

Т. IV, в. 1, 1940

НОМОГРАММА ДЛЯ ВЫЧИСЛЕНИЯ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО  
И КРУГОВОГО ТАНГЕНСОВ И КОТАНГЕНСОВ ОТ КОМПЛЕКСНОГО  
АРГУМЕНТА

И. А. ВИЛЬНЕР

(Москва)

В этой заметке приводится номограмма<sup>1</sup> (стр. 151) для функций:

$$\operatorname{th}(a + bi) = re^{\beta i}, \quad \operatorname{cth}(a + bi) = re^{\beta i}, \quad (1)$$

$$\operatorname{tg}(z + \beta i) = re^{\beta i}, \quad \operatorname{ctg}(z + \beta i) = re^{\beta i}. \quad (2)$$

Как будет видно из дальнейшего, построенная номограмма, позволяя находить значения любой пары из четырех аргументов по двум другим в пределах, задание которых заранее определяется практическими требованиями, в то же время позволяет обозреть качественную сторону изменения функции при любых значениях аргументов, так как охватывает всю область существования функций и целиком помещается в ограниченной части плоскости<sup>2</sup>.

1°. Номограмма для гиперболических тангенса и котангенса

Функции  $w = \operatorname{th} z$  и  $w = \operatorname{cth} z$  отображают взаимно однозначно и непрерывно<sup>3</sup> полосу от  $b = -\pi/2$  (исключительно) до  $b = \pi/2$  (включительно) плоскости  $z$  на плоскость  $w$ . Поэтому за области изменения аргументов примем:

$$-\infty < a \leq \infty, \quad -\frac{\pi}{2} < b \leq \frac{\pi}{2}, \quad 0 \leq r \leq \infty, \quad -\pi < \theta \leq \pi. \quad (3)$$

Уравнение (1) равносильно двум уравнениям, имеющим номографически рациональный вид:

$$\operatorname{sh}^2 2a \operatorname{tg}^2 \theta + (-1) \sin^2 2b = 0, \quad (4)$$

$$\operatorname{sh}^2 2a (1 - r^2)^2 + (1 + r^2)^2 \sin^2 2b + (-4r^2) = 0. \quad (5)$$

Уравнение (4) есть уравнение третьего номографического порядка первой канонической формы. Уравнение (5) записано в форме уравнения четвертого номографического порядка типа Коши.

Оба уравнения являются, таким образом, частными видами уравнения Коши

$$f_1(z_1)f_3(z_3) + f_2(z_2)g_3(z_3) + h_3(z_3) = 0$$

с одними и теми же функциями  $f_1(z_1)$  и  $f_2(z_2)$ .

<sup>1</sup> Она является продолжением серии номограмм специальных функций<sup>[1]</sup>.

<sup>2</sup> Нам известны номограммы гиперболического тангенса: номограмма Рабнера<sup>[2]</sup> и номограмма Швердта<sup>[3]</sup>. Обе номограммы этим требованиям не удовлетворяют.

<sup>3</sup> Конформность и однозначность нарушаются при  $z = \infty$ .

Определитель Вронского для функций

$$* f_3(z_3) = (1 - r^2)^2, \quad g_3(z_3) = (1 + r^2)^2, \quad h_3(z_3) = -4r^2$$

уравнения (5) равен нулю.

Следовательно, система уравнения (4) и (5) изображаема номограммой нулевого жанра из четырех прямолинейных шкал с совмещенными шкалами для каждого из аргументов  $a$  и  $b$ .

Для дальнейшего нам понадобятся соотношения.

Легко проверить, что имеют место пять равенств:

$$\begin{aligned} \operatorname{th}(a + bi) &= re^{\theta i}, & \operatorname{th}(-a + bi) &= re^{(\pi - \theta)i}, & \operatorname{th}(a - bi) &= re^{-\theta i}, \\ \operatorname{th}(-a - bi) &= re^{-(\pi - \theta)i}, & \operatorname{th}\left[a + \left(\frac{\pi}{2} - b\right)\right] &= \frac{1}{r} e^{\theta i}, \end{aligned} \quad (6)$$

если имеет место одно из них (аналогично для котангенса).

