

Т. IV, в. 1, 1940

ТЕОРИЯ КРЫЛА КОНЕЧНОГО РАЗМАХА КРУГОВОЙ ФОРМЫ В ПЛАНЕ

Н. Е. КОЧИН

(Москва)

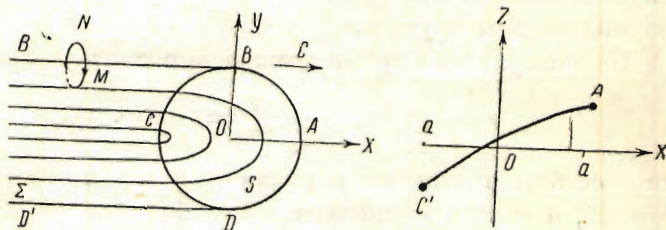
В настоящей статье мы строим теорию крыла конечного размаха круговой формы в плане. В этой теории учитывается распределение присоединенных вихрей вдоль поверхности крыла. Эта идея была уже применена в ряде работ. В частности, случай круглого крыла рассмотрен в работе Киннера^[1].

Здесь рассматривается другой метод, который позволяет получить в замкнутой форме выражение для общего решения этой задачи. При этом крыло предполагается бесконечно тонким и слабо изогнутым, а задача обычным образом линеализируется.

При сравнении результатов предлагаемой теории с результатами обычной теории крыла конечного размаха получаются большие расхождения, указывающие на недостаточность обычной теории для рассматриваемого случая. Для обычно употребляющихся на практике крыльев, имеющих значительно большее удлинение, должно получаться более благоприятное соотношение между результатами обычной теории и уточненной.

§ 1. Постановка задачи

Мы будем рассматривать поступательное прямолинейное движение круглого крыла с постоянной скоростью c . Возьмем правую систему прямолинейных прямоугольных координат $Oxyz$ и направим ось Ox в направлении движения крыла. Крыло мы будем предполагать тонким и слабо изогнутым, причем его проекция на плоскость Oxy имеет форму круга $ABCD$ радиуса a с центром в начале координат (Фиг. 1); на этой же фигуре показан также разрез крыла плоскостью Oxz .



Фиг. 1.

Пусть

$$z = \zeta(x, y) \tag{1.1}$$

представляет уравнение поверхности крыла, причем как отношение $\frac{\zeta}{a}$, так и производные $\frac{\partial \zeta}{\partial x}$ и $\frac{\partial \zeta}{\partial y}$ предполагаются малыми величинами.

Оси координат мы будем считать неподвижно связанными с крылом. Жидкость, как обычно, будем предполагать несжимаемой, а движение безвихревым, установившимся и происходящим при отсутствии внешних сил. Потенциал скорости абсолютного движения жидкости обозначим через $\varphi(x, y, z)$, так что проекции абсолютной скорости частицы жидкости определяются формулами:

$$v_x = \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z}. \quad (1.2)$$

Уравнение неразрывности

$$\frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

показывает, что функция φ должна удовлетворять уравнению Лапласа:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 \varphi}{\partial z^2} = 0. \quad (1.3)$$

Будем считать, что на передней кромке крыла скорость частиц жидкости обращается в бесконечность порядка $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, где δ есть расстояние частицы до переднего края, на задней же кромке крыла будем считать скорость конечной. С задней стороны крыла будет сходиться поверхность разрыва, на которой функция φ терпит разрыв. Функция $\varphi(x, y, z)$ будет непрерывной вместе со всеми своими производными во всем пространстве, ограниченном указанной поверхностью разрыва и поверхностью крыла.

Линеализируем задачу следующим образом. Будем считать, что функция φ терпит разрыв на бесконечной полуполосе Σ , расположенной в плоскости Oxy в направлении отрицательной оси Ox от задней полукруглости BSD круга S до бесконечности. Точно так же мы заменим условие на поверхности крыла условием на поверхности круга S , расположенного в плоскости Oxy , и будем, таким образом, считать функцию $\varphi(x, y, z)$ регулярной в области получающейся из всего бесконечного пространства вырезанием бесконечной полуполосы Σ и круга S .

На поверхности крыла должно выполняться граничное условие:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial n} = c \cos(n, x), \quad (1.4)$$

где n есть направление нормали к поверхности крыла. Направление этой нормали, в силу предположения о слабой изогнутости крыла, мало отличается от направления оси z . Поэтому, отбрасывая малые величины второго порядка, согласно формуле

$$\cos(n, x) = - \frac{\frac{\partial \zeta}{\partial x}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \zeta}{\partial y}\right)^2}} \quad (1.5)$$

вместо условия (1.4) будем иметь:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial z} = -c \frac{\partial \zeta}{\partial x}.$$

Это условие должно выполняться на поверхности крыла, мы же будем считать его выполняющимся на поверхности круга S , т. е. при $z=0$; это сводится опять-таки к отбрасыванию малых величин второго порядка по сравнению с малыми первого порядка.

Таким образом мы получаем граничное условие:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -c \frac{\partial \zeta(x, y)}{\partial x} \quad \text{при} \quad x^2 + y^2 < a^2, \quad (1.6)$$

которое должно выполняться как на верхней, так и на нижней стороне круга S .

Переходим теперь к установлению граничных условий, которые должны иметь место на поверхности разрыва Σ . Прежде всего мы имеем на поверхности разрыва сходящей с задней кромки крыла, кинематическое условие, выражающее непрерывность нормальной составляющей скорости, т. е. величина $\frac{\partial \varphi}{\partial n}$ должна оставаться непрерывной при переходе через поверхность разрыва. Так как на поверхности разрыва направление нормали мало отличается от направления оси z , то, перенося условие на поверхности разрыва на полушару Σ , мы приходим к равенству:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=+0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=-0} \quad \text{при} \quad |y| < a, \quad x^2 + y^2 > a^2, \quad x < 0, \quad (1.7)$$

выражающему непрерывность $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ при переходе через поверхность разрыва Σ .

Рассмотрим теперь динамическое условие, выражающее непрерывность давления при переходе через поверхность разрыва Σ .

Чтобы определить давление p , применим формулу Бернулли к установившемуся обтеканию крыла, получающемуся при наложении на рассматриваемый поток равномерного потока в направлении отрицательной оси Ox со скоростью c . В этом установившемся обтекании проекции скорости определяются формулами:

$$v_x = -c + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad v_y = \frac{\partial \varphi}{\partial y}, \quad v_z = \frac{\partial \varphi}{\partial z},$$

и следовательно, формула Бернулли приводится к виду:

$$p = -\frac{\rho}{2} \left[\left(-c + \frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y}\right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)^2 \right] + \text{const.} \quad (1.8)$$

Отбрасывая малые величины второго порядка, получаем:

$$p = p_0 + \rho c \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad (1.9)$$

где p_0 — значение давления на бесконечности.

Так как давление должно оставаться непрерывным при переходе через поверхность разрыва, сходящую с задней кромки крыла, то из полученной

формулы видно, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ не терпит разрыва на поверхности разрыва. Снося это условие на поверхность Σ , мы приходим к условию:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=+0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=-0} \quad \text{при} \quad |y| < a, \quad x^2 + y^2 > a^2, \quad x < 0, \quad (1.10)$$

выражающему непрерывность $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ при переходе через Σ .

Функция φ терпит разрыв на поверхностях S и Σ . Это означает, что вдоль поверхностей S и Σ расположены поверхностные вихри, показанные на фиг. 1. Направление такого поверхностного вихря перпендикулярно направлению вектора относительной скорости двух частей жидкости, прилегающих к поверхности разрыва с двух ее сторон. В частности, на поверхности Σ , в силу условия (1.10), терпит разрыв только $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$, поэтому вихревые линии на Σ направлены параллельно оси Ox , как показано на фиг. 1.

Так как все вихри лежат в плоскости Oxy , то ясно, что в двух симметричных относительно плоскости Oxy точках значения $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ будут одинаковы, а значения $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и $\frac{\partial \varphi}{\partial y}$ будут отличаться только знаком.

Поэтому можно считать, что

$$\varphi(x, y, -z) = -\varphi(x, y, z). \quad (1.11)$$

Полагая здесь, в частности, $z=0$, получаем, что

$$\varphi(x, y, 0) = 0$$

во всей плоскости Oxy , за исключением круга S и полосы Σ (на которых φ терпит разрыв).

Так как на полосе Σ должно выполняться как условие (1.10), так и вытекающее из (1.11) условие

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=+0} = -\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=-0},$$

то

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=+0} = \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=-0} = 0 \quad \text{при} \quad |y| < a, \quad x^2 + y^2 > a^2, \quad x < 0. \quad (1.12)$$

Наконец, так как жидкость далеко впереди перед крылом предполагается невозмущенной, то имеем очевидное условие на бесконечности:

$$\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial y} = \lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\partial \varphi}{\partial z} = 0. \quad (1.13)$$

В рассматриваемой гидродинамической задаче, как мы видим, учитывается распределение вихрей вдоль поверхности крыла. В этом и состоит уточнение, которое здесь вносится в обычную теорию крыла.

Итак, мы свели нашу гидродинамическую задачу к следующей математической задаче: найти гармоническую функцию $\varphi(x, y, z)$, регулярную во всем полупространстве $z > 0$, которая на круге S удовлетворяет условию

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z}\right)_{z=0} = -c \frac{\partial \zeta}{\partial x}, \quad (1.14)$$

на полосе Σ условию

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=0} = 0, \quad (1.15)$$

во всей остальной части плоскости Oxy условию

$$\varphi(x, y, 0) = 0 \quad (1.16)$$

и производные которой остаются ограниченными в окрестности задней полуокружности BCD , а в окрестности передней полуокружности BAD могут обращаться в бесконечность порядка $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, где δ — расстояние точки до полуокружности BAD . Наконец, должно выполняться условие на бесконечности (1.13).

В настоящей работе мы даем в замкнутой форме зависящее от произвольной функции $f(x, y)$ выражение для гармонической функции $\varphi(x, y, z)$, удовлетворяющее всем поставленным требованиям, кроме условия (1.14). Из этого условия может быть определена функция $\zeta(x, y)$, т. е. соответствующая функции $f(x, y)$ форма крыла. Мы приводим также интегральное уравнение, к решению которого сводится определение функции $f(x, y)$ по заданной форме крыла, т. е. по заданной функции $\zeta(x, y)$.

