

ДВИЖЕНИЕ ГРУНТОВЫХ ВОД, НЕ СЛЕДУЮЩЕЕ ЗАКОНУ ДАРСИ

С. А. ХРИСТИАНОВИЧ

(Москва)

§ 1. Уравнения движения

Опыты показывают, что при фильтрации грунтовых вод через крупнозернистые пески или щебень закон Дарси становится неверным. В этих случаях между уклоном и скоростью фильтрации существует более сложная зависимость.

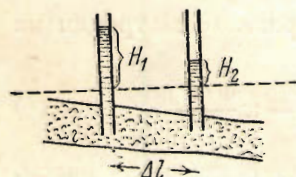
Для того, чтобы сделать последнее соображение более ясным, напомним некоторые, хорошо известные, исходные положения.

Напором называют обычно величину

$$H = \frac{p}{\rho g} + y,$$

где p — давление, ρ — плотность, g — ускорение силы тяжести и y — отметка, отсчитанная от некоторой горизонтальной плоскости (фиг. 1 — плоскость ox).

Напор измеряется высотой уровня жидкости в пьезометрической трубке. Эта высота отсчитывается от некоторой произвольно выбранной горизонтальной плоскости (на фиг. 1, высоты y_1 и y_2 отрицательны).



Фиг. 2.

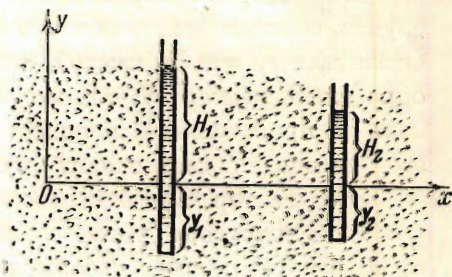
Пусть фильтрация происходит через грунт, заключенный в трубке настолько тонкой, что в плоскости ее поперечного сечения напор можно считать постоянным. Тогда уклоном называется падение напора на единицу длины трубки (фиг. 2):

$$I = \frac{H_1 - H_2}{\Delta l}, \quad \text{или} \quad I = -\frac{dH}{dl}.$$

Если трубка расположена горизонтально, то

$$I = -\frac{1}{\rho g} \frac{dp}{dl}.$$

В дальнейшем мы будем рассматривать случай однородного грунта, изотропного в отношении фильтрационных свойств. Закон фильтрации для такого



Фиг. 1.

грунта, т. е. зависимость между падением напора и расходом или скоростью фильтрации, может быть установлен, например, из опытов над фильтрацией через образцы, заключенные в трубках. При обработке экспериментальных данных обычно пользуются формулами вида¹:

$$I = \frac{1}{\kappa} W^\gamma$$

или²

$$I = aW + bW^2 + cW^3,$$

где W — скорость фильтрации, т. е. отношение расхода к площади поперечного сечения трубки, и a , b , c , κ и γ — коэффициенты, устанавливаемые из опытов.

В некоторых случаях пользуются и более сложными формулами^[3].

В дальнейшем мы будем считать, что для данного грунта закон фильтрации дается зависимостью

$$I = \Phi(W).$$

В случае закона Дарси

$$I = \frac{W}{k},$$

где k — коэффициент фильтрации.

Известно, что переход к изучению движения грунтовых вод в массивах грунта основан на возможности введения понятия о скорости фильтрации. Оказывается, что в каждой точке пространства, занятого грунтом, можно определить вектор W так, что произведение проекции этого вектора на нормаль к произвольной площадке, проходящей через эту точку на площадь этой площадки, дает расход грунтовой воды через эту площадку³.

Этот вектор и называют скоростью фильтрации.

Если движение установившееся, то через каждую точку пространства проходит линия тока, касательная к которой совпадает с направлением скорости фильтрации. Все пространство, занятое грунтовым потоком, может быть, таким образом, разбито на отдельные элементарные трубки тока.

В соответствии с установленной зависимостью между величиной скорости фильтрации и падением напора при движении в трубках положим:

$$I = -\text{grad } H = W \frac{\Phi(W)}{W}, \quad (1)$$

или, обозначая через u , v и w проекции вектора скорости фильтрации на оси x , y и z :

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -u \frac{\Phi(W)}{W}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -v \frac{\Phi(W)}{W}, \quad \frac{\partial H}{\partial z} = -w \frac{\Phi(W)}{W}. \quad (2)$$

К этим уравнениям нужно присоединить уравнение сохранения массы.

Если считать, что впитывание воды в грунт не происходит, то фиктивную жидкость, имеющую скорость, равную скорости фильтрации, движение которой изображает движение грунтовой воды, надо считать несжимаемой.

¹ См., например, Лейбензон [1], стр. 48.

² Например, Форгхеймер [2], стр. 67—68.

³ Об обосновании понятия скорости фильтрации см., например, работу Девисона [3].

Уравнение сохранения массы будет тогда иметь вид:

$$\frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} + \frac{\partial w}{\partial z} = 0. \quad (3)$$

Если выражение

$$K = \frac{W}{\Phi(W)} = f(W) \quad (4)$$

назвать условно коэффициентом фильтрации, то уравнения (2) и (3) показывают, что в рассматриваемом случае движение происходит с переменным коэффициентом фильтрации, причем значение этого коэффициента зависит только от величины скорости фильтрации в данной частице грунта. В случае закона Дарси

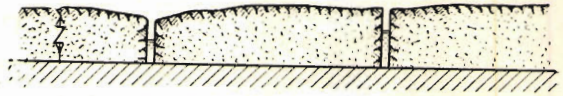
$$K = k = \text{const}$$

и уравнения (2), (3) переходят в обычные уравнения движения грунтовых вод.

Кроме уравнений (2) и (3), рассмотрим уравнения, аналогичные уравнению Дюпюи-Форгхеймера.

Если движение грунтовых вод происходит в пласте, покоящемся на горизонтальном непроницаемом основании, причем область, занятая движущейся грунтовой водой, ограничена сверху свободной поверхностью, то можно составить приближенные уравнения, решение которых во многих случаях дает очень хорошее совпадение с действительным явлением.

Примем плоскость непроницаемого основания за плоскость xy и направим ось z вертикально вверх (Фиг. 3). Пусть Z будет ординатой свободной поверхности. Будем пренебрегать изменением скорости по вертикали, т. е. заменим скорость фильтрации в точках, расположенных на одной вертикали, средней скоростью. Пусть U и V будут проекциями этой средней скорости на оси x и y . Тогда уравнение сохранения массы (уравнение неразрывности) будет иметь вид:



Фиг. 3.

$$\frac{\partial(UZ)}{\partial x} + \frac{\partial(VZ)}{\partial y} = 0. \quad (5)$$

Если принять, что между напором и средней скоростью существует зависимость (1) и что

$$\text{grad } H = \text{grad } Z,$$

то получим:

$$\frac{\partial Z}{\partial x} = -U \frac{\Phi(W)}{W}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -V \frac{\Phi(W)}{W}, \quad (6)$$

где

$$W = \sqrt{U^2 + V^2}.$$

Если

$$\frac{W}{\Phi(W)} = K = \text{const},$$

то уравнения (5) и (6) переходят в уравнение Дюпюи-Форгхеймера:

$$\frac{\partial^2 Z^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 Z^2}{\partial y^2} = 0.$$

§ 2. Плоская задача. Преобразование уравнений

В случае плоского движения, параллельного плоскости xOy , получим:

$$\frac{\partial H}{\partial x} = -u \frac{\Phi(W)}{W}, \quad \frac{\partial H}{\partial y} = -v \frac{\Phi(W)}{W}, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (1)$$

или

$$\frac{\partial \left(\frac{u}{K} \right)}{\partial y} - \frac{\partial \left(\frac{v}{K} \right)}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y} = 0, \quad (2)$$

где

$$K = \frac{W}{\Phi(W)}, \quad W = \sqrt{u^2 + v^2}.$$

Определение движения грунтового потока в плоском случае приведено, таким образом, к решению системы уравнений (2).