Очевидно, что (формулы приведения)

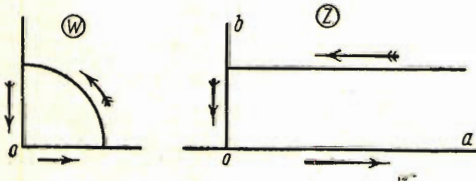
$$\operatorname{cth}(a + bi) = \operatorname{th}\left[a + \left(\frac{\pi}{2} + b\right)i\right], \quad \operatorname{cth}(a - bi) = \operatorname{th}\left[a - \left(\frac{\pi}{2} - b\right)i\right]. \quad (7)$$

Функции  $w = \operatorname{tg} z$  и  $w = \operatorname{cth} z$  отображают взаимно однозначно и непрерывно соответственно первую четверть (фиг. 1) единичного круга и внешнюю по отношению к единичному кругу часть четвертого квадранта плоскости  $w$  вместе с их границами на бесконечную прямоугольную полосу от  $a = 0$  до  $a = \infty$  и от  $b = 0$  до  $b = \pi/4$  плоскости  $z$ . Следовательно, соответствующие друг другу границы изменения  $a$ ,  $b$ ,  $r$  и  $\theta$  для гиперболического тангенса будут:

$$0 \leq a \leq \infty, \quad 0 \leq b_1 \leq \frac{\pi}{4}, \quad 0 \leq r_1 \leq 1, \quad 0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}, \quad (8)$$

а для гиперболического котангенса:

$$\begin{aligned} 0 \leq a \leq \infty, & \quad 0 \leq b_1 \leq \frac{\pi}{4}, \\ 1 \leq r_2 \leq \infty, & \quad -\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0. \end{aligned} \quad (9)$$



Фиг. 1.

Соответствие границ и угловых точек легко видеть непосредственно из фиг. 1. Это дает все критические значения аргументов, определяющие критические точки номограммы.

Отыскание гиперболического котангенса согласно (6) и (7) при  $|b| \leq \pi/4$  сводится к отысканию гиперболического тангенса при  $\pi/4 \leq |b| \leq \pi/2$  и наоборот. Причем отыскание гиперболического котангенса с положительным аргументом  $b$  сводится к отысканию гиперболического тангенса с отрицательным  $b$  и наоборот.

Поэтому в силу равенств (6), (7) и неравенств (8), (9), если условиться считать на шкале  $a$  ( $0 \leq a \leq \infty$ ) величину  $a$  в зависимости от надобности положительной или отрицательной и для последнего случая с обратной стороны шкалы  $\theta_1$  ( $0 \leq \theta_1 \leq \pi/2$ ) нанести шкалу  $\theta_2 = \pi - \theta_1$ , причем считать шкалы  $\theta_1$  и  $\theta_2$  шкалами положительных значений аргумента  $\theta$  для положительных значений  $b$  и шкалами отрицательных значений  $\theta$  для отрицательных значений  $b$  и, кроме того, для  $|b| > \pi/4$  нанести с обратной стороны шкалы  $b_1$  ( $0 \leq b_1 \leq \pi/4$ ) шкалу  $b_2 = \pi/2 - b_1$  и для последнего случая с обратной стороны шкалы  $r_1$  ( $0 \leq r_1 \leq 1$ ) шкалу  $r_2 = 1/r_1$ , то будут охвачены все пределы изменения (8) аргументов  $a$ ,  $b$ ,  $r$  и  $\theta$ , а градуировка шкал  $a$ ,  $b$ ,  $r$  и  $\theta$  будет (с точностью до знака) одинаково пригодна для гиперболического тангенса и котангенса. В последнем случае нет, следовательно, надобности в предварительном преобразовании  $b$  по формулам (7).