§ 2. Вывод основной формулы

Возьмем внутри круга $ABCD$ точку Q с координатами ξ, η и построим функцию $K(x, y, z, \xi, \eta)$, где x, y, z — координаты точки P , по следующим условиям:

- 1) функция K , рассматриваемая как функция точки P , есть гармоническая функция вне круга $ABCD$,
- 2) функция K обращается в нуль в точках плоскости Oxy , лежащих вне круга $ABCD$,
- 3) производная $\frac{\partial K}{\partial z}$ обращается в нуль во всех точках круга $ABCD$, кроме точки Q ,
- 4) когда точка P приближается к точке Q , оставаясь в верхнем пространстве $z > 0$, то функция K бесконечно растет, но разность $K - \frac{1}{r}$, где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2},$$

остаётся ограниченной,

- 5) функция K остаётся ограниченной и непрерывной в окрестности контура C круга $ABCD$.

Заметим, что в силу второго условия значения функции K в двух симметричных относительно плоскости Oxy точках отличаются только знаком:

$$K(x, y, -z, \xi, \eta) = -K(x, y, z, \xi, \eta), \quad (2.1)$$

как это следует из принципа аналитического продолжения. А тогда ясно, что если третье условие выполняется на верхней стороне круга $ABCD$, то оно будет выполняться и на нижней стороне этого круга, так как по (2.1)

производная $\frac{\partial K}{\partial z}$ имеет одинаковые значения в двух точках, симметричных относительно плоскости Oxy .

Очевидно далее, что когда точка P приближается к точке Q снизу, так что $z < 0$, то $K(x, y, z, \xi, \eta)$ будет вести себя как $-\frac{1}{r}$.

В силу третьего условия функция K может быть продолжена в нижнее полупространство через верхнюю сторону круга $ABCD$ как четная функция от z . Мы получаем, таким образом, вторую ветвь функции K , определенную опять-таки во всем пространстве вне круга $ABCD$ и отличающуюся только знаком от первоначальной ветви функции K . Но тогда очевидно, что в точках верхней стороны круга $ABCD$ значения второй ветви функции K и ее производных совпадут со значениями первой ветви функции K и ее производных в точках нижней стороны круга $ABCD$, т. е. при аналитическом продолжении второй ветви функции K через верхнюю сторону круга $ABCD$ в нижнее полупространство мы опять приходим к первоначальной ветви этой функции.

Рассмотрим двулистное пространство Римана, для которого линией ветвления служит окружность $ABCD$. В этом пространстве $K(x, y, z, \xi, \eta)$ является однозначной гармонической функцией, остающейся всюду конечной, за исключением двух точек Q , имеющих те же самые координаты $(\xi, \eta, 0)$, но принадлежащих двум разным листам пространства; в одном листе функция K ведет себя вблизи точки Q как $\frac{1}{r}$, а в другом листе как $-\frac{1}{r}$. Такая функция $K(x, y, z, \xi, \eta)$ легко может быть построена по методу Зоммерфельда [2]. Последним определена для случая двулистного пространства Римана, имеющего линией ветвления ось Oz , гармоническая функция $V(\rho, \varphi, z)$ [ρ, φ, z — цилиндрические координаты точки], которая однозначна и непрерывна во всем двулистном пространстве, за исключением точек Q и Q' , имеющих цилиндрические координаты (ρ', φ', z') и $(\rho', -\varphi', z')$, причем вблизи точки Q функция V ведет себя как $\frac{1}{r}$, а вблизи точки Q' как $-\frac{1}{r'}$, где

$$r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi - \varphi') + (z - z')^2},$$

$$r' = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos(\varphi + \varphi') + (z - z')^2};$$

эта функция V имеет вид:

$$V = \frac{2}{\pi} \left\{ \frac{1}{r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\sigma + \tau}{\sigma - \tau}} - \frac{1}{r'} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\sigma + \tau'}{\sigma - \tau'}} \right\},$$

где

$$\sigma = \frac{1}{2\sqrt{\rho\rho'}} \sqrt{(\rho + \rho')^2 + (z - z')^2}, \quad \tau = \cos \frac{\varphi - \varphi'}{2}, \quad \tau' = \cos \frac{\varphi + \varphi'}{2}.$$

Полагая, в частности,

$$\varphi' = \pi, \quad r = \sqrt{\rho^2 + \rho'^2 + 2\rho\rho' \cos \varphi + (z - z')^2},$$

получим:

$$V = \frac{2}{\pi r} \left\{ \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\sigma + \tau}{\sigma - \tau}} - \operatorname{arc} \operatorname{tg} \sqrt{\frac{\sigma - \tau}{\sigma + \tau}} \right\} = \frac{2}{\pi r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\tau}{\sqrt{\sigma^2 - \tau^2}},$$

или окончательно

$$V = \frac{2}{\pi r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{2\sqrt{\rho\rho'} \sin \frac{\varphi}{2}}{r}.$$

Произведем теперь инверсию относительно точки с координатами $\rho = a$, $\varphi = 0$, $z = 0$, положив

$$\begin{aligned} \rho \cos \varphi &= a + \frac{2a^2(x_1 - a)}{(x_1 - a)^2 + y_1^2 + z_1^2}, & -\rho' &= a + \frac{2a^2(\xi_1 - a)}{(\xi_1 - a)^2 + \zeta_1^2}, \\ \rho \sin \varphi &= \frac{2a^2 y_1}{(x_1 - a)^2 + y_1^2 + z_1^2}, & z &= \frac{2a^2 z_1}{(x_1 - a)^2 + y_1^2 + z_1^2}, & z' &= \frac{2a^2 \zeta_1}{(\xi_1 - a)^2 + \zeta_1^2}. \end{aligned}$$

Тогда функция

$$V_1 = \frac{2a^2 V}{\sqrt{(x_1 - a)^2 + y_1^2 + z_1^2} \sqrt{(\xi_1 - a)^2 + \zeta_1^2}},$$

выраженная в переменных x_1, y_1, z_1 , будет, как известно, гармонической функцией. Вычисляя ее и заменяя затем x_1, y_1, z_1 на y, z, x , а ξ_1, ζ_1 на η, ξ , мы придем к искомому выражению функции $K(x, y, z, \xi, \eta)$:

$$K(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{2}{\pi r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{\sqrt{2} a r}, \quad (2.2)$$

одному при $z > 0$, где

$$r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}, \quad (2.3)$$

$$R = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + 4a^2 z^2} = \sqrt{(a^2 + x^2 + y^2 + z^2)^2 - 4a^2(x^2 + y^2)}.$$

Легко непосредственно проверить, что эта функция удовлетворяет всем поставленным выше требованиям; при этом нужно брать значение арктангенса, лежащее между 0 и $\frac{\pi}{2}$; при $z < 0$ значение функции K получается по формуле (2.1).

Составим теперь функцию:

$$\varphi_1(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_S K(x, y, z, \xi, \eta) f(\xi, \eta) d\xi d\eta, \quad (2.4)$$

где $f(x, y)$ есть произвольная функция, непрерывная вместе с частными производными первого и второго порядка во всем круге S , и интегрирование распространяется по всей площади круга S . Очевидно, что $\varphi_1(x, y, z)$ есть гармоническая функция во всем внешнем по отношению к кругу S пространстве. В силу первого свойства функции K функция $\varphi_1(x, y, z)$ обращается в нуль во всех точках плоскости Oxy , лежащих вне круга S . Поэтому условия (1.15) и (1.16), которым должно удовлетворять решение $\varphi(x, y, z)$ поставленной в § 1 задачи, будут выполнены для функции $\varphi_1(x, y, z)$. Однако функция $\varphi_1(x, y, z)$ не удовлетворяет, вообще говоря, условию ограниченности производных от этой функции на задней половине контура круга S . Поэтому прибавим к $\varphi_1(x, y, z)$ такую функцию, чтобы полученная функция $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяла и этому условию.

Мы имеем очевидную формулу:

$$\frac{\partial \varphi_1}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial K}{\partial x} f(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Рассмотрим характер стремления функции $\frac{\partial K}{\partial x}$ к бесконечности при приближении точки к контуру C круга S . Как легко вычислить,

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{2(x-\xi)}{\pi r^3} \operatorname{arctg} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{\sqrt{2}ar} - \frac{2\sqrt{2}a}{\pi} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{2a^2 r^2 + (a^2 - \xi^2 - \eta^2)(a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R)} \left\{ \frac{x-\xi}{r^2} + \frac{x}{R} \right\}. \quad (2.5)$$

Пусть точка с координатами x, y, z находится вблизи контура C круга S и обозначим через δ расстояние этой точки до контура C , тогда

$$\delta = \sqrt{a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - 2a\sqrt{x^2 + y^2}}; \quad (2.6)$$

поэтому вблизи контура C мы имеем приближенное равенство

$$R \approx 2a\delta. \quad (2.7)$$

Когда фиксированная точка ξ, η лежит внутри круга S , а точка с координатами x, y, z находится вблизи контура C этого круга, то, как следует из (2.5),

$$\frac{\partial K}{\partial x} = -\frac{\sqrt{2}a}{\pi a r^2 R} \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} + O(1), \quad (2.8)$$

где символ $O(1)$ означает величину, остающуюся конечной, когда δ стремится к нулю. Таким образом $\frac{\partial K}{\partial x}$ имеет порядок $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$. Однако выделенная нами главная часть $\frac{\partial K}{\partial x}$ не является гармонической функцией. Нетрудно, однако, найти гармоническую функцию, имеющую ту же бесконечную часть вблизи контура C , что и $\frac{\partial K}{\partial x}$. Для этого достаточно составить аналогично (2.5) производную $\frac{\partial K}{\partial \xi}$; эта производная остается ограниченной вблизи контура C крыла; кроме того, легко видеть, что

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial \xi} = -\frac{2\sqrt{2}a\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{\pi \{2a^2 r^2 + (a^2 - \xi^2 - \eta^2)(a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R)\}} \left\{ \frac{x\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}}{R} + \frac{\xi}{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2}} \right\}. \quad (2.9)$$

Эта функция является гармонической и отличается от $\frac{\partial K}{\partial x}$ на величину, остающуюся конечной вблизи контура C .