Примем вместо u и v в качестве неизвестных функций W и ϑ , так что

$$u = W \cos \vartheta, \quad v = W \sin \vartheta,$$

где ϑ — угол наклона вектора скорости к оси x .

Уравнения (2) тогда примут вид:

$$\begin{aligned} \Phi'(W) \sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial x} - \Phi'(W) \cos \vartheta \frac{\partial W}{\partial y} + \Phi(W) \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Phi(W) \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= 0, \\ \cos \vartheta \frac{\partial W}{\partial x} + \sin \vartheta \frac{\partial W}{\partial y} - W \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + W \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= 0. \end{aligned}$$

Примем теперь за независимые переменные вместо x и y переменные H и ψ , где H есть напор, а ψ — функция тока, определяемая на основании второго уравнения (2) равенствами:

$$\frac{\partial \psi}{\partial x} = -v = -W \sin \vartheta, \quad \frac{\partial \psi}{\partial y} = u = W \cos \vartheta.$$

Для производных какой-нибудь функции $F(x, y)$ имеем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -\Phi(W) \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial H} - W \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \psi}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= -\Phi(W) \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial H} + W \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial \psi}, \end{aligned} \quad (3)$$

Пользуясь этими формулами, получим¹:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} - \frac{\Phi(W)}{W^2} \frac{\partial W}{\partial H} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial H} + \frac{W \Phi'(W)}{[\Phi(W)]^2} \frac{\partial W}{\partial \psi} = 0.$$

¹ Между уравнениями (2) и уравнениями движения газа существует известная аналогия. Движение газа было изучено С. А. Чаплыгиным^[4] в его замечательной работе „О газовых струях“, опубликованной впервые в 1904 г. В настоящей работе эта аналогия служила нам путеводной нитью.

Эти уравнения могут быть заменены следующей канонической системой уравнений (см. дополнение в конце работы):

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{W}{\Phi(W)} \sqrt{\frac{W\Phi'(W)}{\Phi(W)}} \frac{\partial H}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{W}{\Phi(W)} \sqrt{\frac{W\Phi'(W)}{\Phi(W)}} \frac{\partial H}{\partial v} = 0, \quad (4)$$

$$\sqrt{\frac{\Phi'(W)}{W\Phi(W)}} \frac{\partial W}{\partial v} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = 0, \quad \sqrt{\frac{\Phi'(W)}{W\Phi(W)}} \frac{\partial W}{\partial \mu} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0, \quad (4')$$

где μ и v — вспомогательные переменные¹.

Отметим основное свойство этих уравнений, которым мы будем пользоваться в дальнейшем. Если

$$\mu^* + iv^* = f(\mu + iv),$$

где f — аналитическая функция комплексного переменного $\mu + iv$, то при замене μ и v в уравнениях (4), (4') на μ^* и v^* эта система останется неизменной. Иными словами, система (4), (4') инвариантна по отношению к произвольному конформному преобразованию в плоскости μv .

Обозначим через

$$s = \lg \widetilde{W} = \int \sqrt{\frac{\Phi'(W)}{W\Phi(W)}} dW \quad (5)$$

и назовем \widetilde{W} фиктивной скоростью фильтрации. Если справедлив закон Дарси, то

$$W = c \widetilde{W},$$

где c — постоянное.

Постоянную, входящую в уравнение (5), выберем так, чтобы фиктивная скорость фильтрации совпадала с действительной скоростью при наличии закона Дарси. В случае степенного закона фильтрации

$$\lg \widetilde{W} = \sqrt{\gamma} \lg W + \lg c, \quad \text{или} \quad \widetilde{W} = c W^{\sqrt{\gamma}}.$$

Так как $\widetilde{W} = W$ при $n = 1$, то

$$\widetilde{W} = W \cdot \bar{\gamma}.$$

Пользуясь функцией s , систему уравнений (4), (4') можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \lg \widetilde{W}}{\partial v} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \lg \widetilde{W}}{\partial \mu} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = -L \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial H}{\partial v} = L \frac{\partial \psi}{\partial \mu}. \quad (7)$$

где

$$L = \frac{\Phi(W)}{W} \sqrt{\frac{\Phi(W)}{W\Phi'(W)}} = L(\widetilde{W}). \quad (8)$$

¹ Уравнения характеристик имеют в этом случае интегрируемую комбинацию:

$$\int \sqrt{\frac{\Phi'(W)}{W\Phi(W)}} dW + i\vartheta = \text{const.}$$

В частности, в случае степенного закона

$$L = \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{W^{\gamma-1}}{z}. \quad (9)$$

Вообще, обозначив через

$$L = \frac{1}{K_{\phi}},$$

коэффициент L можно интерпретировать как величину, обратную некоторому фиктивному коэффициенту фильтрации.

Допустим, что решение систем (6) и (7) найдено. Покажем, каким образом можно выразить тогда x и y как функции μ и ν .

Применяя формулы (3) к функциям x и y , получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial x}{\partial H} &= -\frac{\cos \vartheta}{\Phi(W)}, & \frac{\partial x}{\partial \psi} &= -\frac{\sin \vartheta}{W}, \\ \frac{\partial y}{\partial H} &= -\frac{\sin \vartheta}{\Phi(W)}, & \frac{\partial y}{\partial \psi} &= \frac{\cos \vartheta}{W}. \end{aligned}$$

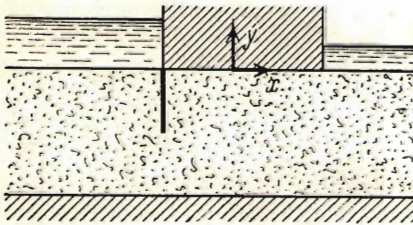
Если функции ϑ , W (или s), ψ и H удовлетворяют уравнениям (6) и (7), то интегралы

$$x = - \int \frac{\cos \vartheta}{\Phi(W)} dH + \frac{\sin \vartheta}{W} d\psi, \quad y = - \int \frac{\sin \vartheta}{\Phi(W)} dH - \frac{\cos \vartheta}{W} d\psi \quad (10)$$

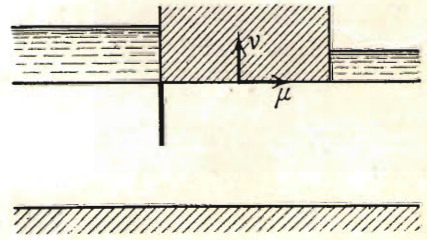
в односвязной области не зависят от пути интегрирования и определяют x и y как функции от μ и ν с точностью до постоянных.