Результат этого рассмотрения приведен в табл. 1, где индексы величин соответствуют номерам шкал номограммы.

Таблица 1

th	$a \geq 0$	$a \leq 0$	cth
$0 \leq b_1 \leq \frac{\pi}{4}$	$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ $r_1 \leq 1$	$\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi$ $r_1 \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq b_2 \leq -\frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4} \leq b_2 \leq \frac{\pi}{2}$	$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ $r_2 \geq 1$	$\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi$ $r_2 \geq 1$	$-\frac{\pi}{4} \leq b_1 \leq 0$
$-\frac{\pi}{2} \leq b_2 \leq -\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$ $r_2 \geq 1$	$-\pi \leq \theta_2 \leq -\frac{\pi}{2}$ $r_2 \geq 1$	$0 \leq b_1 \leq \frac{\pi}{4}$
$-\frac{\pi}{4} \leq b_1 \leq 0$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$ $r_1 \leq 1$	$-\pi \leq \theta_2 \leq -\frac{\pi}{2}$ $r_1 \leq 1$	$\frac{\pi}{4} \leq b_2 \leq \frac{\pi}{2}$

## 2°. Номограмма для круговых тангенса и котангенса

Чтобы использовать номограмму для круговых тангенса и котангенса, воспользуемся соотношениями:

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta i) = i \operatorname{th}(\beta - \alpha i) = ire^{\theta i}, \quad (10)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta i) = -i \operatorname{cth}(\beta - \alpha i) = -ire^{\theta i}, \quad (11)$$

откуда

$$\operatorname{tg}(\alpha + \beta i) = re^{\left(\theta + \frac{\pi}{2}\right) i}, \quad (12)$$

$$\operatorname{ctg}(\alpha + \beta i) = re^{\left(\theta - \frac{\pi}{2}\right) i}, \quad (13)$$

где можно считать  $|\alpha| \leq \pi/2$ , так как тангенс и котангенс имеют периодом  $\pi$ .

Из (2), (12) и (13) получаем

$$\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}, \quad \varphi = \theta - \frac{\pi}{2} \quad (14)$$

соответственно для тангенса и котангенса.

Из соотношений (10), (11), (14) следует, что если заменить на номограмме всюду букву  $a$  буквой  $\beta$ , а букву  $b$  буквой  $\alpha$ , а в табл. 1 букву  $a$  буквой  $\beta$ , а букву  $b$  буквой  $-\alpha$ ,

то получим номограмму и соответствующую ей табл. 2 для определения любых двух из четырех величин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi - \pi/2$ ,  $r$  по двум другим в случае тангенса и для определения любых двух из четырех величин  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi + \pi/2$ ,  $r$  в случае котангенса.

Таблица 2

tg	$\beta \geq 0$	$\beta \leq 0$	ctg
$-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_1 \leq 0$	$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ $r_1 \leq 1$	$\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi$ $r_1 \leq 1$	$\frac{\pi}{4} \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$
$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_2 \leq -\frac{\pi}{4}$	$0 \leq \theta_1 \leq \frac{\pi}{2}$ $r_2 \geq 1$	$\frac{\pi}{2} \leq \theta_2 \leq \pi$ $r_2 \geq 1$	$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{4}$
$\frac{\pi}{4} \leq \alpha_2 \leq \frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$ $r_2 \geq 1$	$-\pi \leq \theta_2 \leq -\frac{\pi}{2}$ $r_2 \geq 1$	$-\frac{\pi}{4} \leq \alpha_1 \leq 0$
$0 \leq \alpha_1 \leq \frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{2} \leq \theta_1 \leq 0$ $r_1 \leq 1$	$-\pi \leq \theta_2 \leq -\frac{\pi}{2}$ $r_1 \leq 1$	$-\frac{\pi}{2} \leq \alpha_2 \leq -\frac{\pi}{4}$

### 3°. Способ пользования номограммой

А. Для гиперболического тангенса и котангенса

1. Аргумент  $b$  привести к  $|b| \leq \pi/2$  с помощью формул:

$$\operatorname{th}(z + k\pi) = \operatorname{th} z, \quad \operatorname{cth}(z + k\pi) = \operatorname{cth} z.$$

2. Значение  $\theta$  ищется или задается всегда в границах  $|\theta| \leq \pi$ .