Можно далее путем простых, хотя и длинных, вычислений показать, что только что написанная функция представляется в виде интеграла:

$$\frac{\partial K}{\partial x} + \frac{\partial K}{\partial \xi} = \quad (2.10)$$

$$= -\frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \int_{-\pi}^{\pi} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} \cos \gamma \, d\gamma}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)(\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)},$$

причем, как нетрудно видеть, функция

$$\frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma}$$

есть решение уравнения Лапласа, имеющее окружность C линией ветвления и точку с координатами $(a \cos \gamma, a \sin \gamma, 0)$ особой точкой. Отсюда следует что функция

$$\begin{aligned} \frac{\partial K}{\partial x} + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R \cos \gamma} d\gamma}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} = \\ = - \frac{\partial K}{\partial \xi} - \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R \cos \gamma} d\gamma}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} \end{aligned} \quad (2.11)$$

остается ограниченной вблизи точек задней полуокружности круга S .

Поэтому мы примем:

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint_S f(\xi, \eta) \left\{ \frac{\partial K}{\partial x} + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R \cos \gamma} d\gamma}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} \right\} d\xi d\eta; \end{aligned} \quad (2.12)$$

интегрируя по x и принимая во внимание условия на бесконечности (1.13) получим окончательную формулу:

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_S f(\xi, \eta) \left\{ K(x, y, z, \xi, \eta) + \right. \\ \left. + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \int_{-\infty}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^x \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R \cos \gamma} d\gamma dx}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} \right\} d\xi d\eta. \end{aligned} \quad (2.13)$$

Эту формулу можно написать в несколько ином виде. В силу (2.11)

$$\begin{aligned} \frac{\partial \varphi}{\partial x} = - \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial K}{\partial \xi} f(\xi, \eta) d\xi d\eta - \frac{1}{2\sqrt{2}\pi^3} \times \\ \times \iint_S \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R \cos \gamma} d\gamma}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \end{aligned}$$

Так как на контуре C функция K обращается в нуль, то

$$\iint_S \frac{\partial K}{\partial \xi} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = - \iint_S K \frac{\partial f}{\partial \xi} d\xi d\eta. \quad (2.14)$$

Вводя далее обозначения

$$- \frac{1}{2\pi^3 \sqrt{2}} \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma} = G(\gamma), \quad \frac{\partial f}{\partial \xi} = F(\xi, \eta), \quad (2.15)$$

получим:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \int_S \int K(x, y, z, \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta + \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} G(\gamma) \cos \gamma}{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma} d\gamma \quad (2.16)$$

и после интегриации по x

$$\begin{aligned} \varphi(x, y, z) = & \frac{1}{2\pi} \int_S \int \int_{+\infty}^{\infty} K(x, y, z, \xi, \eta) dx F(\xi, \eta) d\xi d\eta + \\ & + \int_{+\infty}^x \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} G(\gamma) \cos \gamma}{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma} dx d\gamma. \end{aligned} \quad (2.17)$$

Задание функции $F(\xi, \eta)$ в круге S и функции $G(\gamma)$ в промежутке $(-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2})$ полностью определяет $f(\xi, \eta)$, поэтому представления (2.13) и (2.17) являются эквивалентными.

Покажем теперь, что найденная нами функция $\varphi(x, y, z)$ удовлетворяет поставленным в § 1 требованиям.

Эта функция является, очевидно, гармонической функцией во всем пространстве, внешнем по отношению к кругу S , и удовлетворяет условиям на бесконечности (1.13). Из формулы (2.12) следует, что в плоскости Oxy при $x^2 + y^2 > a^2$ выполняется условие

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x}\right)_{z=0} = 0,$$

а из (2.13) вытекает, что

$$\varphi(x, y, 0) = 0$$

в той части плоскости Oxy , которая лежит вне круга S и полосы Σ .

Остается доказать ограниченность первых производных от функции $\varphi(x, y, z)$ в точках задней полуокружности C и установить поведение этих производных при стремлении к точкам передней полуокружности C .

При рассмотрении окрестности задней стороны окружности C воспользуемся формулой (2.16). Она показывает, что $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ остается непрерывной в точках задней половины окружности C и обращается в нуль в этих точках.

Рассмотрим теперь поведение производных по y и z функции

$$\Phi(x, y, z) = \iint_S K(x, y, z, \xi, \eta) F(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (2.18)$$

вблизи контура C .

Имеем:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = \iint_S \frac{\partial K}{\partial y} F(\xi, \eta) d\xi d\eta; \quad (2.19)$$

но аналогично (2.9)

$$\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial \eta} = -\frac{2a\sqrt{2}\sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2+R}}{\pi[2a^2r^2+(a^2-\xi^2-\eta^2)(a^2-x^2-y^2-z^2+R)]} \left\{ \frac{y\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}}{R} + \frac{\eta}{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}} \right\} \quad (2.20)$$

и аналогично (2.14)

$$\iint_S \frac{\partial K}{\partial \eta} F(\xi, \eta) d\xi d\eta = - \iint_S K \frac{\partial F}{\partial \eta} d\xi d\eta, \quad (2.21)$$

причем эта часть интеграла всюду остается ограниченной и обращается на контуре C в нуль.

Чтобы оценить оставшуюся часть интеграла (2.19), рассмотрим два интеграла:

$$J_1(x, y, z) = \iint_S \frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2} d\xi d\eta}{2a^2r^2+(a^2-\xi^2-\eta^2)(a^2-x^2-y^2-z^2+R)}, \quad (2.22)$$

$$J_2(x, y, z) = \iint_S \frac{d\xi d\eta}{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2}[2a^2r^2+(a^2-\xi^2-\eta^2)(a^2-x^2-y^2-z^2+R)]}.$$

Оба они, в силу симметрии, зависят только от $\sqrt{x^2+y^2}$ и z , поэтому не нарушая общности, можно считать $y=0$, $x>0$. Введем опять расстояние δ точки с координатами $(x, 0, z)$ до контура C :

$$\delta = \sqrt{(a-x)^2+z^2}.$$

Так как

$$R \geq |x^2+z^2-a^2|,$$

то мы будем иметь:

$$J_1(x, 0, z) \leq \iint_S \frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2} d\xi d\eta}{2a^2[(x-\xi)^2+\eta^2+z^2]}.$$

Введем полярные координаты:

$$\xi = \rho \cos \vartheta, \quad \eta = \rho \sin \vartheta;$$

тогда

$$J_1(x, 0, z) \leq \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho \sqrt{a^2-\rho^2} d\rho d\vartheta}{2a^2[\rho^2-2\rho x \cos \vartheta+x^2+z^2]}.$$

Так как

$$\int_0^{2\pi} \frac{d\vartheta}{\rho^2-2\rho x \cos \vartheta+x^2+z^2} = \frac{2\pi}{\sqrt{(\rho^2+x^2+z^2)^2-4\rho^2x^2}},$$

то

$$J_1(x, 0, z) \leq \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{\rho \sqrt{a^2-\rho^2} d\rho}{\sqrt{(\rho^2+x^2+z^2)^2-4\rho^2x^2}}.$$

В случае $x \geq a$ будем иметь:

$$J_1(x, 0, z) \leq \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{\rho \sqrt{a^2-\rho^2} d\rho}{\sqrt{(\rho^2+x^2)^2-4\rho^2x^2}} = \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{\rho \sqrt{a^2-\rho^2} d\rho}{x^2-\rho^2} \leq \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2-\rho^2}} = \frac{\pi}{a}.$$

В случае же $x \leq a$, пользуясь тем, что

$$R \geq a^2 - x^2 - z^2,$$

будем иметь:

$$\begin{aligned} J_1(x, 0, z) &\leq \frac{1}{2} \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta}{a^2 [(x - \xi)^2 + \eta^2 + z^2] + (a^2 - \xi^2 - \eta^2)(a^2 - x^2 - z^2)} = \\ &= \frac{1}{2} \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\vartheta d\rho}{a^4 - 2a^2 x\rho \cos \vartheta + \rho^2(x^2 + z^2)} = \\ &= \pi \int_0^a \frac{\rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho}{\sqrt{[a^4 + \rho^2(x^2 + z^2)]^2 - 4a^4 x^2 \rho^2}} \leq \pi \int_0^a \frac{\rho \sqrt{a^2 - \rho^2} d\rho}{a^4 - x^2 \rho^2} \leq \pi \int_0^a \frac{\rho d\rho}{a^2 \sqrt{a^2 - \rho^2}} = \frac{\pi}{a}. \end{aligned} \quad (2.23)$$

Итак, мы имеем следующее неравенство:

$$J_1(x, y, z) \leq \frac{\pi}{a}. \quad (2.24)$$

Рассмотрим теперь второй интеграл. Поступая аналогично предыдущему, получим:

$$J_2(x, 0, z) \leq \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2} \sqrt{(\rho^2 + x^2 + z^2)^2 - 4\rho^2 x^2}}.$$

В случае $x \geq a$ без труда получим:

$$J_2(x, 0, z) \leq \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(a^2 - \rho^2)[(\rho + x)^2 + z^2][(\rho - x)^2 + z^2]}} \leq \frac{\pi}{a^3} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2} \sqrt{(a - x)^2 + z^2}} = \frac{\pi}{a^2 \delta}.$$

В случае $x \leq a$ воспользуемся неравенством типа (2.23):

$$\begin{aligned} J_2(x, 0, z) &\leq \pi \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(a^2 - \rho^2)[a^4 + \rho^2(x^2 + z^2) + 2a^2 x\rho][a^2 - x\rho]^2 + \rho^2 z^2}} \leq \\ &\leq \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{\sqrt{(a^2 - \rho^2)[(a^2 - x\rho)^2 + z^2 \rho^2]}}. \end{aligned}$$

Если $z \geq a - x$ и, следовательно, $\delta \leq z\sqrt{2}$, то

$$J_2(x, 0, z) \leq \frac{\pi}{a^2 z} \int_0^a \frac{d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = \frac{\pi^2}{2a^2 z} \leq \frac{\pi^2}{a^2 \delta \sqrt{2}};$$

если же $0 \leq z \leq a - x$ и, следовательно, $\delta \leq (a - x)\sqrt{2}$, то

$$J_2(x, 0, z) \leq \frac{\pi}{a^2} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(a^2 - x\rho) \sqrt{a^2 - \rho^2}} < \frac{\pi}{a^3} \int_0^a \frac{\rho d\rho}{(a - x) \sqrt{a^2 - \rho^2}} = \frac{\pi}{a^2(a - x)} \leq \frac{\pi \sqrt{2}}{a^2 \delta}.$$