§ 3. Метод решения

Рассмотрим сначала движение грунтовых вод в случае напорного движения, т. е. без свободной поверхности, и предположим также, что как непроницаемые поверхности, так и границы водоемов прямолинейны.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Мы будем предполагать также, что соответствующее решение рассматриваемой задачи в случае, если имеет место закон Дарси, нам известно.

Пусть на фиг. 4 изображена область, занятая фильтрационным потоком.

На фиг. 5 в плоскости $\mu\nu$ изобразим ту же картину.

Известно, что контурные условия в плоскости $\mu\nu$, определяющие искомое решение, таковы: непроницаемая стенка есть линия тока на ней, следовательно, $\psi = \text{const}$, или, что то же, $\vartheta = \text{const}$ (стенки прямолинейны); граница

водоема есть линия равного напора, и, следовательно, на ней $H = \text{const}$, или, что то же, $\vartheta = \text{const}$.

В случае, когда справедлив закон Дарси, функции $\varphi = -kH$ и ψ удовлетворяют уравнениям:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{\partial \psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial y} = -\frac{\partial \psi}{\partial x} \quad (1)$$

и, следовательно, комплексный потенциал

$$f = \varphi + i\psi$$

есть аналитическая функция комплексной переменной $z = x + iy$.

В этом случае

$$\frac{df}{dz} = u - iv = W e^{-i\vartheta} \quad (2)$$

и, следовательно, функция

$$\lg \frac{df}{dz} = \lg W - i\vartheta \quad (3)$$

является также аналитической функцией переменного z , т. е. справедливы уравнения:

$$\frac{\partial \lg W}{\partial y} - \frac{\partial \vartheta}{\partial x} = 0, \quad \frac{\partial \lg W}{\partial x} + \frac{\partial \vartheta}{\partial y} = 0. \quad (4)$$

Системы уравнений (1) и (4) являются, таким образом, следствием друг друга. Отыскание решений уравнений (4) или (1) — задачи эквивалентные, так как, пользуясь (2) и (3), из одного решения можно получить другое.

Из этих уравнений следует также, что распределение скорости в потоке не зависит от коэффициента фильтрации. От коэффициента фильтрации при заданном общем расходе зависит только соответствующее значение напора $H = -\varphi/k$.

Сравним теперь системы уравнений (1) и (4) с уравнениями (6) и (7) предыдущего параграфа. Уравнения (4) в точности совпадают с уравнениями (6), а уравнения (1) аналогичны уравнениям (7). Для получения решения систем уравнений (6) и (7) надо каждую из этих систем решать независимо, так как нельзя по решению одной из этих систем получить решение другой. Это было бы возможным лишь в случае, когда L постоянно, т. е. в случае закона Дарси.

Предлагаемый метод решения состоит в следующем. Определим решение каждой из систем (6) и (7) § 2, отвечающее граничным условиям в плоскости $\mu\nu$, в точности совпадающим с соответствующими граничными условиями для соответствующих функций в плоскости xu , т. е. представим себе последовательно в плоскости $\mu\nu$ движение двух фиктивных фильтрационных потоков: одного, движение которого управляется уравнениями (6) § 2, т. е. следующего закону Дарси, и затем другого, совершающегося согласно уравнениям (7) § 2.

Посмотрим теперь, какому решению для действительного потока в плоскости xu отвечает построенное решение системы канонических уравнений.

Пусть

$$\tilde{f} = \tilde{\varphi} + i\tilde{\psi} \quad (5)$$

комплексный потенциал для потока, следующего закону Дарси в рассматриваемой нами области плоскости $\mu\nu$.

Тогда функции s и ϑ , определяемые равенством

$$s - i\vartheta = \lg \frac{d\bar{f}}{d(\mu + i\nu)} = \lg \frac{d(\bar{\varphi} + i\bar{\psi})}{d(\mu + i\nu)}, \quad (6)$$

дают искомое решение системы уравнений (6) § 2.

Подставляя полученное из решения системы (6) § 2 значение \bar{W} в уравнения (7) § 2, получим систему линейных уравнений.

Уравнения (7) § 2 имеют вид:

$$\frac{\partial H}{\partial \mu} = -L(\mu, \nu) \frac{\partial \psi}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial H}{\partial \nu} = L(\mu, \nu) \frac{\partial \psi}{\partial \mu}. \quad (7)$$

Эту систему уравнений можно интерпретировать как систему уравнений, также определяющую движение некоторого фиктивного потока грунтовых вод в неоднородной среде, коэффициент фильтрации которой

$$K_{\phi} = \frac{1}{L}$$

известен для каждой точки грунта.

Для определения этого потока остается решить систему уравнений (4) при указанных выше условиях на контуре, т. е. считая на границах области $\mu\nu$, соответствующих непроницаемым стенкам,

$$\psi = \text{const},$$

а на участках границ, соответствующих границам водоемов,

$$H = \text{const}.$$

На построении решения этой системы уравнений мы остановимся подробнее ниже.

Допустим теперь, что это решение построено. Тогда из уравнений (10) предыдущего параграфа определим x и y .

Для линии тока ($\psi = \text{const}$) получим:

$$x = - \int \frac{\cos \vartheta}{\Phi(W)} dH = - \int_{\mu_0, \nu_0}^{\mu, \nu} \frac{\cos \vartheta}{\Phi(W)} \left(\frac{\partial H}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial H}{\partial \nu} d\nu \right) + \text{const}, \quad (8)$$

$$y = - \int \frac{\sin \vartheta}{\Phi(W)} dH = - \int_{\mu_0, \nu_0}^{\mu, \nu} \frac{\sin \vartheta}{\Phi(W)} \left(\frac{\partial H}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial H}{\partial \nu} d\nu \right) + \text{const}.$$

Для линий равного напора ($H = \text{const}$) имеем:

$$x = - \int \frac{\sin \vartheta}{W} d\psi = - \int_{\mu_0, \nu_0}^{\mu, \nu} \frac{\sin \vartheta}{W} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\nu \right) + \text{const}, \quad (9)$$

$$y = \int \frac{\cos \vartheta}{W} d\psi = \int_{\mu_0, \nu_0}^{\mu, \nu} \frac{\cos \vartheta}{W} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\nu \right) + \text{const}.$$

Так как границы области (линии тока и линии равного потенциала) — прямые линии в области $\mu\nu$ и вдоль них $\vartheta = \text{const}$, то для непроницаемой границы имеем:

$$x = -\cos \vartheta_1 \int_{\mu_0, \nu_0}^{\mu, \nu} \left(\frac{\partial H}{\partial \mu} + \text{tg } \vartheta_1 \frac{\partial H}{\partial \nu} \right) \frac{d\mu}{\Phi(W)} + \text{const},$$

$$y = -\sin \vartheta_1 \int_{\mu_0, \nu_0}^{\mu, \nu} \left(\text{ctg } \vartheta_1 \frac{\partial H}{\partial \mu} + \frac{\partial H}{\partial \nu} \right) \frac{d\nu}{\Phi(W)} + \text{const}.$$
(10)

Таким образом мы видим, что прямой линии (непроницаемой стенке) в плоскости $\mu\nu$ отвечает параллельная ей прямая в плоскости $xу$ (непроницаемая стенка).