3. Отрицательные и положительные аргументы на шкалах не различаются.

4. Если заданы какие-нибудь два из четырех аргументов  $a$ ,  $b$ ,  $\theta$ ,  $r$ , то номера шкал, которыми надлежит пользоваться, определяются по табл. 1.

5. Если по табл. 1 номера ответных шкал (индексы у величин) определяются двучленно, то задача имеет два решения.

В. Для кругового тангенса и котангенса

1. Аргумент  $a$  привести к  $|\alpha| \leq \pi/2$  с помощью формул:

$$\operatorname{tg}(z + k\pi) = \operatorname{tg} z, \quad \operatorname{ctg}(z + k\pi) = \operatorname{ctg} z.$$

2. На шкалах  $\theta$  указывается величина  $\theta = \varphi - \pi/2$  в случае тангенса и  $\theta = \varphi + \pi/2$  в случае котангенса, где  $\varphi$  — искомый аргумент кругового тангенса и котангенса. Если  $\varphi$  задается, то предполагается, что  $|\varphi - \pi/2| < \pi$  и  $|\varphi + \pi/2| < \pi$ , так как неоднозначную функцию комплексного переменного  $\varphi = \arg \operatorname{tg}(\alpha + \beta i)$  или  $\varphi = \arg \operatorname{ctg}(\alpha + \beta i)$  всегда можно выбрать соответствующим образом.



3. Отрицательные и положительные аргументы на шкалах не различаются.

4. Если заданы какие-нибудь два из четырех аргумента  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\varphi$ ,  $r$ , то номера шкал, на которых указаны соответствующие значения  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta = \varphi - \pi/2$ ,  $r$  для тангенса или  $\alpha$ ,  $\beta$ ,  $\theta = \varphi + \pi/2$ ,  $r$  для котангенса, определяются по табл. 2.

5. Если по табл. 2 номера ответных шкал определяются двузначно, то задача имеет два решения.

#### 4°. Примеры

1. Найти значения  $r$  и  $\theta$  для соотношения  $\operatorname{cth}(-0.35 + 1.25i) = re^{\theta i}$ .

Согласно табл. 1 пользуемся шкалами  $a$ ,  $b_2$ ,  $\theta_2$  и  $r_1$ . Соединяя прямой отметки  $a = -0.35$  и  $b = 1.25$  в пересечении со шкалами  $r_1$  и  $\theta_2$ , читаем:  $r_1 = 0.47$  (вычисления дают  $r_1 = 0.4699$ ),  $\theta_2 = -2.474$  (последний знак на-глаз).

2. Найти значения  $r$  и  $\varphi$  для соотношения  $\operatorname{tg}(0.45 - 0.35i) = re^{\varphi i}$ .

Согласно табл. 2 пользуемся шкалами  $\beta$ ,  $\alpha_1$ ,  $\theta_2$  и  $r_1$ . Соединяя прямой отметки 0.45 и 0.35 шкал  $\alpha_1$  и  $\beta$ , в пересечении со шкалами  $\theta_2$  и  $r_1$  прочтем:  $\theta_2 = -2.340$ ,  $r_1 = 0.581$ ; значит  $\varphi = \pi/2 - 2.340 = -0.769$ .

3. Найти область плоскости  $z$ , конформно отображающуюся с помощью функций  $w = \operatorname{th} z$  на единичный круг плоскости с центром в начале координат.