Итак, мы имеем следующую оценку:

$$J_2(x, y, z) \leq \frac{\pi^2}{a^2 \delta \sqrt{2}}, \quad (2.25)$$

где

$$\delta = \sqrt{(a - \sqrt{x^2 + y^2})^2 + z^2}. \quad (2.26)$$

Как мы видели, вблизи контура C

$$R \approx 2a\delta. \quad (2.27)$$

Пользуясь этим соотношением, очевидным неравенством

$$|a^2 - x^2 - y^2 - z^2| \leq R$$

и полученными оценками, легко получим из (2.20) оценку:

$$\left| \int_s \int \left(\frac{\partial K}{\partial y} + \frac{\partial K}{\partial \eta} \right) F(\xi, \eta) d\xi d\eta \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right).$$

А тогда из формул (2.19) и (2.21) ясно, что вблизи контура C

$$\frac{\partial \Phi}{\partial y} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}} \right). \quad (2.28)$$

Составим теперь производную:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial z} = \int_s \int \frac{\partial K}{\partial z} F(\xi, \eta) d\xi d\eta.$$

Но

$$\frac{\partial K}{\partial z} = -\frac{2z}{\pi r^3} \operatorname{arc} \operatorname{tg} A + \frac{2}{\pi} \frac{A}{1+A^2} \left[-\frac{z}{r^3} + \frac{z(a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - R)}{rR(a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R)} \right],$$

где

$$A = \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{ar\sqrt{2}}.$$

Поэтому, если

$$|F(\xi, \eta)| < M,$$

то, в силу неравенства

$$\frac{A}{1+A^2} \leq \frac{1}{2},$$

при $z > 0$ будем иметь оценку:

$$\begin{aligned} \left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| &\leq 2M \int_s \int \frac{z}{r^3} d\xi d\eta + \\ &+ \frac{2\sqrt{2}azM(a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - R)}{\pi R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}} \int_s \int \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta}{2a^2 r^2 + (a^2 - \xi^2 - \eta^2)(a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R)}. \end{aligned}$$

Замечая, что

$$\int_s \int \frac{z}{r^3} d\xi d\eta \leq 2\pi,$$

и пользуясь оценкой (2.24), получим:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| \leq 4\pi M + 2\sqrt{2}M \frac{z(a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - R)}{R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}.$$

Так как при $z > 0$

$$\frac{z}{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}} = \frac{z\sqrt{R - (a^2 - x^2 - y^2 - z^2)}}{\sqrt{R^2 - (a^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2}} = \frac{\sqrt{R - a^2 + x^2 + y^2 + z^2}}{2a},$$

то

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| \leq 4\pi M + \frac{\sqrt{2}M}{aR} (a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - R) \sqrt{R - a^2 + x^2 + y^2 + z^2}.$$

Пусть теперь точка $P(x, y, z)$ находится вблизи контура C , тогда, в силу

$$R \approx 2a\delta, \quad |x^2 + y^2 + z^2 - a^2| \leq R,$$

получим:

$$\left| \frac{\partial \Phi}{\partial z} \right| = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right). \quad (2.29)$$

Возвратимся к формуле (2.16). Так как производные

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial y} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} &= -\frac{y \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{R}, \\ \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} &= \frac{z(a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - R)}{R \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}} = \\ &= \frac{1}{2aR} (a^2 + x^2 + y^2 + z^2 - R) \sqrt{R - a^2 + x^2 + y^2 + z^2} \end{aligned} \quad (2.30)$$

имеют вблизи контура C порядок $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, то из формулы (2.16) и полученных формул (2.28) и (2.29) ясно, что в точках задней полуокружности C мы имеем оценки:

$$\frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial y} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right), \quad \frac{\partial^2 \Phi}{\partial x \partial z} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right). \quad (2.31)$$

Но тогда ясно, что производные $\frac{\partial \Phi}{\partial y}$ и $\frac{\partial \Phi}{\partial z}$ окажутся ограниченными в точках задней полуокружности C .

Поведение производных от функции Φ вблизи передней половины полуокружности C легко определить, исходя из формул (2.12) и (2.13).

Первая из этих формул может быть написана в виде:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = \frac{1}{2\pi} \iint_S \frac{\partial K}{\partial x} f(\xi, \eta) d\xi d\eta - \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3}{2}\pi} \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} G(\gamma) \cos \gamma}{x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma} d\gamma. \quad (2.32)$$

Но, с одной стороны, оценка

$$\iint_S \frac{\partial K}{\partial x} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right)$$

имеет место для окрестности всего контура C ; с другой стороны, на передней полуокружности C второй интеграл формулы (2.32) остается, очевидно, ограниченным, поэтому для передней полуокружности C получаем первую из оценок:

$$\frac{\partial \Phi}{\partial x} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial y} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = O\left(\frac{1}{\sqrt{\delta}}\right), \quad (2.33)$$

последние же две из этих оценок получаются аналогичным путем из формулы (2.13).

Таким образом все условия, которым должна удовлетворять функция $\varphi(x, y, z)$, выполнены.

Выясним теперь, какой форме крыла соответствует полученное решение. По формуле (1.14) имеем:

$$c \frac{\partial \zeta}{\partial x} = - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0}. \tag{2.34}$$

Следовательно, нам надо найти значение $\frac{\partial \varphi}{\partial z}$ в плоскости круга S . Дифференцируем обе части формулы (2.13) по z и полагаем затем $z=0$. В силу самого определения функции K имеем:

$$\lim_{z \rightarrow +0} \iint_S \frac{\partial K}{\partial z} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = \lim_{z \rightarrow +0} \iint_S \frac{\partial \frac{1}{r}}{\partial z} f(\xi, \eta) d\xi d\eta = -2\pi f(x, y); \tag{2.35}$$

кроме того, в силу формулы (2.30),

$$\lim_{z \rightarrow +0} \frac{\partial}{\partial z} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} = \begin{cases} 0 & \text{при } x^2 + y^2 < a^2, \\ \frac{a\sqrt{2}}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}} & \text{при } x^2 + y^2 > a^2. \end{cases}$$

Принимая это во внимание, находим:

$$\left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)_{z=0} = -f(x, y) + g(y), \tag{2.36}$$

где

$$g(y) = \tag{2.37}$$

$$= \frac{a}{2\pi^3} \int_S \int_{+\infty}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \cos \gamma f(\xi, \eta) d\gamma dx d\xi d\eta}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2}(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)(\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)}.$$

Для функции $\zeta(x, y)$ находим выражение:

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{c} \int_0^x f(x, y) dx - \frac{g(y)}{c} x + g_1(y), \tag{2.38}$$

где $g_1(y)$ — произвольная функция от y .

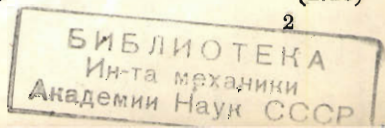
Таким образом при принятой степени приближения изгиб крыла в поперечном направлении не оказывает влияния на форму течения.

Предположим теперь, что нам задана форма крыла, т. е. задана функция $\zeta(x, y)$ и, следовательно, функция

$$c \frac{\partial \zeta}{\partial x} = M(x, y). \tag{2.39}$$

Из формул (2.34) и (2.36) ясно, что

$$f(x, y) = M(x, y) + g(y). \tag{2.40}$$



Подставляя это значение в равенство (2.37) и вводя обозначения

$$N(y) = \frac{a}{2\pi^3} \times$$

$$\times \iint_S \int_{+\infty}^{\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2} M(\xi, \eta) \cos \gamma \, d\gamma \, dx \, d\xi \, d\eta}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}(x^2+y^2+a^2-2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2+\eta^2+a^2-2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)}, \quad (2.41)$$

$$H(y, \eta) = \frac{a}{2\pi^3} \times$$

$$\times \int_{-\frac{\sqrt{a^2-\eta^2}}{2}}^{\frac{\sqrt{a^2-\eta^2}}{2}} \int_{+\infty}^{\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2} \cos \gamma \, d\gamma \, dx \, d\xi}{\sqrt{x^2+y^2-a^2}(x^2+y^2+a^2-2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2+\eta^2+a^2-2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)}$$

приходим для определения функции $g(y)$ к интегральному уравнению Фредгольма второго рода:

$$g(y) = N(y) + \int_{-a}^a H(y, \eta) g(\eta) \, d\eta. \quad (2.42)$$

При рассмотрении примеров будем задаваться функцией $f(x, y)$ и после этого по формуле (2.38) определять форму крыла. Как мы увидим, для полученных форм крыла нетрудно найти решение по обычной теории, что дает возможность оценить степень точности обычной теории.

§ 3. Вычисление сил, действующих на крыло

Напомним еще раз основную формулу, определяющую движение рассматриваемого нами типа:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ K(x, y, z, \xi, \eta) + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \times \right. \quad (3.1)$$

$$\left. \times \int_{+\infty}^{\frac{x}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2-\xi^2-\eta^2} \sqrt{a^2-x^2-y^2-z^2+R} \cos \gamma \, d\gamma \, dx}{(x^2+y^2+z^2+a^2-2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2+\eta^2+a^2-2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} \right\} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta.$$

Вычислим значение функции φ для точек полуполосы Σ . Так как в точках полуполосы Σ

$$\frac{\partial \varphi}{\partial x} = 0,$$

то это значение является функцией одного только y . Введем обозначение

$$\Phi(y) = \lim_{z \rightarrow +0} \varphi(x, y, z) \quad \text{при } |y| < a, \quad x^2 + y^2 > a^2, \quad x < 0, \quad (3.2)$$

тогда будем, очевидно, иметь:

$$\lim_{z \rightarrow -0} \varphi(x, y, z) = -\Phi(y) \quad \text{при } |y| < a, \quad x^2 + y^2 > a^2, \quad x < 0. \quad (3.3)$$

Обозначим через $\Gamma(y)$ циркуляцию по контуру $M'NM$ (фиг. 1), соединяющему две точки M и M' , из которых точка M' лежит на нижней, а точка M — на верхней стороне полуполосы Σ , причем обе точки M и M' имеют одни и те же координаты $x, y, 0$. Тогда очевидно, что

$$\Gamma(y) = \Phi(M) - \Phi(M') = 2\Phi(y). \quad (3.4)$$

Так как в плоскости Oxy вне круга S как функция K , так и функция

$$\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}$$

обращаются в нуль, ясно, что

$$\Phi(y) = \tag{3.5}$$

$$= \frac{1}{2\pi^3} \int_S \int_{\sqrt{a^2-y^2}}^{-\sqrt{a^2-y^2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} f(\xi, \eta) \cos \gamma \, d\gamma \, dx \, d\xi \, d\eta}{(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma) (\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)}.$$

Вычисление показывает, что

$$\int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2} \, dx}{x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma} = \pi \left\{ \sqrt{\frac{a(1 \pm \sin \gamma)}{|a \sin \gamma - y|}} - 1 \right\}, \tag{3.6}$$

где берется знак $+$ при $y < a \sin \gamma$ и знак $-$ при $y > a \sin \gamma$.

