}}. \tag{13}$$

Для промежутка $-\infty<t<0$, пользуясь формулами (7), найдем:

$$(4\lg 2+\pi i)U_1-U_2=\frac{\pi}{\sqrt{1-t}}P\left(\frac{1}{1-t}\right)=\frac{2}{\sqrt{1-t}}K\left(\frac{1}{1-t}\right),$$

$$4\lg 2U_1-U_2=\frac{2}{\sqrt{1-t}}\left[K\left(\frac{1}{1-t}\right)-iK\left(\frac{t}{t-1}\right)\right],$$

и уравнения (1) и (2) примут вид:

$$\frac{dz}{dt}=2Bi\frac{K\left(\frac{1}{1-t}\right)}{(1-t)\sqrt{(a-t)(b-t)}},\qquad \frac{df}{dt}=2kB\frac{K\left(\frac{1}{1-t}\right)-iK\left(\frac{t}{t-1}\right)}{(1-t)\sqrt{(a-t)(b-t)}}. \tag{14}$$

Выпишем теперь уравнения, связывающие величины l, h_1, h_2 с постоянными B, a, b:

$$l=B\int_a^b U(t)\,dt,\quad h_1 i=B\int_a^1 U(t)\,dt,\quad h_2 i=B\int_b^\infty U(t)\,dt, \tag{15}$$

где

$$U(t)=-\frac{(4\lg 2+\pi i)U_1-U_2}{\sqrt{(1-t)(a-t)(t-b)}}. \tag{16}$$

Так как пределы интегрирования в выражениях (15) не меньше единицы, то пользуемся первой из формул (13), причем делаем подстановку

$$t=\frac{1}{\tau}.$$

Получим:

$$dz=\frac{G}{2}\frac{K(\tau)\,d\tau}{\sqrt{(\tau-1)\left(\tau-\frac{1}{b}\right)\left(\frac{1}{a}-\tau\right)}},$$

где

$$G=\frac{4B}{\sqrt{ab}}.$$

Теперь формулы (15) перепишем так:

$$l=\frac{G}{2}\int\limits_{\alpha}^{\beta}\frac{K(\tau)\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}}, \tag{17}$$

$$h_1=\frac{G}{2}\int\limits_{\beta}^{1}\frac{K(\tau)\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\tau-\alpha)(\beta-\tau)}}, \tag{18}$$

$$h_2=\frac{G}{2}\int\limits_{0}^{\alpha}\frac{K(\tau)\,d\tau}{\sqrt{(1-\tau)(\alpha-\tau)(\beta-\tau)}}. \tag{19}$$

Здесь и в дальнейшем

$$\alpha=\frac{1}{b},\quad \beta=\frac{1}{a}\quad (0<\alpha<\beta<1).$$

Подстановки

$$\tau=\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\psi,\quad \tau=\beta+(1-\beta)\sin^2\psi,\quad \tau=\alpha\sin^2\psi,$$

которые мы делаем соответственно в выражениях (17), (18), (19), позволяют их переписать в форме:

$$l=G\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{K[\alpha+(\beta-\alpha)\sin^2\psi]\,d\psi}{\sqrt{1-\alpha-(\beta-\alpha)\sin^2\psi}}, \tag{20}$$

$$h_1=G\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{K[\beta+(1-\beta)\sin^2\psi]\,d\psi}{\sqrt{\beta-\alpha+(1-\beta)\sin^2\psi}}, \tag{21}$$

$$h_2=G\sqrt{\alpha}\int\limits_{0}^{\frac{\pi}{2}}\frac{K[\alpha\sin^2\psi]\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\psi)(\beta-\alpha\sin^2\psi)}}, \tag{22}$$

где подинтегральные функции будут конечными в пределах интегрирования.