Приложив линейку так, чтобы она постоянно проходила через точку с пометкой 1 шкалы  $r$ , вращаем ее в направлении роста шкалы  $\theta$  от  $\theta_1 = 0$  до  $\theta_1 = \pi/2$  и далее от  $\theta_2 = \pi/2$  до  $\theta_2 = \pi$ . При этом  $b = \operatorname{const} = \pi/4$  и  $a$  убывают от  $+\infty$  до  $-\infty$ .

Далее вращаем от  $\theta_2 = -\pi$  до  $\theta_2 = -\pi/2$  и от  $\theta_1 = -\pi/2$  до  $\theta_1 = 0$ , находим  $b = \operatorname{const} = -\pi/4$  и  $a$  растет от  $-\infty$  до  $+\infty$ . Таким образом круг  $r = 1$  плоскости  $w$  конформно отображается на полосу  $b = -\pi/4$ ,  $b = \pi/4$  плоскости  $z$ .

4. Найти область плоскости  $z$ , конформно отображающуюся с помощью функции  $w = \operatorname{th} z$  на круг радиуса  $r$  с центром в начале координат плоскости  $w$ .

а) Пусть  $r < 1$ . Поступаем аналогично. В данном случае  $a$  и  $b$  меняются при вращении линейки, постоянно проходящей через фиксированную точку шкалы  $r_1$ . Из характера изменения  $a$  и  $b$  заключаем, что искомая область ограничена овальной кривой, для которой оси координат плоскости  $z$  являются осями симметрии. Искомая область лежит внутри основной полосы от  $b = -\pi/2$  до  $b = \pi/2$ . Построение ее границы никаких затруднений не представляет.

б) Пусть  $r > 1$ . Поступая аналогично, тотчас же видим, что внутри основной полосы искомая область существовать не может. Из номограммы видно, что в полосе от  $b = 0$  до  $b = \pi$  такая область существует. Она получается из области, отображающейся на круг плоскости  $w$  радиуса  $1/r < 1$  сдвигом на  $\pi/2$  вверх.

С помощью номограммы мы можем построить область, если она существует в основной полосе, конформно отображающуюся с помощью  $w = \operatorname{th} z$  или  $w = \operatorname{cth} z$  на область, ограниченную кривой  $r = \varphi(\theta)$  на плоскости  $w$ . Аналогично для круговых функций.

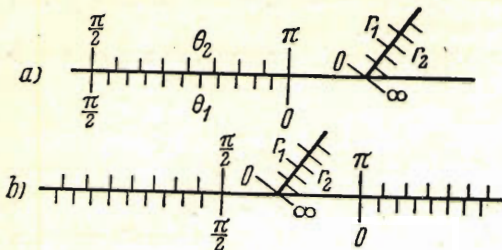
Однако при решении задач на конформное отображение с помощью  $w = \operatorname{tg} z$  или  $w = \operatorname{ctg} z$  удобнее иметь шкалу  $\varphi$ , а не  $\theta$ . Из (14) видно, что для этого достаточно ко всем пометкам  $\theta_1$  добавить  $\pi/2$ , получим шкалу  $\varphi_2$  ( $\pi/2 \leq \varphi_2 \leq \pi$ ), а из всех пометок шкалы  $\theta_2$  вычтем  $\pi/2$ , получим шкалу  $\varphi_1$  ( $0 \leq \varphi_1 \leq \pi/2$ ), и соответствующим образом переделать табл. 2. На этом мы не останавливаемся.