Поэтому можно написать следующее выражение для распределения циркуляции в вихревом слое, образующемся позади крыла:

$$\Gamma(y) = -\frac{1}{\pi^2} \int_S \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta)}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} \left\{ \sqrt{\frac{a(1 \pm \sin \gamma)}{|a \sin \gamma - y|}} - 1 \right\} \cos \gamma \, d\gamma \, d\xi \, d\eta. \tag{3.7}$$

Переходим теперь к вычислению сил, действующих на крыло. Обозначив через p_+ давление в точке крыла S с верхней стороны, а через p_- давление в той же точке с нижней стороны крыла, на основании формулы (1.8) будем иметь:

$$p_- - p_+ = -2\rho c \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \tag{3.8}$$

где берется значение $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ на верхней стороне круга.

Для подъемной силы P получаем выражение:

$$\begin{aligned} P &= \iint_S (p_- - p_+) \, dx \, dy = -2\rho c \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx \, dy = -2\rho c \int_{-a}^a \int_{-\sqrt{a^2-y^2}}^{\sqrt{a^2-y^2}} \frac{\partial \varphi}{\partial x} \, dx \, dy = \\ &= -2\rho c \int_{-a}^a [\varphi(\sqrt{a^2-y^2}, y, 0) - \varphi(-\sqrt{a^2-y^2}, y, 0)] \, dy = 2\rho c \int_{-a}^a \Phi(y) \, dy. \end{aligned}$$

Итак, мы получаем формулу:

$$P = \rho c \int_{-a}^a \Gamma(y) \, dy, \tag{3.9}$$

имеющую тот же вид, что и в обычной теории крыла конечного размаха. Но, как мы увидим, распределение циркуляции $\Gamma(y)$ по настоящей теории получается несколько иным, чем по обычной. Приведенный вывод с формой крыла, конечно, не связан.

При помощи (3.6) можно P выразить непосредственно через $f(\xi, \eta)$, тогда получим:

$$P = -\frac{2\rho ac}{\pi^2} \iint_S \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos \gamma d\gamma}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma} d\xi d\eta. \quad (3.10)$$

Выражение для индуктивного сопротивления W через циркуляцию $\Gamma(y)$ также должно иметь тот же вид, что и в обычной теории:

$$W = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \Gamma(y) \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \frac{1}{y-y'} dy dy', \quad (3.11)$$

ибо индуктивное сопротивление обязано своим происхождением тому, что за крылом образуется область возмущенного движения жидкости; кинетическая же энергия этого возмущения определяется на далеких от крыла расстояниях исключительно распределением циркуляции.

Покажем, как можно получить выражение для индуктивного сопротивления, исходя из закона количеств движения.

Пусть B есть поверхность, охватывающая крыло S , тогда закон количеств движения в применении к установившемуся обтеканию крыла приводит к выражению:

$$W = \iint_B p \cos(n, x) d\sigma + \iint_B \rho V_n V_x d\sigma, \quad (3.12)$$

где n есть направление внешней нормали к поверхности B , а V_x, V_y, V_z — составляющие скорости в относительном движении жидкости около крыла. Таким образом

$$V_x = -c + \frac{\partial \varphi}{\partial x}, \quad V_n = -c \cos(n, x) + \frac{\partial \varphi}{\partial n},$$

$$p = p_0 + \rho c \frac{\partial \varphi}{\partial x} - \frac{\rho}{2} \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right].$$

Подставляя эти значения в предыдущую формулу и замечая, что

$$\iint_B \cos(n, x) d\sigma = 0, \quad \iint_B \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma = 0,$$

получим:

$$W = -\frac{\rho}{2} \iint_B \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 \right] \cos(n, x) d\sigma + \rho \iint_B \frac{\partial \varphi}{\partial x} \frac{\partial \varphi}{\partial n} d\sigma. \quad (3.13)$$

Пусть теперь поверхность B состоит из полусферы большого радиуса с центром в точке $x = x_0 < -a$ оси Ox , охватывающей крыло, и из круга, вырезаемого этой полусферой на плоскости $x = x_0$. При увеличении радиуса полусферы до бесконечности соответствующие части интегралов, входящих в предыдущую формулу, стремятся к нулю; замечая, кроме того, что на плоскости $x = x_0$

$$\cos(n, x) = -1, \quad \frac{\partial \varphi}{\partial n} = -\frac{\partial \varphi}{\partial x},$$

легко получим, что

$$W = \frac{\rho}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \varphi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \varphi}{\partial z} \right)^2 - \left(\frac{\partial \varphi}{\partial x} \right)^2 \right] dy dz, \quad (3.14)$$

где интегрирование распространяется по всей плоскости $x = x_0$. В частности, при $x_0 \rightarrow -\infty$ получаем представление:

$$W = \frac{\rho}{2} \iint \left[\left(\frac{\partial \Phi}{\partial y} \right)^2 + \left(\frac{\partial \Phi}{\partial z} \right)^2 \right] dy dz, \quad (3.15)$$

где $\Phi(y, z)$ означает потенциал скорости того плоскопараллельного течения, которое устанавливается в поперечных плоскостях далеко позади крыла.

Производя обычное преобразование по формуле Грина, найдем:

$$W = -\rho \int_{-a}^a \Phi(y) \frac{\partial \Phi}{\partial z} dy, \quad (3.16)$$

причем интеграл берется по верхней стороне разреза $(-a, a)$ в плоскости yz .

Замечая еще, что

$$\Gamma(y) = 2\Phi(y), \quad \frac{\partial \Phi}{\partial z} = \frac{1}{2\pi} \int_{-a}^a \frac{d\Gamma(y')}{y' - y}, \quad (3.17)$$

придем к формуле (3.11).

Чтобы найти центр давления, определим еще главные моменты сил давления около осей Ox и Oy .

Для момента сил давления около оси Ox имеем очевидную формулу:

$$M_x = \iint_S (p_- - p_+) y dx dy = -2\rho c \iint_S \frac{\partial \varphi}{\partial x} y dx dy = 2\rho c \int_{-a}^a \Phi(y) y dy,$$

откуда

$$M_x = \rho c \int_{-a}^a y \Gamma(y) dy. \quad (3.18)$$

Выражая M_x через $f(x, y)$, получим:

$$M_x = -\frac{4}{3} \frac{\rho c a^2}{\pi^2} \iint_S \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma}. \quad (3.19)$$

Для момента сил давления около оси Oy точно так же получим:

$$M_y = -\iint_S (p_- - p_+) x dx dy = 2\rho c \iint_S x \frac{\partial \varphi}{\partial x} dx dy. \quad (3.20)$$

Подставив сюда значение $\frac{\partial \varphi}{\partial x}$ и произведя интегрирование, найдем:

$$M_y = -\frac{4\rho c}{\pi} \iint_S \left\{ 1 - \frac{a^2}{3\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^2 \gamma d\gamma}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma} \right\} \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta. \quad (3.21)$$

Для координат центра давления получаем значения:

$$x_c = -\frac{M_y}{P}, \quad y_c = \frac{M_x}{P}. \quad (3.22)$$

§ 4. Примеры

Прежде чем переходить к примерам, приведем еще раз полученные нами формулы.

Потенциал скорости определяется при $z > 0$ формулой:

$$\varphi(x, y, z) = \frac{1}{2\pi} \iint_S \left\{ K(x, y, z, \xi, \eta) + \frac{1}{\pi^2 \sqrt{2}} \times \right. \quad (4.1)$$

$$\times \int_{+\infty}^{\frac{3\pi}{2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R} \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \cos \gamma \, d\gamma \, dx}{(x^2 + y^2 + z^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)(\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} \left. \right\} f(\xi, \eta) \, d\xi \, d\eta,$$

где

$$K(x, y, z, \xi, \eta) = \frac{2}{\pi r} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2 - z^2 + R}}{\sqrt{2} ar}, \quad (4.2)$$

$$R = \sqrt{(a^2 - x^2 - y^2 - z^2)^2 + 4a^2 z^2}, \quad r = \sqrt{(x - \xi)^2 + (y - \eta)^2 + z^2}.$$

Для распределения циркуляции в вихревой полосе, образующейся позади крыла, имеем формулу:

$$\Gamma(y) = -\frac{1}{\pi^3} \times \quad (4.3)$$

$$\times \iint_S \int_{-\sqrt{a^2 - y^2}}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} \sqrt{a^2 - x^2 - y^2} f(\xi, \eta) \cos \gamma \, d\gamma \, dx \, d\xi \, d\eta}{(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)(\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} =$$

$$= -\frac{1}{\pi^2} \iint_S \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) \cos \gamma}{(\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)} \left[\sqrt{\frac{a(1 \pm \sin \gamma)}{|a \sin \gamma - y|}} - 1 \right] d\gamma \, d\xi \, d\eta,$$

где берется знак $+$ при $y < a \sin \gamma$ и знак $-$ при $y > a \sin \gamma$.