Аналогично для линии равного напора (границы водоема) получим:

$$x = -\sin \vartheta_2 \int_{\mu_0, \nu_0}^{\mu, \nu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu} + \text{tg } \vartheta_2 \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) \frac{d\mu}{W} + \text{const},$$

$$y = \cos \vartheta_2 \int_{\mu_0, \nu_0}^{\mu, \nu} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu} \text{ctg } \vartheta_2 + \frac{\partial \psi}{\partial \nu} \right) \frac{d\nu}{W} + \text{const}.$$
(11)

Этим прямым в плоскости $\mu\nu$ также отвечают в плоскости $xу$ параллельные им прямые линии.

Конфигурация области, занятой действительным потоком, в плоскости $xу$ будет, таким образом, в общем той же, что и в плоскости $\mu\nu$. Размеры этой области определяются значениями параметров, входящих в решение.

Эти размеры получатся отличными от соответствующих размеров в плоскости фиктивных потоков.

Однако, определяя входящие в решение неопределенные параметры, можно получить заданные заранее размеры области. Надо отметить, что подобное построение области по потоку встречается обычно и во всех задачах, относящихся к случаю, когда закон Дарси справедлив.

§ 4. Метод электроаналогии

Хорошо известно, что практическое осуществление расчетов движения грунтовых вод при данном очертании границ области фильтрации и в обычном случае, когда закон Дарси справедлив, наталкивается на значительные вычислительные трудности. Надо сказать, что вычисление скоростей и распределение напоров даже в случаях, когда решение получено в конечном виде через функции комплексного переменного (например, при помощи формулы Кристоффеля-Шварца), требует достаточно большого вычислительного труда.

Поэтому большое значение приобретает получающий все большее распространение метод электроаналогии. Прибор, основанный на электроаналогии, можно рассматривать как своеобразную электрическую счетную машину, позволяющую быстро и достаточно точно решать линейные самосопряженные уравнения эллиптического типа. Существенное усовершенствование в этот

прибор было внесено Тейлором и Шарманом¹. Прибор Тейлора позволяет получать непосредственно значение скорости фильтрации с точностью до 1—2%.

Напомним основные принципы указанной аналогии. Рассмотрим движение тока в тонком слое однородного жидкого проводника переменной толщины. Обозначим через ρ удельную проводимость проводника. Примем за плоскость xOy горизонтальную поверхность проводника и обозначим через h его толщину.

Таким образом h есть заданная функция xy .

Пусть V есть электрический потенциал и \mathbf{i} — плотности тока.

Тогда движение электрического тока определяется уравнениями:

$$\mathbf{i} = -\rho \text{ grad } V$$

и

$$\text{div}(\mathbf{i}h) = 0.$$

Если обозначить i_x и i_y проекции вектора плотности тока на оси x и y то получим:

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho} i_x, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = -\frac{1}{\rho} i_y, \quad \frac{\partial(i_x h)}{\partial x} + \frac{\partial(i_y h)}{\partial y} = 0.$$

Если ввести в рассмотрение функцию тока Ψ , то получим:

$$\frac{\partial \Psi}{\partial x} = -i_y h, \quad \frac{\partial \Psi}{\partial y} = i_x h.$$

Откуда

$$\frac{\partial V}{\partial x} = -\frac{1}{\rho h} \frac{\partial \Psi}{\partial y}, \quad \frac{\partial V}{\partial y} = \frac{1}{\rho h} \frac{\partial \Psi}{\partial x}. \quad (1)$$

Сравнивая эти уравнения с уравнениями (7) § 3, замечаем, что эти уравнения совпадают, если положить

$$H = V, \quad \psi = \Psi, \quad L = \frac{1}{\rho h}.$$

Таким образом линиям тока отвечают линии электрического тока, а линиям равного напора — линии равного электрического потенциала. Если смоделировать дно согласно уравнению

$$L = \frac{1}{\rho h}$$

и построить область, заполненную проводником, подобную в плане области фильтрационного потока, то, измеряя силу тока в различных точках модели, мы определим поле скоростей неоднородного фильтрационного потока. При опытах можно пользоваться переменным током.

Тейлором и Шарманом предложен простой способ измерения силы тока в отдельных точках проводника. Измерение силы тока может быть легко произведено с точностью до 1—2%, что вполне достаточно для практических

¹ Taylor and Sharman. Proceedings of Royal Society of London, s. A, v. 121, 1928. (См. также доклад J. Peres „Les methodes d'analogie en mécanique appliquée“ в трудах международного конгресса по прикладной механике в Кембридже в 1938 г., в котором приведена обширная литература, относящаяся к использованию метода Тейлора).

целей. При некоторых усилиях измерения могут быть сделаны и более точными.

Способ, предложенный Тейлором, у нас пока мало распространен. Обычно производится просто вычерчивание линий равного потенциала по слуху, пользуясь микрофоном, включенным в цепь.

Сила тока (скорость фильтрации) определяется затем измерением расстояний между соседними линиями равного напора. Этот способ ненадежен, неудобен и дает очень большую погрешность (7—10%). Напротив, пользование прибором Тейлора обеспечивает быстрые и точные результаты. При измерении силы тока Тейлор пользовался механическим выпрямителем и чувствительным вольтметром с большим внутренним сопротивлением. Однако, повидимому, удобнее пользоваться катодным вольтметром, который одновременно может служить и выпрямителем и усилителем.

Опишем операции, которые надо произвести на электрическом приборе для определения потока грунтовых вод, не следующего закону Дарси:

1. Должна быть изготовлена из парафина модель с плоским дном, геометрически подобная в плане области фильтрации. Непроницаемые стенки должны быть сделаны из парафина, а линии, отвечающие линиям равного напора на контуре границы водоемов, из проводника (медные пластинки). Модель должна быть установлена горизонтально и наполнена слабым раствором проводника (вода из водопровода).

2. К линиям равного потенциала на контуре области должны быть подведены напряжения, разность которых должна быть пропорциональна соответствующей разности напоров в натуре. Одна из этих разностей может быть задана произвольно.

3. После этого должна быть измерена сила тока в достаточно большом числе точек. При пользовании прибором Тейлора эти измерения могут быть произведены весьма быстро. Тогда имеем:

$$\frac{i}{i_A} = \frac{\tilde{W}}{\tilde{W}_A},$$

где точка A есть некоторая определенная точка грунтового потока. Эти промеры определяют поле скоростей в потоке грунтовых вод, следующем закону Дарси, или соответствующий фиктивный поток для движения, не следующего закону Дарси. Полученные значения дают поле скоростей с точностью до постоянного множителя.