#### 5°. Выбор эскиза номограммы

Выводы пункта 1°, где установлены все критические точки номограммы, приводят к заключению, что номограмма располагается на четырех прямых общего положения т. е. на полном четырехстороннике. Установив далее, что задание для двух из любых трех коллинеарно расположенных вершин произвольного четырехсторонника критических значений какой-нибудь одной из четырех переменных, скажем  $a$ , однозначно определяет



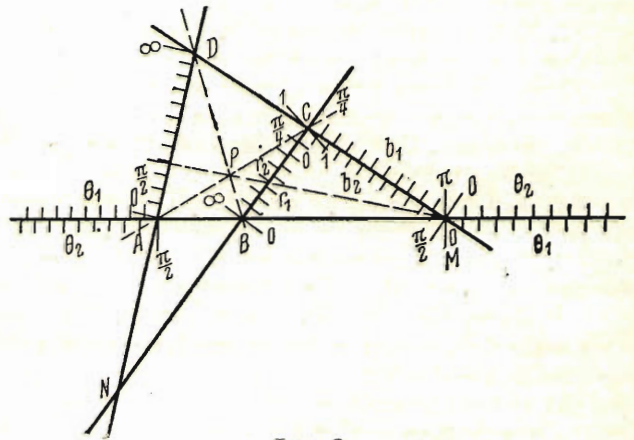
расположение [в смысле понятий „между“ и „вне“ (см. фиг. 2)] каждой из четырех шкал  $a, b, \theta, r$  по отношению к вершинам четырехсторонника, и приняв во внимание



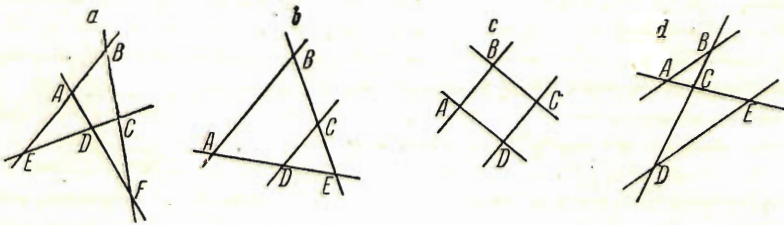
Фиг. 2.

Все попарно негомеоморфные типы эскизов сразу можно получить из четырехсторонников (a), (b), (c), (d), изображенных на фиг. 4, приписывая их вершинам, принадлежащим одной стороне, различными способами два критических значения какого-нибудь из четырех аргументов, например,  $a$ . Так, четырехсторонники (b), (c) дают сразу оба варианта номограммы Рибнера (фиг. 5).

Все эскизы одной группы, как сказано, гомеоморфны друг другу и соответствующие их номограммы получаются друг из друга слабыми проективными преобразованиями, т. е. такими, при которых



Фиг. 3.



Фиг. 4.

<sup>1</sup> Эскизом номограмм мы называем всю ее рабочую часть, т. е. часть, оставшуюся после удаления из полного четырехсторонника неградуированных частей. Два эскиза гомеоморфны, если непрерывным преобразованием в евклидовой плоскости одного можно получать другой.

<sup>2</sup> С точки зрения проективной геометрии все полученные выше эскизы эквивалентны между собой. Так, изображенный на фиг. 3 неудачный эскиз переходит в эскиз, гомеоморфный эскизу, положенному в основу номограммы, изображенному на фиг. 6 (см. сноску 3), если задать, например, инволюционную гомологию в плоскости с осью гомологии  $AD$  и парой соответственных точек  $M, P$  (центр гомологии будет тогда в  $O$ ). Это—сильное проективное преобразование, так как перевело один в другой топологически различные эскизы.

уходящая в бесконечность прямая евклидовой плоскости не пересекает градуированных частей эскизов 1.