Длина h_3 промежутка высачивания определяется формулой[1]:

$$h_3 i=-B\int\limits_{-\infty}^{0}U(t)\,dt,$$

или с помощью уравнения (14)

$$h_3 = 2B \int_{-\infty}^{0} \frac{K\left(\frac{1}{1-t}\right) dt}{(1-t)\sqrt{(a-t)(b-t)}}.$$

Эта формула подстановками

$$\frac{1}{1-t} = \tau = \sin^2\psi$$

приводится к виду:

$$h_3 = \frac{G}{\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K(\sin^2\psi)\sin\psi\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{\left(\sin^2\psi + \frac{1}{a-1}\right)\left(\sin^2\psi + \frac{1}{b-1}\right)}}. \qquad (23)$$

Вычислим теперь расходы Q и Q_0 соответственно через сечения BC и EA.

Из второго уравнения (13) находим:

$$Q = 2kB \int_1^a \frac{K\left(\frac{t-1}{t}\right) dt}{\sqrt{t(t-1)(a-t)(b-t)}},$$

или, полагая

$$\frac{t-1}{t} = \tau = (1-\beta)\sin^2\psi,$$

будем иметь:

$$Q = kG \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K[(1-\beta)\sin^2\psi]\, d\psi}{\sqrt{1-\alpha-(1-\beta)\sin^2\psi}}. \qquad (24)$$

Аналогичным путем для Q_0 получим:

$$Q_0 = 2kB \int_b^{\infty} \frac{K\left(\frac{t-1}{t}\right) dt}{\sqrt{t(t-1)(a-t)(b-t)}}$$

и, полагая

$$\frac{t-1}{t} = \tau = 1-\alpha+\alpha\sin^2\psi,$$

найдем:

$$Q_0 = kG \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K(1-\alpha\cos^2\psi)\cos\psi\, d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\cos^2\psi)(\beta-\alpha\cos^2\psi)}}. \qquad (25)$$

Наконец, найдем формулы, дающие уравнения депрессионной кривой в параметрическом виде. Согласно (12)

$$z = x + iy = -2B \int_0^t \frac{K(t) - iK(1-t)}{\sqrt{(1-t)(a-t)(b-t)}}\, dt + l + (h_2 + h_3)i,$$

откуда, отделяя вещественную часть от мнимой, получаем:

$$x = -\frac{G\sqrt{ab}}{2}\int_0^t \frac{K(t)\,dt}{\sqrt{(1-t)(a-t)(b-t)}} + l,$$

$$y = \frac{G\sqrt{ab}}{2}\int_0^t \frac{K(1-t)\,dt}{\sqrt{(1-t)(a-t)(b-t)}} + h_2 + h_3.$$

Подстановка

$$t = \sin^2\psi$$

дает:

$$\left.\begin{aligned} x &= -G\sqrt{ab}\int_0^\psi \frac{K(\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(a-\sin^2\psi)(b-\sin^2\psi)}} + l,\\ y &= G\sqrt{ab}\int_0^\psi \frac{K(\cos^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{(a-\sin^2\psi)(b-\sin^2\psi)} + h_2 + h_3. \end{aligned}\right\} \tag{26}$$

В формуле (21) для h_1 и формуле (26) для x подинтегральная функция обращается в бесконечность при $\psi = \pi/2$. Поэтому удобнее вычислять h_1 с помощью второй из формул (26):

$$h_1 = y(\pi/2).$$

Что касается x, то при его вычислении нет надобности доходить до $\psi = \pi/2$.

Вводя вместо искомых длин их отношения к l (или, что то же, принимая $l = 1$):

$$H = \frac{h_1}{l},\quad h = \frac{h_2}{l},\quad h_0 = \frac{h_3}{l},\quad C = \frac{G}{l},\quad X = \frac{x}{l},\quad Y = \frac{y - h_2 - h_3}{l},$$

перепишем все полученные формулы:

$$\frac{1}{C} = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K[\alpha + (\beta - \alpha)\sin^2\psi]\,d\psi}{\sqrt{1 - \alpha - (\beta - \alpha)\sin^2\psi}}, \tag{I}$$

$$h = C\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{\alpha}\,K(\alpha\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1 - \alpha\sin^2\psi)(\beta - \alpha\sin^2\psi)}}, \tag{II}$$

$$h_0 = \frac{C}{\sqrt{(1-\alpha)(1-\beta)}}\int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K(\sin^2\psi)\sin\psi\cos\psi\,d\psi}{\sqrt{\left(\sin^2\psi + \frac{1}{a-1}\right)\left(\sin^2\psi + \frac{1}{b-1}\right)}}, \tag{III}$$