Для подъемной силы имеем выражение:

$$P = \rho c \int_{-a}^a \Gamma(y) \, dy = -\frac{2\rho ca}{\pi^2} \iint_S \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) \cos \gamma \, d\gamma \, d\xi \, d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma}; \quad (4.4)$$

для индуктивного сопротивления имеем обычное выражение:

$$W = \frac{\rho}{4\pi} \int_{-a}^a \int_{-a}^a \Gamma(y) \frac{d\Gamma(y')}{dy'} \frac{1}{y - y'} \, dy \, dy'. \quad (4.5)$$

Координаты центра давления определяются формулами:

$$x_c = -\frac{M_y}{P}, \quad y_c = \frac{M_x}{P}, \quad (4.6)$$

где

$$M_x = \rho c \int_{-a}^a y \Gamma(y) dy = -\frac{4}{3} \frac{\rho c a^2}{\pi^2} \iint_S \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) \sin \gamma \cos \gamma d\gamma d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma}, \quad (4.7)$$

$$M_y = -\frac{4\rho c}{\pi} \iint_S \left\{ 1 - \frac{a^2}{8\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^2 \gamma d\gamma}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma} \right\} \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) d\xi d\eta \quad (4.8)$$

Если, положив $y = -a \cos \theta$, представить $\Gamma(y)$ в виде тригонометрического ряда:

$$\Gamma(y) = A_1 \sin \theta + A_2 \sin 2\theta + \dots \quad (0 < \theta < \pi), \quad (4.9)$$

то P , W и M_x выражаются непосредственно через коэффициенты этого ряда формулами:

$$P = \frac{\pi \rho c a}{2} A_1, \quad W = \frac{1}{8} \pi \rho \sum_{n=1}^{\infty} n A_n^2, \quad M_x = -\frac{1}{4} \pi \rho c a^2 A_2. \quad (4.10)$$

Наконец, форма крыла определяется уравнением:

$$\zeta(x, y) = \frac{1}{c} \int_0^x f(x, y) dx - \frac{g(y)}{c} x + g_1(y), \quad (4.11)$$

где

$$g(y) = \frac{a}{2\pi^3} \times \quad (4.12)$$

$$\times \iint_S \int_{+\infty}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - y^2} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} f(\xi, \eta) \cos \gamma d\gamma d\xi d\eta}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)} (\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma)}}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2(x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)}} d\gamma d\xi d\eta$$

Переходим теперь к примерам.

1° Примем

$$f(x, y) = c\alpha,$$

где α — малая постоянная.

Переходя к полярным координатам, легко вычислить интеграл:

$$\begin{aligned} & \iint_S \frac{\sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma} = \\ & = \int_0^a \int_0^{2\pi} \frac{\sqrt{a^2 - \rho^2} \rho d\vartheta d\rho}{a^2 + \rho^2 - 2a\rho \cos(\vartheta - \gamma)} = \int_0^a \frac{2\pi\rho d\rho}{\sqrt{a^2 - \rho^2}} = 2\pi a. \end{aligned} \quad (4.13)$$

Подставляя это значение в (4.3), получим:

$$\Gamma(y) = -\frac{2ac\alpha}{\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos \gamma \left[\sqrt{\frac{a(1 \pm \sin \gamma)}{|a \sin \gamma - y|}} - 1 \right] d\gamma.$$

Беря интеграл, находим:

$$\Gamma(y) = \frac{cx}{\pi} \left\{ -4a + 2\sqrt{2a(a-y)} + 2\sqrt{2a(a+y)} - \right. \\ \left. - (a+y) \log \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{a-y}}{\sqrt{2a} + \sqrt{a-y}} - (a-y) \log \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{a+y}}{\sqrt{2a} + \sqrt{a+y}} \right\}. \quad (4.14)$$

Полагая $y = -a \cos \theta$ и разлагая $\Gamma(-a \cos \theta)$ в тригонометрический ряд по синусам в промежутке $0 < \theta < \pi$, после простых вычислений найдем, что

$$\Gamma(-a \cos \theta) = \frac{acx}{\pi} \left\{ -4 + 4 \cos \frac{\theta}{2} + 4 \sin \frac{\theta}{2} - \right. \\ \left. - (1 - \cos \theta) \log \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \frac{\theta}{2}} - (1 + \cos \theta) \log \frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \right\} = \\ = A_1 \sin \theta + A_3 \sin 3\theta + A_5 \sin 5\theta + \dots \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad (4.15)$$

где

$$A_1 = \frac{16acx}{\pi^2}, \quad A_{2k+1} = -\frac{4acx}{\pi^2 k(k+1)(2k+1)} \left(\frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \dots + \frac{1}{4k+1} \right) \\ (k=1, 2, \dots), \quad (4.16)$$

так что

$$A_3 = -\frac{16acx}{45\pi^2}, \quad A_5 = -\frac{496acx}{4725\pi^2}, \dots$$

Как видим, распределение циркуляции получилось очень близким к эллиптическому.

Применяя формулы (4.10), легко найдем выражения для подъемной силы и индуктивного сопротивления:

$$P = \frac{\pi}{2} \rho c a A_1 = \frac{8}{\pi} \rho a^2 c^2 \alpha \approx 2.5465 \rho a^2 c^2 \alpha, \quad (4.17)$$

$$W = \frac{1}{8} \pi \rho (A_1^2 + 3A_3^2 + \dots) \approx 1.034 \rho a^2 c^2 \alpha^2.$$

Чтобы определить положение центра давления, надо вычислить M_y по формуле (4.8).

Пользуясь формулой (4.13), без труда получим, что

$$M_y = -\frac{4}{3} \rho c^2 a^3 \alpha, \quad x_c = -\frac{M_y}{P} = \frac{\pi}{6} a. \quad (4.18)$$

Таким образом расстояние от центра давления, который, очевидно, лежит на оси Ox , до передней кромки крыла составляет приблизительно 0.238 диаметра крыла.

Чтобы определить форму крыла, соответствующего принятой функции, надо составить функцию $g(y)$ по формуле (4.12). Принимая во внимание (4.13), получим:

$$g(y) = \frac{a^2 cx}{\pi^2} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{a^2-y^2}}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{3\pi} \frac{\cos \gamma d\gamma dx}{\sqrt{x^2+y^2-a^2} (x^2+y^2+a^2-2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)}. \quad (4.19)$$

Вычисление показывает, что при $x > \sqrt{a^2 - y^2}$

$$\int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos \gamma d\gamma}{x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma} = -\frac{\pi x}{2a(x^2 + y^2)} +$$

$$+ \frac{y}{2a(x^2 + y^2)} \log \frac{x^2 + (y-a)^2}{x^2 + (y+a)^2} + \frac{x(a^2 + x^2 + y^2)}{a(x^2 + y^2)(x^2 + y^2 - a^2)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{x^2 + y^2 - a^2}{2ax}. \quad (4.20)$$

Положив

$$y = -a \cos \theta, \quad \sqrt{a^2 - y^2} = a \sin \theta, \quad (4.21)$$

$$H_0(\theta) = \frac{\pi^2}{\alpha c} \sin \theta g(-a \cos \theta)$$

при $0 < \theta < \pi$, будем иметь:

$$H_0(\theta) = \int_{+\infty}^{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{\sqrt{t^2 - \sin^2 \theta}} \left\{ -\frac{\pi t}{2(t^2 + \cos^2 \theta)} - \frac{\cos \theta}{2(t^2 + \cos^2 \theta)} \log \frac{t^2 + 4 \cos^4 \frac{\theta}{2}}{t^2 + 4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} + \right.$$

$$\left. + \frac{t(t^2 + 1 + \cos^2 \theta)}{(t^2 + \cos^2 \theta)(t^2 - \sin^2 \theta)} \operatorname{arc} \operatorname{tg} \frac{t^2 - \sin^2 \theta}{2t} \right\} dt.$$

Производя вычисление этого интеграла, найдем:

$$H_0(\theta) = \left(\frac{\pi^2}{2} - 2 \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} y}{\sqrt{1-y^2}} dy \right) \sin \theta +$$

$$+ \frac{1}{8} \sin \theta \left(\log \frac{1 + \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 + \frac{1}{8} \sin \theta \left(\log \frac{1 + \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \right)^2 +$$

$$+ \cos \frac{\theta}{2} \log \frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} + \sin \frac{\theta}{2} \log \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \frac{\theta}{2}}. \quad (4.22)$$

Таким образом форма крыла определяется уравнением:

$$\zeta(x, y) = \alpha x \left[1 - \frac{g(y)}{\alpha c} \right] = \alpha x \left\{ \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\operatorname{arc} \operatorname{tg} y}{\sqrt{1-y^2}} dy - \right.$$

$$- \frac{1}{8\pi^2} \left(\log \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{a+y}}{\sqrt{2a} - \sqrt{a+y}} \right)^2 - \frac{1}{8\pi^2} \left(\log \frac{\sqrt{2a} + \sqrt{a-y}}{\sqrt{2a} - \sqrt{a-y}} \right)^2 -$$

$$\left. - \frac{\sqrt{2a}}{2\pi^2 \sqrt{a+y}} \log \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{a+y}}{\sqrt{2a} + \sqrt{a+y}} - \frac{\sqrt{2a}}{2\pi^2 \sqrt{a-y}} \log \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{a-y}}{\sqrt{2a} + \sqrt{a-y}} \right\}. \quad (4.23)$$

Это крыло мало отличается от плоского крыла, наклоненного к плоскости Oxy под малым углом α , и может быть получено из такого плоского

крыла путем закрутки. Приведем значения функции $\zeta(x, y)$ для среднего значения $y=0$ и для значений $y = \pm \frac{a}{2}$:

$$\zeta(x, 0) = \alpha x \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\arctg y}{\sqrt{1-y^2}} dy - \frac{1}{\pi^2} \log^2(\sqrt{2}+1) + \right. \\ \left. + \frac{2\sqrt{2}}{\pi^2} \log(\sqrt{2}+1) \right] \approx 0.8452 \alpha x,$$

$$\zeta\left(x, \pm \frac{a}{2}\right) = \alpha x \left[\frac{1}{2} + \frac{2}{\pi^2} \int_0^1 \frac{\arctg y}{\sqrt{1-y^2}} dy - \frac{1}{2\pi^2} \log^2(2+\sqrt{3}) - \frac{1}{8\pi^2} \log^2 3 + \right. \\ \left. + \frac{2}{\pi^2 \sqrt{3}} \log(2+\sqrt{3}) + \frac{1}{\pi^2} \log 3 \right] \approx 0.8335 \alpha x.$$

Интересно посмотреть, какие результаты для полученного крыла дает обычная теория. Обозначим циркуляцию, получающуюся по этой теории, через $\Gamma_0(y)$; если разложение этой циркуляции в тригонометрический ряд есть

$$\Gamma_0(-a \cos \theta) = B_1 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta + \dots \quad (0 < \theta < \pi), \quad (4.24)$$

то для определения коэффициентов B_n обычная теория дает уравнение, которое в рассматриваемом случае приводится к виду:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta = 2\pi c a \sin \theta \left\{ \alpha - \frac{g(-a \cos \theta)}{c} - \frac{1}{4ca} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right\}. \quad (4.25)$$

Воспользовавшись (4.21), получим:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(1 + \frac{\pi n}{2}\right) \sin n\theta = 2\pi c a \alpha \sin \theta - \frac{2ac}{\pi} H_0(\theta). \quad (4.26)$$