Затем по заранее составленной таблице функции (§ 3)

$$W = F(\tilde{W}) = F(c^s)$$

определяем истинные скорости и вычисляем функцию L .

4. Пользуясь полученными значениями L , строим новую модель, в плане совпадающую со старой, но с переменной глубиной, определяемой уравнением:

$$h = \frac{c}{L},$$

где c — некоторая постоянная.

В этом новом поле удобно построить линии равных напоров, пользуясь обычной установкой с микрофоном, и затем вдоль этих линий определить прибором Тейлора скорости. Пользуясь уравнениями (8) и (9), по этим данным сейчас же найдем действительные размеры области и смещение точек, для которых определены истинные значения скорости фильтрации и напора.

§ 5. Приближенное решение

Для получения приближенного решения, доступного вычислениям и пригодного для исследования зависимости решения от определяющих его параметров, заметим, что в основном влияние перехода от закона Дарси к другому закону передается переходом согласно уравнению (5) § 2 от фиктивного потока, следующего закону Дарси, к действительному потоку. Решение уравнений (7) § 2 дает некоторую вторичную „поправку“, выражающуюся в некотором искажении области фильтрации и смещении тех точек потока, для которых определены истинные скорости. Поэтому естественно нахождение этой поправки также вести приближенно.

Поясним это на случае, когда имеет место степенной закон

$$I = \frac{1}{x} W \gamma.$$

Коэффициент

$$L = \frac{1}{K_{\phi}}$$

в уравнениях (7) § 3 будет тогда иметь вид:

$$L = \frac{1}{\sqrt{\gamma} K}.$$

После определения фиктивного потока, следующего закону Дарси (возможность его определения мы будем всегда заранее предполагать), значение коэффициента K_{ϕ} будет известно во всей области в плоскости μv . Заменяем теперь этот переменный коэффициент его средним значением. Эту замену можно произвести, руководствуясь теми соображениями, которые обычно применяют при вычислении среднего коэффициента фильтрации для разнородного грунта. Например, разбивая область, занятую потоком, на части с примерно одинаковым коэффициентом фильтрации, положим:

$$K_{\phi \text{ ср}} = \frac{K_{\phi 1} F_1 + K_{\phi 2} F_2 + \dots}{F_1 + F_2 + \dots}. \quad (1)$$

Тогда, вводя обозначение

$$-K_{\phi \text{ ср}} H = \varphi,$$

уравнение (7) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial \mu} = \frac{\partial \psi}{\partial v}, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial v} = -\frac{\partial \psi}{\partial \mu}. \quad (2)$$

Эти уравнения совпадают с уравнениями для потенциала скоростей и функции тока для потока, следующего закону Дарси, и их решение, таким образом, известно.

После этого, пользуясь уравнениями (10) § 3, получаем соответствующие поправки.

Пусть требуется построить линию тока (например, стенку) и найти вдоль нее распределение скорости и напора.

Имеем:

$$x = - \int_{M_0}^M \frac{\cos \vartheta}{\Phi(W)} dH + x_0 = \frac{1}{K_{\Phi \text{ ср } M_0}} \int \frac{\cos \vartheta}{\Phi(W)} d\varphi + x_0,$$

$$y = - \int_{M_0}^M \frac{\sin \vartheta}{\Phi(W)} dH + y_0 = \frac{1}{K_{\Phi \text{ ср } M_0}} \int \frac{\sin \vartheta}{\Phi(W)} d\varphi + y_0.$$

Сравнивая уравнения (2) § 5 с уравнениями (6) § 3, получим:

$$\lg \frac{d(\varphi + i\psi)}{d(\mu + i\nu)} = \lg \tilde{W} - i\vartheta.$$

Следовательно, вдоль линий тока

$$d\varphi = \frac{\tilde{W}}{\cos \vartheta} d\mu = \frac{\tilde{W}}{\sin \vartheta} d\nu.$$

Откуда

$$x = \frac{1}{K_{\Phi \text{ ср}}} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\tilde{W}}{\Phi(W)} d\mu + x_0 = \frac{1}{K_{\Phi \text{ ср}}} \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\tilde{W}}{W} K(W) d\mu + x_0,$$

$$y = \frac{1}{K_{\Phi \text{ ср}}} \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\tilde{W}}{\Phi(W)} d\nu + y_0 = \frac{1}{K_{\Phi \text{ ср}}} \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\tilde{W}}{W} K(W) d\nu + y_0. \quad (3)$$

Аналогичные выражения получаются и для линий равного потенциала. Из уравнений (10) § 3 получаем для линий равного напора:

$$x = \int_{\mu_0}^{\mu} \frac{\tilde{W}}{W} d\mu + x_0, \quad y = \int_{\nu_0}^{\nu} \frac{\tilde{W}}{W} d\nu + y_0. \quad (4)$$

Уравнения (3) и (4) определяют коэффициенты искажения.

Грубую оценку этих искажений получим в виде:

$$l = l_{\Phi} \frac{K_{\text{ср}}}{K_{\Phi \text{ ср}}} \left(\frac{\tilde{W}}{W} \right)_{\text{ср}}, \quad \bar{l} = \bar{l}_{\Phi} \left(\frac{\tilde{W}}{W} \right)_{\text{ср}},$$

где l и \bar{l} обозначают некоторые длины соответственно вдоль линии тока и вдоль линий равного напора.

§ 6. Безнапорное движение

Сделаем некоторые замечания, относящиеся к случаю движения со свободной поверхностью. Так же, как в только что рассмотренном случае напорного движения, наряду с плоскостью xu будем рассматривать вспомогательную плоскость $\mu\nu$, в которой происходит фиктивное движение грунтовых вод, подчиненных закону Дарси.

Укажем граничные условия вдоль свободной поверхности и промежутка высачивания, определяющие течения фиктивных потоков в однородном грунте [уравнение (6) § 2] и в разнородном грунте [уравнение (7) § 2]. Вдоль сво-

бодной поверхности давление p постоянно, и эта поверхность является линией тока. Следовательно, вдоль этой поверхности имеем:

$$\frac{dx}{u} = \frac{dy}{v},$$

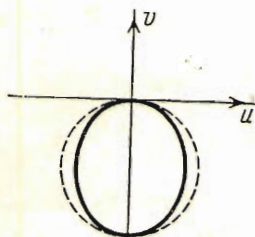
$$p = \rho g (H - y) = \text{const},$$

или, дифференцируя последнее равенство вдоль свободной поверхности,

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \frac{dy}{dx} - \frac{dy}{dx} = -u \frac{\Phi(W)}{W} - \frac{v^2 \Phi(W)}{u W} - \frac{v}{u} = 0,$$

или

$$\Phi(W) + \sin \vartheta = 0. \quad (1)$$



Фиг. 6.

В плоскости uv (плоскость годографа скорости) зависимость (1) изображается в виде замкнутой кривой, изображенной на фиг. 6. В случае закона Дарси эта кривая есть известная окружность, полученная Б. Б. Девисоном.

Вдоль промежутка высачивания давление постоянно и, кроме того, уравнение этого промежутка в плоскости xy дано. Предположим, что промежуток высачивания есть отрезок прямой, наклоненный под углом ϑ_0 к оси x .