$$1 - X(\psi) = C\int_0^\psi \frac{K(\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1 - \alpha\sin^2\psi)(1 - \beta\sin^2\psi)}}, \tag{IV}$$

$$Y(\psi) = C\int_0^\psi \frac{K(\cos^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1 - \alpha\sin^2\psi)(1 - \beta\sin^2\psi)}}, \tag{V}$$

$$H = Y\left(\frac{\pi}{2}\right) + h + h_0, \tag{VI}$$

$$Q = qH = kCl \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K[(1-\beta)\sin^2\psi]\,d\psi}{\sqrt{1-\alpha-(1-\beta)\sin^2\psi}}, \tag{VII}$$

$$Q_0 = q_0 h_0 = kCl \int_0^{\frac{\pi}{2}} \frac{K(1-\alpha\sin^2\psi)\sin\psi\,d\psi}{\sqrt{(1-\alpha\sin^2\psi)(\beta-\alpha\sin^2\psi)}}. \tag{VIII}$$

При достаточно малых значениях α и β для вычисления C, $X(\psi)$ и $Y(\psi)$ можно пользоваться рядами, расположенными по целым положительным степеням α и β, для вычисления h можно пользоваться рядом по степеням α и $\gamma = \alpha/\beta = a/b$. А именно:

$$\frac{1}{C} = \frac{\pi^2}{4}\Big\{1 + \frac{3}{8}(\alpha+\beta) + \frac{123}{512}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{41}{256}\alpha\beta + \frac{4205}{12288}(\alpha^3+\beta^3) + \\ + \frac{841}{4096}(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2) + \ldots\Big\}, \tag{27}$$

$$h = \frac{\pi}{2} C\sqrt{\gamma}\Big\{1 + \frac{1}{2}\alpha + \frac{1}{3}\gamma + \frac{41}{120}\alpha^2 + \frac{1}{5}\alpha\gamma + \frac{1}{5}\gamma^2 + \frac{147}{560}\alpha^3 + \\ + \frac{41}{280}\alpha^2\gamma + \frac{9}{70}\alpha\gamma^2 + \frac{1}{7}\gamma^3 + \ldots\Big\}, \tag{28}$$

$$1 - X(\psi) = C\Big\{I_1(\psi) + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)I_3(\psi) + \left[\frac{3}{8}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{4}\alpha\beta\right]I_5(\psi) + \\ + \left[\frac{5}{16}(\alpha^3+\beta^3) + \frac{3}{16}(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)\right]I_7(\psi) + \ldots\Big\}, \tag{29}$$

$$Y(\psi) = C\Big\{J_1(\psi) + \frac{1}{2}(\alpha+\beta)J_3(\psi) + \left[\frac{3}{8}(\alpha^2+\beta^2) + \frac{1}{4}\alpha\beta\right]J_5(\psi) + \\ + \left[\frac{5}{16}(\alpha^3+\beta^3) + \frac{3}{16}(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)\right]J_7(\psi) + \ldots\Big\}, \tag{30}$$

где

$$I_k(\psi) = \int_0^{\psi} K(\sin^2\psi)\sin^k\psi\,d\psi, \qquad J_k(\psi) = \int_0^{\psi} K(\cos^2\psi)\sin^k\psi\,d\psi. \tag{31}$$

Вычисленные нами значения I_k ($k = 1, 3, 5, 7$) и J_k ($k = 1, 3, 5$) для $\psi = 30°, 45°, 60°, 80°$, а J_k также для $\psi = 90°$ приведены в таблице.