Для определения коэффициентов B_n достаточно, таким образом, разложить функцию $H_0(\theta)$ в тригонометрический ряд. Несмотря на сложный вид функции $H_0(\theta)$, это удастся сделать, а именно оказывается, что в промежутке $0 \leq \theta \leq \pi$

$$H_0(\theta) = \sin \theta \left(\frac{9\pi^2}{16} - 4 - 2 \int_0^1 \frac{\arctg y}{\sqrt{1-y^2}} dy \right) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{k(k+1)} \left[-1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4k+1} - \frac{2(2k+1)^2+1}{(4k+1)(4k+3)} \right], \quad (4.27)$$

т. е.

$$H_0(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} \beta_{2k+1} \sin(2k+1)\theta,$$

где

$$\beta_1 = -0.1389, \beta_3 = -0.5048, \beta_5 = -0.1213, \beta_7 = -0.0460, \beta_9 = -0.0212, \dots$$

Уравнение (4.26) показывает, что

$$B_1 = \frac{4\alpha c a (\pi^2 - \beta_1)}{\pi(\pi + 2)}, \quad B_{2k} = 0, \quad B_{2k+1} = -\frac{4\alpha c a \beta_{2k+1}}{2 + \pi(2k+1)} \quad (k = 1, 2, \dots). \quad (4.28)$$

Численные значения первых коэффициентов будут:

$$B_1 = 2.4784 \alpha c a, \quad B_3 = 0.0562 \alpha c a, \quad B_5 = 0.0087 \alpha c a, \\ B_7 = 0.0024 \alpha c a, \quad B_9 = 0.0009 \alpha c a, \dots$$

Для подъемной силы получим значение:

$$P_0 = \frac{1}{2} \pi \rho c a B_1 = 3.8932 \rho c^2 a^2 \alpha, \quad (4.29)$$

на 53% превышающее точное значение.

Для индуктивного сопротивления получим

$$W_0 \approx 2.416 \rho a^2 c^2 \alpha^2 \quad (4.30)$$

с ошибкой в 134%.

2°. Возьмем теперь $f(x, y) = -2cx$, считая α малой величиной.

Опять начинаем с вычисления циркуляции $\Gamma(y)$. Прежде всего находим значение интеграла:

$$\iint_S \frac{\xi \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma} = \frac{4}{3} \pi a^2 \cos \gamma. \quad (4.31)$$

Формула (4.3) дает нам:

$$\Gamma(y) = \frac{8ca^2 \alpha}{3\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \cos^2 \gamma \left[\sqrt{\frac{a(1 \pm \sin \gamma)}{|a \sin \gamma - y|}} - 1 \right] d\gamma,$$

вычисление этого интеграла приводит к очень простому выражению:

$$\Gamma(y) = 2cx(a^2 - y^2). \quad (4.32)$$

Таким образом в рассматриваемом случае получилось параболическое распределение циркуляции. Поэтому вычисление сил производится очень легко:

$$P = \rho c \int_{-a}^a \Gamma(y) dy = \frac{8}{3} \alpha \rho c^2 a^3 \approx 2.667 \alpha \rho c^2 a^3, \quad (4.33)$$

$$W = \frac{4}{\pi} \rho c^2 \alpha^2 a^4 \approx 1.2732 \rho c^2 \alpha^2 a^4.$$

Воспользовавшись при вычислении M_y по формуле (4.8) соотношением (4.31), легко найдем, что

$$M_y = \frac{128}{27\pi} \rho c^2 a^4 \alpha \approx 1.509 \rho c^2 a^4 \alpha, \quad x_c = -\frac{M_y}{P} = -\frac{16}{9\pi} a. \quad (4.34)$$

Чтобы определить форму крыла, надо вычислить функцию $g(y)$; по формуле (4.12) находим:

$$g(y) = -\frac{4\alpha c a^3}{3\pi^2} \int_{+\infty}^{\sqrt{a^2 - y^2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\cos^2 \gamma d\gamma dx}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} (x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)}.$$

Положив

$$H_1(\theta) = -\frac{3\pi^2}{4\alpha c a} \sin \theta g(-a \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (4.35)$$

и производя интегрирование по γ , будем иметь:

$$H_1(\theta) = \int_{\infty}^{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{(t^2 + \cos^2 \theta)^2 \sqrt{t^2 - \sin^2 \theta}} \left\{ t(t^2 + \cos^2 \theta) + \frac{\pi}{4} (\cos^2 \theta - t^2)(t^2 + 1 + \cos^2 \theta) - \right. \\ \left. - \frac{1}{2} t \cos \theta (t^2 + 1 + \cos^2 \theta) \log \frac{t^2 + 4 \cos^4 \frac{\theta}{2}}{t^2 + 4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} + \right. \\ \left. + \frac{2(t^2 + \cos^2 \theta)^2 + (t^2 - \cos^2 \theta)[1 + (t^2 + \cos^2 \theta)^2]}{2(t^2 - \sin^2 \theta)} \operatorname{arctg} \frac{t^2 - \sin^2 \theta}{2t} \right\} dt.$$

Произведя интегрирование, получим:

$$H_1(\theta) = \frac{3\pi}{2} \left\{ \sin \theta \left(1 - \sin \frac{\theta}{2} - \cos \frac{\theta}{2} \right) + \frac{1}{12} \log \frac{(1 + \cos \frac{\theta}{2})(1 + \sin \frac{\theta}{2})}{(1 - \cos \frac{\theta}{2})(1 - \sin \frac{\theta}{2})} + \right. \\ \left. + \sin \theta \cos \theta \left[\log \operatorname{tg} \frac{\theta}{2} + \frac{1}{4} \log \frac{(1 + \cos \frac{\theta}{2})(1 - \sin \frac{\theta}{2})}{(1 - \cos \frac{\theta}{2})(1 + \sin \frac{\theta}{2})} \right] \right\}. \quad (4.36)$$

Примем в формуле (4.11)

$$g_1(y) = \alpha(a^2 - y^2),$$

тогда для функции $\zeta(x, y)$, определяющей форму крыла, получим выражение:

$$\zeta(x, y) = \alpha(a^2 - x^2 - y^2) + \\ + \frac{2\alpha ax}{\pi} \left\{ 1 - \sqrt{\frac{a+y}{2a}} - \sqrt{\frac{a-y}{2a}} + \frac{1}{12} \log \frac{(\sqrt{2a} + \sqrt{a-y})(\sqrt{2a} + \sqrt{a+y})}{(\sqrt{2a} - \sqrt{a-y})(\sqrt{2a} - \sqrt{a+y})} - \right. \\ \left. - \frac{y}{a} \log \sqrt{\frac{a+y}{a-y}} - \frac{y}{4a} \log \frac{(\sqrt{2a} + \sqrt{a-y})(\sqrt{2a} - \sqrt{a+y})}{(\sqrt{2a} - \sqrt{a-y})(\sqrt{2a} + \sqrt{a+y})} \right\}. \quad (4.37)$$

Таким образом это крыло получается закруткой из крыла:

$$\zeta(x, y) = \alpha(a^2 - x^2 - y^2),$$

которое при малом α мало отличается от сегмента сферы.

В частности, при $y=0$ получаем:

$$\zeta(x, 0) = \alpha(a^2 - x^2) + \frac{2\alpha ax}{\pi} \left[1 - \sqrt{2} + \frac{1}{3} \log(\sqrt{2} + 1) \right] \approx \alpha(a^2 - x^2 - 0.0767ax).$$

Чтобы применить к полученному крылу обычную теорию, разложим $H_1(\theta)$ в тригонометрический ряд:

$$H_1(\theta) = \left(\pi - \frac{17}{3} - \int_0^{\frac{\pi}{2}} \log \operatorname{tg} \frac{x}{2} dx \right) \sin \theta + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{4k(k+1)(2k-1)(2k+3)} \left[-12\pi k(k+1) + \right. \\ \left. + 2(16k^2 + 16k - 3) \left(1 - \frac{1}{3} + \frac{1}{5} - \dots + \frac{1}{4k+1} \right) + 6(2k+1) \right] = \\ = \sum_{k=0}^{\infty} \gamma_{2k+1} \sin(2k+1)\theta, \quad (4.38)$$

причем

$$\gamma_1 = -0.6931, \quad \gamma_3 = -0.1783, \quad \gamma_5 = -0.0812, \quad \gamma_7 = -0.0463, \quad \gamma_9 = -0.0300, \dots$$

Для рассматриваемого случая обычная теория дает для определения циркуляции

$$\Gamma_0(-a \cos \theta) = B_1 \sin \theta + B_2 \sin 2\theta + \dots \quad (0 \leq \theta \leq \pi)$$

уравнение

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta = 2\pi ca \sin \theta \left\{ \alpha a \sin \theta - \frac{g(-a \cos \theta)}{c} - \frac{1}{4ca} \sum_{n=1}^{\infty} n B_n \frac{\sin n\theta}{\sin \theta} \right\}. \quad (4.39)$$

Воспользовавшись (4.35) и тем, что

$$\sin^2 \theta = -\frac{8}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{\sin(2k+1)\theta}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \quad (4.40)$$

получим из (4.39) уравнение:

$$\sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(1 + \frac{\pi n}{2}\right) = \sum_{k=0}^{\infty} \left[\frac{8\alpha a^2 c}{3\pi} \gamma_{2k+1} - \frac{16\alpha a^2 c}{(2k-1)(2k+1)(2k+3)} \right] \sin(2k+1)\theta, \quad (4.41)$$

откуда без труда найдем B_n , в частности,

$$B_{2k} = 0, \quad B_1 = 1.8457 \alpha ca^2, \quad B_3 = -0.2132 \alpha ca^2, \\ B_5 = -0.0250 \alpha ca^2, \quad B_7 = -0.0075 \alpha ca^2, \quad B_9 = -0.0032 \alpha ca^2, \dots$$

Для подъемной силы получаем значение

$$P = \frac{1}{2} \pi \rho ca B_1 = 2.899 \rho c^2 a^3 \alpha, \quad (4.42)$$

на 8.7% превышающее точное значение.

Индуктивное сопротивление получим равным:

$$W = 1.3927 \rho \alpha^2 c^2 a^4, \quad (4.43)$$

с превышением над точным значением на 9.4%.