Тогда, дифференцируя вдоль этого отрезка уравнение $p = \text{const}$, получим:

$$\frac{\partial H}{\partial x} + \frac{\partial H}{\partial y} \text{tg } \vartheta_0 - \text{tg } \vartheta_0 = 0,$$

или

$$u \frac{\Phi(W)}{W} + v \frac{\Phi(W)}{W} \text{tg } \vartheta_0 + \text{tg } \vartheta_0 = 0$$

и

$$\Phi(W) \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \sin \vartheta_0 = 0. \quad (2)$$

Этому соотношению в плоскости uv также отвечает некоторая кривая, пересекающая в точке $\vartheta = \vartheta_0$ кривую (1). В случае закона Дарси это есть прямая, перпендикулярная промежутку высачивания. Кривые (1) и (2) можно изобразить в плоскости фиктивных скоростей, выражая W через \tilde{W} .

Например, для случая степенного закона

$$\Phi(W) = \frac{1}{x} W^{\gamma}$$

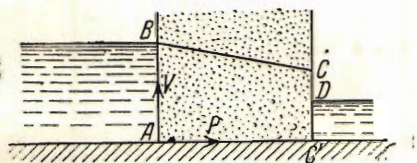
получим уравнение кривых (1) и (2) в плоскости $\tilde{W}e^{-i\vartheta}$ в виде:

$$\tilde{W}^{\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}}} + \sin \vartheta = 0, \quad \tilde{W}^{\frac{\gamma}{\sqrt{\gamma}}} \cos(\vartheta - \vartheta_0) + \sin \vartheta_0 = 0. \quad (3)$$

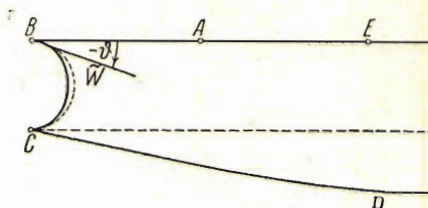
Пользуясь этими уравнениями, а также условиями, определяющими направление вектора фиктивной скорости вдоль линий равного напора и линий тока на контуре области фильтрации, можно в случае, если эти линии прямые, вычертить годографы скоростей, действительный и фиктивный совершенно так же, как в случае наличия закона Дарси.

Чтобы пояснить схему решения, рассмотрим задачу фильтрации через земляную перемычку с вертикальными откосами. Эта задача, решенная Б. Б. Девисоном¹, была затем другим, гораздо более простым методом вновь рассмотрена П. Я. Кочиной². Область в плоскости фиктивных потоков изображена на фиг. 7.

Вид годографа скоростей на плоскости фиктивной скорости изображен на фиг. 8. Этот годограф относится к случаю степенного закона фильтрации. На фиг. 8 кривые BC и CD определяются уравнениями (3).



Фиг. 7.



Фиг. 8.

Определение фиктивного потока в однородном грунте, т. е. решение системы уравнений (6) § 2, сводится к решению задачи Девисона для этих уравнений с тем только изменением, что в плоскости годографа скоростей кривая BC — уже не окружность, а некоторый овал и линия CD не прямая.

Если эта задача решена, то в плоскости $\mu\nu$ определена кривая фиктивной свободной поверхности BC . Выясним, какие граничные условия мы имеем для определения соответствующего решения уравнений (7) § 2. Контур в плоскости $\mu\nu$ и коэффициент L как функция μ и ν определены решением уравнений (6) § 7. Далее, $H = \text{const}$ вдоль AB и $\varphi = \text{const}$ вдоль BC . Покажем, что вдоль CD значения H также известны. Вдоль CD имеем:

$$H - y = \text{const}, \tag{4}$$

$$y = - \int_D^{(\mu, \nu)} \frac{\sin \vartheta}{\Phi(W)} \left(\frac{\partial H}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial H}{\partial \nu} d\nu \right) - \frac{\cos \vartheta}{W} \left(\frac{\partial \psi}{\partial \mu} d\mu + \frac{\partial \psi}{\partial \nu} d\nu \right),$$

или, принимая во внимание уравнение (7) § 2,

$$y = \int_D^{(\mu, \nu)} A \frac{\partial H}{\partial \mu} d\mu + B \frac{\partial H}{\partial \nu} d\nu, \tag{5}$$

где A и B — известные функции от μ и ν .

Уравнения (4) и (5) определяют значение H вдоль отрезка CD в плоскости $\mu\nu$. Вдоль DE напор $H = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$ вдоль EA . Таким образом значения H и ψ даны вдоль всего контура. По этим значениям, решая уравнения (7) § 2, определим ψ и H . Значение x и y вычисляются затем по формулам (10) § 2. Заметим, что полученное решение в области действительного потока

¹ См. „Вопросы механики...“, ч. III, гл. 5, loc. cit.

² Кочина П. Я. Применение теории линейных дифференциальных уравнений к некоторым случаям движения грунтовой воды, „Известия Академии Наук“ СССР, серия физ.-матем., т. III, 1938.

будет отвечать случаю фильтрации через область с несколько другим соотношением размеров и с некоторым криволинейным промежутком высачивания CD .

§ 7. Задача Дююи

В § 1 были приведены уравнения, аналогичные уравнениям Дююи. Эти уравнения имеют вид:

$$\frac{\partial(UZ)}{\partial x} + \frac{\partial(VZ)}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Z}{\partial x} = -U \frac{\Phi(W)}{W}, \quad \frac{\partial Z}{\partial y} = -V \frac{\Phi(W)}{W}.$$

Полагая

$$U = W \cos \vartheta, \quad V = W \sin \vartheta,$$

получим:

$$\begin{aligned} \frac{\partial W}{\partial x} \Phi'(W) \sin \vartheta - \frac{\partial W}{\partial y} \Phi'(W) \cos \vartheta + \Phi(W) \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + \Phi(W) \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= 0, \\ \frac{\partial W}{\partial x} \cos \vartheta + \frac{\partial W}{\partial y} \sin \vartheta - W \sin \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial x} + W \cos \vartheta \frac{\partial \vartheta}{\partial y} &= \frac{W \Phi(W)}{Z}. \end{aligned} \quad (1)$$

Введем так же, как в случае плоской задачи, вместо x и y новые переменные ψ и H , определяемые уравнениями:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \psi}{\partial x} &= -ZW \sin \vartheta, & \frac{\partial Z}{\partial x} &= -\Phi(W) \cos \vartheta, \\ \frac{\partial \psi}{\partial y} &= ZW \cos \vartheta, & \frac{\partial Z}{\partial y} &= -\Phi(W) \sin \vartheta. \end{aligned}$$

Формулы для преобразования производных от некоторой функции $F = F(x, y)$ будут:

$$\begin{aligned} \frac{\partial F}{\partial x} &= -ZW \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial \psi} - \Phi(W) \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial Z}, \\ \frac{\partial F}{\partial y} &= ZW \cos \vartheta \frac{\partial F}{\partial \psi} - \Phi(W) \sin \vartheta \frac{\partial F}{\partial Z}. \end{aligned}$$