ψ	I_1	I_3	I_5	I_7	J_1	J_3	J_5
30°	0.2178	0.02816	0.00476	0.00093	0.3492	0.0204	0.00659
45°	0.4984	0.1349	0.0466	0.0176	0.6642	0.1590	0.0529
60°	0.9062	0.3911	0.2076	0.1175	1.028	0.3880	0.199
80°	1.63	1.00	0.714	0.509	1.558	0.853	0.608
90°					1.832	1.124	0.876

Для отыскания координат точек свободной поверхности можно пользоваться следующими выражениями X и Y:

$$X(0^\circ)=1, \tag{32}$$

$$1-X(30^\circ)=C\Big\{0.2178+0.0141(\alpha+\beta)+0.00119\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+ \\ +0.000058\,[5(\alpha^3+\beta^3)+3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)]+\ldots\Big\}, \tag{33}$$

$$1-X(45^\circ)=C\Big\{0.4984+0.06745(\alpha+\beta)+0.0116\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+ \\ +0.0011\,[5(\alpha^3+\beta^3)+3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)]+\ldots\Big\}, \tag{34}$$

$$1-X(60^\circ)=C\Big\{0.9062+0.1956(\alpha+\beta)+0.0519\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+ \\ +0.0073\,[5(\alpha^3+\beta^3)+3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)]+\ldots\Big\}, \tag{35}$$

$$1-X(80^\circ)=C\Big\{1.63+0.500(\alpha+\beta)+0.178\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+ \\ +0.032\,[5(\alpha^3+\beta^3)+3(\alpha^2\beta+\alpha\beta^2)]+\ldots\Big\}, \tag{36}$$

$$X(90^\circ)=0, \tag{37}$$

$$Y\ (0^\circ)=0, \tag{38}$$

$$Y(30^\circ)=C\Big\{0.3492+0.0102(\alpha+\beta)+0.00165\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+\ldots\Big\}, \tag{39}$$

$$Y(45^\circ)=C\Big\{0.6642+0.0795(\alpha+\beta)+0.0132\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+\ldots\Big\}, \tag{40}$$

$$Y(60^\circ)=C\Big\{1.028+0.194(\alpha+\beta)+0.0498\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+\ldots\Big\}, \tag{41}$$

$$Y(80^\circ)=C\Big\{1.558+0.426(\alpha+\beta)+0.1519\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+\ldots\Big\}, \tag{42}$$

$$Y(90^\circ)=C\Big\{1.832+0.562(\alpha+\beta)+0.219\left[\frac{3}{2}(\alpha^2+\beta^2)+\alpha\beta\right]+\ldots\Big\}\cdot \tag{43}$$

С помощью этих формул без труда можно получить координаты пяти точек свободной поверхности.

При определении величин h_0, q и q_0 по формулам (II), VII), (VIII) при $\alpha=\beta=0$ получаются расходящиеся интегралы, поэтому мы их определяем с помощью численного интегрирования. Когда найдены $Y(90^\circ)$, h и h_0, то H вычисляем по формуле:

$$H=Y(90^\circ)+h+h_0. \tag{44}$$

В качестве примера взяли случай Гамеля и Гюнтера [4], в котором положено $a=5$, $b=10$. Тогда $\alpha=0.1$, $\beta=0.2$, $\gamma=0.5$. По формулам (IX) и (X) находим[1]:

$$C=0.3580,\quad h=0.528.$$

С помощью формул (XI) и (XII) для координаты точек свободной поверхности получаем следующие значения:

ψ	90°	80°	60°	45°	30°	0°
X	0	0.356	0.653	0.814	0.921	1
Y	0.734	0.608	0.391	0.247	0.126	0

[1] Большая часть вычислений произведена студентом МГМИ П. А. Киткиным.

Для определения значений h_0, q и q_0 по формулам (III), (VII) и (VIII) для вычисления интегралов мы применили формулу Симпсона и формулу трапеций и получили:

$$h_0 = 0.741, \qquad Q = 1.882\ k, \qquad Q_0 = 0.926\ k.$$

Далее согласно (42)

$$H = 0.741 + 0.734 + 0.528 = 2.003.$$

Очевидно, что расход Q_1 через сечение DE равен:

$$Q_1 = Q - Q_0 = 0.916\ k,$$

а удельный расход

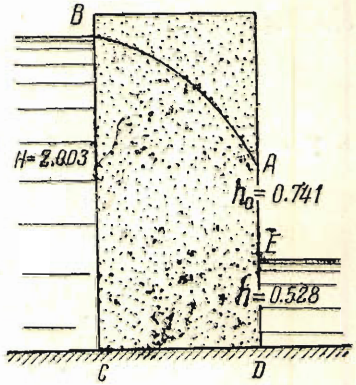
$$q_1 = 1.735.$$

На фиг. 3 приведены размеры полученной земляной перемычки. Для сравнения приведем результаты весьма тяжелых вычислений Гамеля и Гюнтера [4]. Именно они получили такие размеры:

$$2CD = 0.317 \pm 0.04, \quad BC = 0.321 \pm 0.01,$$

$$AE = 0.124 \pm 0.02, \quad DE = 0.081 \pm 0.005.$$

Заметим, что Б. Б. Девисоном неправильно поняты результаты Гамеля и Гюнтера, и поэтому в его книге [5] (стр. 337) размеры плотины приведены неверно.



Фиг. 3.

Принимая для удобства сравнения $CD = 1$, получим такие результаты:

	H	h	h_0
По данному методу	2.003	0.528	0.741
По Гамелю и Гюнтеру . . .	2.02	0.51	0.78

§ 2. Гамелем была получена следующая формула для z как функции параметра t (который у Гамеля обозначен буквой λ, см. Девисон [5], стр. 334):

$$z = C^* \int \sqrt{\frac{t-1}{t(t-a)(t-b)}}\, \mu'(t)\, e^{-\frac{3}{2\pi}\int_0^1 \frac{\gamma\, d\lambda}{\lambda - t}}\, dt, \qquad (1)$$

где

$$\mu(t) = \frac{iK(1-t)}{K(t) - iK(1-t)} + 1,$$

так что

$$\mu'(t) = i\left[\frac{K(1-t)}{K(t) - iK(1-t)}\right]';$$

что же касается γ, то

$$\gamma(t) = \operatorname{arc\,tg} \frac{K(1-t)}{K(t)}.$$

Положим

$$V_1 = K(t) - iK(1-t), \quad V_2 = K(1-t). \qquad (2)$$

Очевидно, что V_1 и V_2 представляют линейно независимые частные решения дифференциального уравнения (3) § 1. Как известно[1]:

$$\left(\frac{V_2}{V_1}\right)' = \frac{C_1}{V_1^2} e^{-\int p(t)\,dt},$$

где $p(t)$ есть коэффициент при U' в дифференциальном уравнении (3) § 1, если в нем коэффициент при U'' равен единице. Для уравнения (3) § 1

$$p(t) = \frac{1-2t}{t(1-t)},$$

следовательно,

$$\mu'(t) = i\left(\frac{V_2}{V_1}\right)' = \frac{C_1 i}{V_1^2 t(1-t)},$$

и уравнение (1) может быть переписано так:

$$z = C^{**} \int \frac{e^{-\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^1 \frac{\gamma(\lambda)}{\lambda - t} d\lambda}\, dt}{V_1^2 t\sqrt{t(t-a)(t-b)(1-t)}}. \tag{3}$$

Для того, чтобы упростить выражение, стоящее в числителе подинтегральной функции, применим формулу Пуассона (которой пользуется Девисон в применении к функции $\lg \frac{dz}{dn}$) к функции $\lg V_1$, где V_1 определяется формулой (2) для $|t| < 1$.

По аналогии с вычислениями Девисона[5] (стр. 333) имеем:

$$\lg V_1(\zeta) = \lg|V_1| + i \arg V_1 = C - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_0^{2\pi} \arg V_1 \frac{e^{i\theta} + \zeta}{e^{i\theta} - \zeta}\, d\theta.$$

При интегрировании нужно иметь в виду, что функция V_1 имеет различную форму в различных интервалах для t.

А именно:

$$V_1 = K(t) - iK(1-t) \quad \text{для} \quad 0 < t < 1,$$

$$V_1 = -\frac{iK\left(\frac{1}{1-t}\right)}{\sqrt{1-t}} \quad \text{для} \quad -\infty < t < 0,$$

$$V_1 = \frac{1}{\sqrt{t}} K\left(\frac{1}{t}\right) \quad \text{для} \quad 1 < t < \infty.$$

Поэтому, полагая соответственно формулам (5.22) Девисона (стр. 333)

$$\lambda = (1-i)\frac{e^{i\theta} + i}{e^{i\theta} + 1}, \qquad e^{i\theta} = \frac{1 - i(1-\lambda)}{1 + i(1-\lambda)},$$

[1] См., например, В. И. Смирнов. Курс высшей математики, т. III.