3°. Чтобы дать пример несимметричного крыла, примем

$$f(x, y) = \alpha cy.$$

В этом случае надо прежде всего вычислить интеграл:

$$\int_S \int \frac{\eta \sqrt{a^2 - \xi^2 - \eta^2} d\xi d\eta}{\xi^2 + \eta^2 + a^2 - 2a\xi \cos \gamma - 2a\eta \sin \gamma} = \frac{4}{3} \pi a^2 \sin \gamma. \quad (4.44)$$

В силу (4.3) находим:

$$\Gamma(y) = -\frac{4\alpha ca^2}{3\pi} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \sin \gamma \cos \gamma \left[\sqrt{\frac{a(1 \pm \sin \gamma)}{|a \sin \gamma - y|}} - 1 \right] d\gamma;$$

после вычисления интеграла получим:

$$\Gamma(y) = \frac{\alpha c}{\pi} \left[(a+y) \sqrt{2a(a-y)} - (a-y) \sqrt{2a(a+y)} + \right. \\ \left. + \frac{1}{6} (a+y)(a-3y) \log \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{a-y}}{\sqrt{2a} + \sqrt{a-y}} - \frac{1}{6} (a-y)(a+3y) \log \frac{\sqrt{2a} - \sqrt{a+y}}{\sqrt{2a} + \sqrt{a+y}} \right]. \quad (4.45)$$

Полагая $y = -a \cos \theta$ и производя разложение в тригонометрический ряд, находим:

$$\begin{aligned} \Gamma(-a \cos \theta) &= \frac{\alpha c a^2}{\pi} \left[2(1 - \cos \theta) \cos \frac{\theta}{2} - 2(1 + \cos \theta) \sin \frac{\theta}{2} + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{6}(1 - \cos \theta)(1 + 3 \cos \theta) \log \frac{1 - \cos \frac{\theta}{2}}{1 + \cos \frac{\theta}{2}} - \right. \\ &\quad \left. - \frac{1}{6}(1 + \cos \theta)(1 - 3 \cos \theta) \log \frac{1 - \sin \frac{\theta}{2}}{1 + \sin \frac{\theta}{2}} \right] = \\ &= A_2 \sin 2\theta + A_4 \sin 4\theta + \dots \quad (0 \leq \theta \leq \pi), \end{aligned} \quad (4.46)$$

где

$$A_2 = -\frac{128 \alpha c a^2}{27 \pi^2}, \quad (4.47)$$

$$A_{2k} = \frac{4 \alpha c a^2}{\pi^2} \left[\frac{8k^2 + 1}{6k(k^2 - 1)(4k^2 - 1)} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4k - 1} \right) - \frac{2k}{(k^2 - 1)(4k^2 - 1)} \right] \\ (k = 2, 3, \dots),$$

так что

$$A_2 = -0.4803 \alpha c a^2, \quad A_4 = 0.00549 \alpha c a^2, \quad A_6 = 0.00234 \alpha c a^2, \quad A_8 = 0.00123 \alpha c a^2, \dots$$

Подъемная сила, очевидно, отсутствует, а для индуктивного сопротивления находим значение:

$$W = 0.1813 \rho \alpha^2 c^2 a^4. \quad (4.48)$$

Для момента сил относительно оси Ox получаем:

$$M_x = -\frac{1}{4} \pi \rho c a^2 A_2 = 0.3772 \rho \alpha c^2 a^4. \quad (4.49)$$

Момент сил относительно оси Oy вычисляется при помощи формулы (4.8), причем надо воспользоваться результатом (4.44), и оказывается

$$M_y = 0. \quad (4.50)$$

Вычисляем теперь функцию:

$$g(y) = \frac{2a^3 \alpha c}{3\pi^2} \int_{-\infty}^{\frac{\sqrt{a^2 - y^2}}{2}} \int_{\frac{\pi}{2}}^{\frac{3\pi}{2}} \frac{\sin \gamma \cos \gamma d\gamma dx}{\sqrt{x^2 + y^2 - a^2} (x^2 + y^2 + a^2 - 2ax \cos \gamma - 2ay \sin \gamma)}.$$

Положив

$$H_2(\theta) = \frac{3\pi^2}{2\alpha \alpha c} \sin \theta g(-a \cos \theta) \quad (0 \leq \theta \leq \pi) \quad (4.51)$$

и производя интегрирование по γ , будем иметь:

$$\begin{aligned} H_2(\theta) &= \int_{-\infty}^{\sin \theta} \frac{\sin \theta}{(t^2 + \cos^2 \theta)^2 \sqrt{t^2 - \sin^2 \theta}} \left\{ -\cos \theta (t^2 + \cos^2 \theta) + \frac{\pi}{2} t \cos \theta (t^2 + 1 + \cos^2 \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{4} (t^2 + 1 + \cos^2 \theta) (\cos^2 \theta - t^2) \log \frac{t^2 + 4 \cos^4 \frac{\theta}{2}}{t^2 + 4 \sin^4 \frac{\theta}{2}} \right\} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
 & - \left. \frac{t \cos \theta [1 + (t^2 + \cos^2 \theta)^2]}{t^2 - \sin^2 \theta} \operatorname{arctg} \frac{t^2 - \sin^2 \theta}{2t} \right\} dt = \\
 & = \sin \theta \cos \theta \left\{ \frac{3}{2} \log^2(\sqrt{2} + 1) + 3 \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} y}{\sqrt{1-y^2}} dy - \frac{3\pi^2}{4} \right\} + \\
 & + \frac{\sin \theta (1 - 3 \cos \theta)}{16} \left(\log \frac{1 + \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} \right)^2 - \frac{\sin \theta (1 + 3 \cos \theta)}{16} \left(\log \frac{1 + \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \sin \frac{\theta}{2}} \right)^2 + \\
 & + \frac{1 + 3 \cos \theta}{2} \sin \frac{\theta}{2} \log \frac{1 + \cos \frac{\theta}{2}}{1 - \cos \frac{\theta}{2}} - \frac{1 - 3 \cos \theta}{2} \cos \frac{\theta}{2} \log \frac{1 + \sin \frac{\theta}{2}}{1 - \sin \frac{\theta}{2}}. \quad (4.52)
 \end{aligned}$$

Разложение в тригонометрический ряд дает:

$$\begin{aligned}
 H_2(\theta) & = \sin 2\theta \left[\frac{3}{4} \log^2(\sqrt{2} + 1) + \frac{3}{2} \int_0^1 \frac{\operatorname{arctg} y}{\sqrt{1-y^2}} dy - \frac{9\pi^2}{16} + \frac{2159}{630} \right] - \\
 & - \sum_{k=2}^{\infty} \frac{2(8k^2 + 1)}{(4k^2 - 1)(4k^2 - 4)} \left(1 + \frac{1}{3} + \dots + \frac{1}{4k-1} - \frac{12k^2}{8k^2 + 1} \right) \sin 2k\theta = \\
 & = \sum_{k=1}^{\infty} \delta_{2k} \sin 2k\theta, \quad (4.53)
 \end{aligned}$$

где $\delta_2 = -0.27412$, $\delta_4 = -0.08127$, $\delta_6 = -0.05198$, $\delta_8 = -0.03641, \dots$

Обычная теория для определения циркуляции

$$\Gamma_0(-a \cos \theta) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin n\theta$$

дает уравнение

$$\begin{aligned}
 \sum_{n=1}^{\infty} B_n \left(1 + \frac{\pi n}{2} \right) \sin n\theta & = 2\pi c a \sin \theta \left\{ -a x \cos \theta - \frac{g(-a \cos \theta)}{c} \right\} = \\
 & = -\pi c a^2 \alpha \sin 2\theta - \frac{4x c a^2}{3\pi} H_2(\theta); \quad (4.54)
 \end{aligned}$$

откуда без труда находим:

$$B_{2k+1} = 0 \quad (k = 0, 1, 2, \dots),$$

$$B_2 = -0.7304 x c a^2, \quad B_4 = 0.0047 x c a^2, \quad B_6 = 0.0021 x c a^2, \quad B_8 = 0.0011 x c a^2, \dots$$

Подъемная сила оказывается равной нулю, а для индуктивного сопротивления и момента сил относительно оси Ox находим значения:

$$W = 0.4191 \rho \alpha^2 c^2 a^4, \quad M_x = 0.5737 \rho \alpha^2 c^2 a^4. \quad (4.55)$$

Первое дает ошибку в $131^0/0$, второе в $52^0/0$.

Путем комбинации полученных решений можно было бы получить дальнейшие примеры, на чем мы не останавливаемся. Из приведенных примеров достаточно ясно, что для случая кругового крыла получаются значительные расхождения между точной теорией и обычной.

Поступила в редакцию 15 IX 1939.

Институт механики
Акад. Наук Союза ССР.

ЛИТЕРАТУРА

1. Kinner W. Die Kreisförmige Tragfläche auf potential theoretischer Grundlage. „Ingenieur Archiv“. 1937. Bd. VIII. [P. 47—80].
2. Sommerfeld A. Über verzweigte Potentiale im Raum. „Proc. Lond. Math. Soc.“ 1897. [P. 395—429].

THEORY OF A WING OF FINITE SPAN WITH CIRCULAR FORM IN PLANE

N. E. KOCHIN

(Summary)

In the work a slightly curved wing whose projection on the plane Oxy is a circle S with radius a is treated. The motion is assumed to be parallel to the axis Ox and to possess a constant velocity c .

To construct the potential of velocity, the wing is replaced by a system of vortices distributed on the circle S . From the back edge of the wing a system of free vortices located in the plane xOy breaks away parallel to the axis Ox . The velocity of the particles of a fluid is assumed to be finite on the rear half-circumference BCD of circle S . On the front half-circumference BAD the velocity is assumed to approach infinity as rapidly as the value $\frac{1}{\sqrt{\delta}}$, where δ is the distance between the point under consideration and the circumference.

The expression (2.13) for the potential of velocity satisfies all the conditions in question and depends upon an arbitrary function $f(x, y)$. The form of the wing is determined by formula (2.38), where the function $g(y)$ is given by formula (2.37) and $g_1(y)$ denotes an arbitrary function.

The lifting force, the inductive resistance and the moments of forces relative to axis Ox can be calculated by the usual formulae (3.9), (3.11), (3.18), but the distribution of the circulation which is determined by formula (3.7) is different from that obtained by the usual theory.

Formula (3.21) enables us to compute the main moment of pressure forces relative to axis Oy , and then the centre of pressure may be determined by means of formulae (3.22).

In the last paragraph all the formulae obtained in the work are summarized and three cases are considered for function $f(x, y)$ as

$$f(x, y) = cx, \quad f(x, y) = -2cxy, \quad f(x, y) = cxy.$$

The calculations show that the usual theory gives enlarged values for the forces and the errors may attain considerable values (50—100%).