Пользуясь этими формулами, преобразуем уравнения (1). Получим следующую систему:

$$\frac{\partial \vartheta}{\partial Z} + \frac{ZW \Phi'(W)}{[\Phi(W)]^2} \frac{\partial W}{\partial \psi} = 0, \quad \frac{\partial \vartheta}{\partial \psi} Z - \frac{\Phi(W)}{W^2} \frac{\partial W}{\partial Z} = \frac{\Phi(W)}{WZ}. \quad (2)$$

Соответствующая каноническая система уравнений (см. дополнение в конце работы) будет иметь вид:

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{1}{2} \sqrt{\frac{W^3 \Phi'(W)}{[\Phi(W)]^3}} \frac{\partial Z^2}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{1}{2} \sqrt{\frac{W^3 \Phi'(W)}{[\Phi(W)]^3}} \frac{\partial Z^2}{\partial v} = 0 \quad (3)$$

и

$$\begin{aligned} \frac{\partial \lg \tilde{W}}{\partial \mu} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{W \Phi'(W)}{\Phi(W)}} \frac{\partial \lg Z^2}{\partial \mu}, \\ \frac{\partial \lg \tilde{W}}{\partial v} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} &= -\frac{1}{2} \sqrt{\frac{W \Phi'(W)}{\Phi(W)}} \frac{\partial \lg Z^2}{\partial v}, \end{aligned} \quad (4)$$

где W определяется, как и раньше, уравнением (5) § 2.

В отличие от случая плоского движения уравнения (4) при произвольном законе фильтрации уже не являются уравнениями Коши-Римана, и метод,

примененный выше для решения задач плоского движения, здесь уже не применим. Однако в случае степенного закона фильтрации

$$I = \frac{1}{x} W^\gamma = \Phi(W)$$

эти уравнения могут быть приведены к виду, аналогичному уравнениям плоской задачи. Действительно, уравнения (4) могут быть переписаны в виде:

$$\frac{\partial \lg(\widetilde{W}Z^{\sqrt{\gamma}})}{\partial \mu} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \lg(\widetilde{W}Z^{\sqrt{\gamma}})}{\partial v} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = 0. \quad (5)$$

Вводя обозначение

$$C = \widetilde{W}Z^{\sqrt{\gamma}},$$

уравнения (3) и (5) можно переписать в виде:

$$\frac{\partial \lg C}{\partial \mu} + \frac{\partial \vartheta}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial \lg C}{\partial v} - \frac{\partial \vartheta}{\partial \mu} = 0, \quad (6)$$

$$\frac{\partial \psi}{\partial v} + \frac{x\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \left(\frac{a}{C}\right)^{\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}}} \frac{\partial Z^{\gamma+1}}{\partial \mu} = 0, \quad \frac{\partial \psi}{\partial \mu} - \frac{x\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} \left(\frac{a}{C}\right)^{\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}}} \frac{\partial Z^{\gamma+1}}{\partial v} = 0, \quad (7)$$

где

$$\widetilde{W} = aW^{\sqrt{\gamma}}.$$

Если обозначить

$$\frac{x\sqrt{\gamma}}{\gamma+1} a^{\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}}} Z^{\gamma+1} = H^*,$$

то получим:

$$\frac{\partial H^*}{\partial \mu} + C^{\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}}} \frac{\partial \psi}{\partial v} = 0, \quad \frac{\partial H^*}{\partial v} - C^{\frac{\gamma-1}{\sqrt{\gamma}}} \frac{\partial \psi}{\partial \mu} = 0. \quad (8)$$

Система уравнений (6) и (8) совершенно аналогична системе уравнений (6) и (7) в § 2.

В заключение отметим, что уравнения (6), (7) § 2, а также уравнения (6) и (8) допускают ряд частных решений, определяемых в замкнутом виде. Эти решения отвечают кратным источникам в некоторой точке области и, в частности, в бесконечно удаленной точке и могут быть получены в замкнутом виде. Исследование решений, получаемых наложением этих решений, а также численные примеры мы рассмотрим в другой работе.

ДОПОЛНЕНИЕ

Приведение уравнений эллиптического типа к каноническому виду¹

Рассмотрим систему уравнений:

$$\begin{aligned} a_{11} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{12} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{11} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{12} \frac{\partial v}{\partial y} &= e_1, \\ a_{21} \frac{\partial u}{\partial x} + a_{22} \frac{\partial v}{\partial x} + b_{21} \frac{\partial u}{\partial y} + b_{22} \frac{\partial v}{\partial y} &= e_2, \end{aligned} \quad (1)$$

где a , b и e — функции от x , y , v и u .

¹ Излагаемые ниже свойства эллиптических систем уравнений были приведены в моем докладе в Московском математическом обществе зимой 1937 г. в связи с новым доказательством теоремы Бернштейна об аналитическом характере решений уравнений эллиптического типа, но не опубликованы.

В дальнейшем будем пользоваться обозначениями:

$$\begin{aligned} \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} &= A, & \begin{vmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{vmatrix} &= C, & \begin{vmatrix} b_{12} & a_{12} \\ b_{22} & a_{22} \end{vmatrix} &= D, \\ \begin{vmatrix} b_{12} & a_{11} \\ b_{22} & a_{21} \end{vmatrix} &= E, & \begin{vmatrix} a_{12} & b_{11} \\ a_{22} & b_{21} \end{vmatrix} &= F, & 2B &= F + E, \\ \begin{vmatrix} e_1 & b_{12} \\ e_2 & b_{22} \end{vmatrix} &= M, & \begin{vmatrix} a_{12} & e_1 \\ a_{22} & e_2 \end{vmatrix} &= N. \end{aligned} \quad (2)$$

Для определения уравнений характеристик¹ присоединим к уравнениям (1) уравнения:

$$du = \frac{\partial u}{\partial x} dx + \frac{\partial u}{\partial y} dy, \quad dv = \frac{\partial v}{\partial x} dx + \frac{\partial v}{\partial y} dy. \quad (3)$$

Решаем систему уравнений (1) и (3) относительно производных

$$\frac{\partial u}{\partial x}, \quad \frac{\partial u}{\partial y}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} \quad \text{и} \quad \frac{\partial v}{\partial y}.$$

Из уравнений (3) имеем:

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{du}{dx} - \frac{\partial u}{\partial y} \frac{dy}{dx}, \quad \frac{\partial v}{\partial x} = \frac{dv}{dx} - \frac{\partial v}{\partial y} \frac{dy}{dx}. \quad (4)$$

Обозначая

$$\frac{dy}{dx} = \lambda$$

и подставляя значения (4) в (1), получим:

$$\begin{aligned} (b_{11} - a_{11} \lambda) \frac{\partial u}{\partial y} + (b_{12} - a_{12} \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} &= e_1 - a_{11} \frac{du}{dx} - a_{12} \frac{dv}{dx}, \\ (b_{21} - a_{21} \lambda) \frac{\partial u}{\partial y} + (b_{22} - a_{22} \lambda) \frac{\partial v}{\partial y} &= e_2 - a_{21} \frac{du}{dx} - a_{22} \frac{dv}{dx}. \end{aligned} \quad (5)$$