будем иметь:

$$\arg V_1 = -\operatorname{arc\,tg}\frac{K(1-t)}{K(t)} \quad \text{для} \quad \frac{3\pi}{2} < \theta < 2\pi,$$

$$\arg V_1 = -\frac{\pi}{2} \quad \text{для} \quad \pi < \theta < \frac{3\pi}{2},$$

$$\arg V_1 = 0 \quad \text{для} \quad 0 < \theta < \pi.$$

Это дает для

$$\lg V_1(\zeta) = C_2 + \frac{1}{2}\lg\frac{\zeta+1}{\zeta+i} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\frac{3\pi}{2}}^{2\pi}\gamma\frac{e^{i\theta}+\zeta}{e^{i\theta}-\zeta}\,d\theta =$$

$$= C_2 + \frac{1}{2}\lg\frac{\zeta+1}{\zeta+i} - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\frac{\gamma\,d\lambda}{\lambda-\zeta}.$$

Так как по формуле (5.17) Девисона

$$t = (1-i)\frac{\zeta+i}{\zeta+1},$$

то

$$\lg V_1 = C_3 + \frac{1}{2}\lg t - \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^1\frac{\gamma\,d\lambda}{\lambda-t};$$

откуда

$$e^{-\frac{3}{2\pi}\int\limits_0^1\frac{\gamma\,d\lambda}{\lambda-t}} = C_4\,t^{\frac{3}{2}}\,V_1^3.$$

Подставляя это выражение в формулу (3), находим:

$$z = C\int\frac{V_1\,dt}{\sqrt{(1-t)(t-a)(b-t)}} = C\,\frac{K(t)-iK(1-t)}{\sqrt{(1-t)(t-a)(b-t)}}\,dt,$$

что совпадает с первой из наших формул (12).

Поступила в редакцию 15 IX 1939.

Институт механики
Акад. Наук Союза ССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Полубаринова-Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды. „Известия АН СССР". 1938. Серия математическая № 3.
2. Девисон Б. Б. Об установившемся движении грунтовых вод через земляные плотины. Зап. Гос. гидролог. ин-та. Ленинград. 1932. Т. VI. [Стр. 11—19]. Труды IV гидрологической конференции Балтийских стран. 1933.
3. Hamel G. Über Grundwasserströmung. ZAMM. 1934. Bd. 14. H. 3. [S. 129—157].
4. Hamel G. und Günther E. Numerische Durchrechnung zu der Abhandlung über Grundwasserströmung. ZAMM. 1935. Bd. 15. H. 3. [S. 255—265].
5. Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон Б. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд-во АН СССР. 1938.
6. Tannery. Sur une équation differentielle linéaire du second ordre. Annales de l'école norm. sup. 1879. T. VIII. 2-e série.

CALCULATION OF FILTRATION THROUGH AN EARTH DAM

P. J. POLOUBARINOVA-KOCHINA

(Summary)

In a previous work [1] on the motion of water filtering through an earth dam the author gave the general formulae (1) and (2) where $z = x + iy$, $f = \varphi + i\psi$ and φ is the potential of velocity, ψ — the function of current, U_1 and U_2 are determined by formulae (4) when $|t| < 1$ and by expressions (6)—(9) for the other values of t.

The formulae (I)—(VIII) serve for calculating the heights of the upper and lower waters, the distance through which the water percolates, the coordinates of any point of the free surface and the volume of water passing through diverse cross-sections respectively.

Some of these expressions are expanded into power series relative to parameters α and β $(0 < \alpha < \beta < 1)$ which determine the dimensions of the dam.

For the values $\alpha = 0.1$, $\beta = 0.2$ the numerical example given will be the one that was calculated by Hammel in collaboration with Günter [5] by a more complicated procedure.