Обозначим:

$$\begin{aligned} \Delta &= \begin{vmatrix} b_{11} - a_{11} \lambda & b_{12} - a_{12} \lambda \\ b_{21} - a_{21} \lambda & b_{22} - a_{22} \lambda \end{vmatrix}, \\ \Delta_u &= \begin{vmatrix} e_1 - a_{11} \frac{du}{dx} - a_{12} \frac{dv}{dx} & b_{12} - a_{12} \lambda \\ e_2 - a_{21} \frac{du}{dx} - a_{22} \frac{dv}{dx} & b_{22} - a_{22} \lambda \end{vmatrix}, \\ \Delta_v &= \begin{vmatrix} b_{11} - a_{11} \lambda & e_1 - a_{11} \frac{du}{dx} - a_{12} \frac{dv}{dx} \\ b_{21} - a_{21} \lambda & e_2 - a_{21} \frac{du}{dx} - a_{22} \frac{dv}{dx} \end{vmatrix}, \end{aligned}$$

тогда из (5) получим:

$$\frac{\partial u}{\partial y} = \frac{\Delta_u}{\Delta}, \quad \frac{\partial v}{\partial y} = \frac{\Delta_v}{\Delta}. \quad (6)$$

Уравнения характеристик получим в виде:

$$\Delta = 0, \quad \Delta_u = 0, \quad \Delta_v = 0. \quad (7)$$

¹ О характеристиках см., например [3], „Новые вопросы механики“, ч. 1, § 7 и Гурса „Курс математического анализа“, т. III, ч. 1.

Одно из уравнений (7) есть, очевидно, следствие двух других. Раскрывая левые части уравнений (7), получим:

$$\begin{aligned} A\lambda^2 + 2B\lambda + C &= 0, \\ (E + A\lambda) \frac{du}{dx} + D \frac{dv}{dx} + M + N\lambda &= 0. \end{aligned} \quad (8)$$

Решая первое из этих уравнений относительно λ , имеем:

$$\lambda = -\frac{B}{A} \pm \sqrt{\frac{B^2 - AC}{A}}. \quad (9)$$

Система уравнений (1) будет эллиптического типа, если

$$B^2 - AC < 0. \quad (10)$$

В этом случае

$$\lambda = P \pm iQ, \quad (11)$$

где

$$P = -\frac{B}{A}, \quad Q = \frac{\sqrt{AC - B^2}}{A}. \quad (12)$$

Уравнение характеристик будет, следовательно,

$$\begin{aligned} dy &= \lambda_1 dx, \\ (E + \lambda_1 A) du + D dv + (M + N\lambda_1) dx &= 0, \end{aligned} \quad (13)$$

где

$$\lambda_1 = P + iQ.$$

Заменяем в уравнениях (13) символ дифференцирования символом

$$\frac{\partial}{\partial \mu} + i \frac{\partial}{\partial \nu}.$$

Отделяя затем вещественные и мнимые части, получим систему уравнений:

$$\begin{aligned} \frac{\partial y}{\partial \nu} - P \frac{\partial x}{\partial \nu} - Q \frac{\partial x}{\partial \mu} &= 0, \\ \frac{\partial y}{\partial \mu} + Q \frac{\partial x}{\partial \nu} - P \frac{\partial x}{\partial \mu} &= 0, \\ \frac{F - E}{2} \frac{\partial u}{\partial \mu} + \sqrt{AC - B^2} \frac{\partial u}{\partial \nu} - D \frac{\partial v}{\partial \mu} &= M \frac{\partial x}{\partial \mu} + N \frac{\partial y}{\partial \mu}, \\ \frac{F - E}{2} \frac{\partial u}{\partial \nu} - \sqrt{AC - B^2} \frac{\partial u}{\partial \mu} - D \frac{\partial v}{\partial \nu} &= M \frac{\partial x}{\partial \nu} + N \frac{\partial y}{\partial \nu}. \end{aligned} \quad (14)$$

Эту систему назовем канонической системой уравнений. Пусть

$$x = x(\mu, \nu), \quad y = y(\mu, \nu), \quad u = u(\mu, \nu), \quad v = v(\mu, \nu)$$

есть какое-нибудь решение этой системы, не обращающее тождественно в нуль определитель

$$\frac{D(x, y)}{D(\mu, \nu)} = Q \left\{ \left(\frac{\partial x}{\partial \mu} \right)^2 + \left(\frac{\partial x}{\partial \nu} \right)^2 \right\}.$$

Тогда это решение есть также решение системы уравнений (1), выраженное при посредстве параметров μ и ν . Это утверждение можно проверить непосредственным вычислением. Если функции $x = x(\mu, \nu)$ и $y = y(\mu, \nu)$ таковы, что удовлетворяют первым двум уравнениям (14), то, принимая за независимые переменные μ и ν в уравнении (1), получим вторые уравнения (14).

Отметим свойства системы (14).

1. Эта система остается неизменной, если за новые независимые переменные вместо μ и ν взять μ^* и ν^* , связанные с μ и ν соотношением:

$$\mu^* + i\nu^* = f(\mu + i\nu),$$

где f — аналитическая функция.

Иными словами, система (14) инвариантна по отношению к произвольному конформному преобразованию в плоскости $\mu\nu$.

2. Если уравнения характеристики допускают интегрируемую комбинацию, т. е. если существует соотношение

$$p(x, y, u, v) + iq(x, y, u, v) = \text{const},$$

справедливое в силу уравнений характеристик (13), то, если принять p и q за новые неизвестные функции вместо каких-нибудь двух из функций x, y, u, v , два уравнения этой системы будут уравнениями Коши-Римана:

$$\frac{\partial p}{\partial \mu} = \frac{\partial q}{\partial \nu}, \quad \frac{\partial p}{\partial \nu} = -\frac{\partial q}{\partial \mu},$$

или, иначе говоря, $p + iq$ будет аналитической функцией $\mu + i\nu$.

Оба эти свойства нетрудно проверить непосредственным вычислением.

Поступила в редакцию 13. IX 1939.

Институт механики
Акад. Наук Союза ССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Лейбензон Л. С. Нефтепромысловая механика. 1934. Ч. II.
2. Форгхеймер. Гидравлика, пер. с немецкого. ОНТИ. 1935.
3. Христианович С. А., Михлин С. Г., Девисон В. Б. Некоторые новые вопросы механики сплошной среды. Изд. Акад. Наук СССР. 1938.
4. Чаплыгин С. А. О газовых струях. Полное собрание сочинений. Т. II.

MOTION OF GROUND WATER WHICH DOES NOT CONFORM TO DARCY'S LAW

S. A. CHRISTIANOVITCH

(Summary)

In the work it is assumed that there exists an arbitrary relation between relative drop of level and velocity of filtration.

The author gives equations analogous to those of Forcheimer and Dupuy.

Introducing the auxiliary variables, these equations in cases of plane motion can be reduced to the linear form.

Further the general method for solving problems of motion in the above-mentioned case is outlined.

For the general case, the numerical solution can be obtained by means of electro-analogy with the aid of a special device.

Moreover on the basis of the exact solution rather a simple approximate procedure may be evolved.