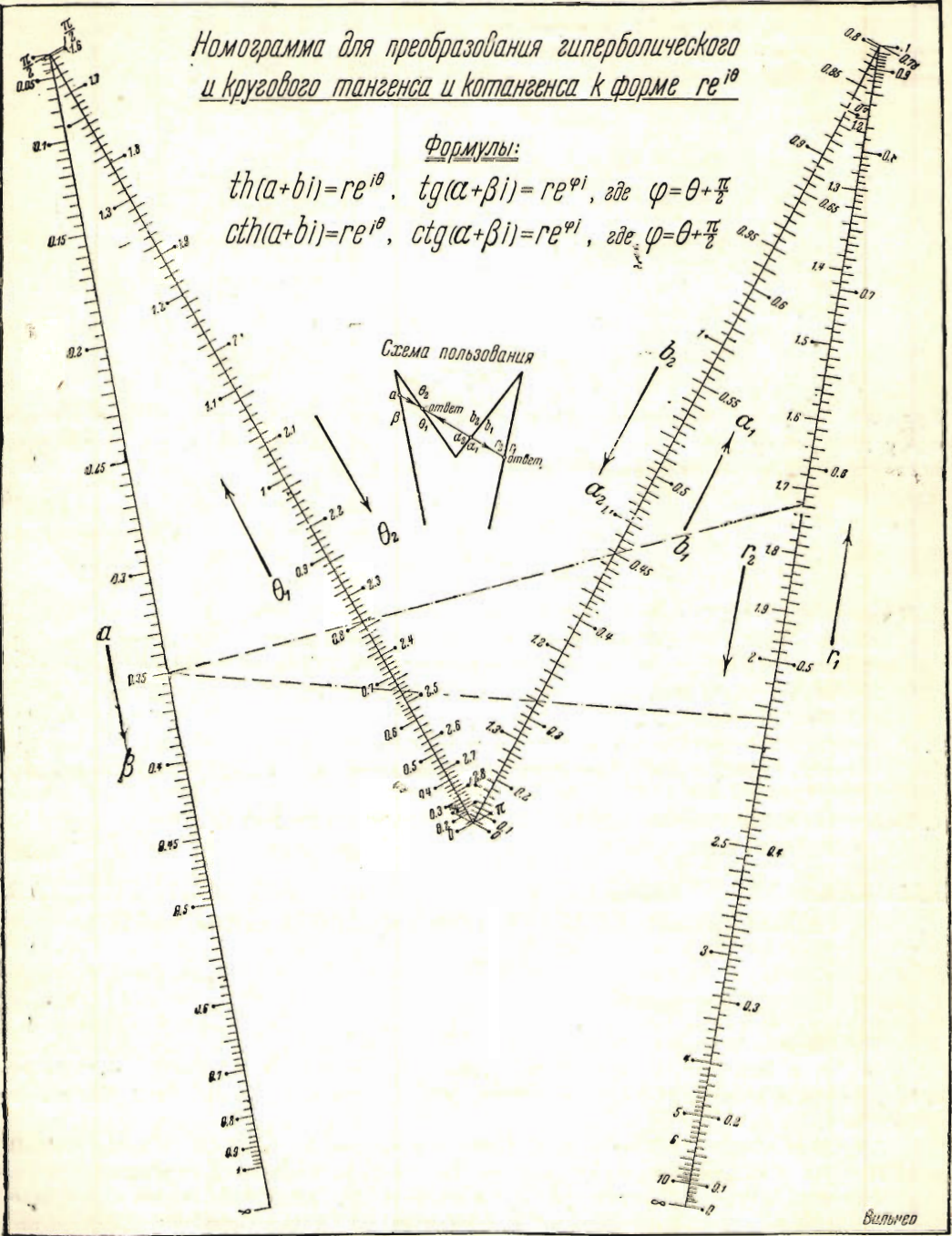
Таким образом приходим к доказательству существования симметричной номограммы расчет которой труда не представляет. Мы его опускаем.

Номограмма для преобразования гиперболического и кругового тангенса и котангенса к форме  $re^{i\theta}$

Формулы:

$th(\alpha+bi) = re^{i\theta}$ ,  $tg(\alpha+\beta i) = re^{\varphi i}$ , где  $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$

$cth(\alpha+bi) = re^{i\theta}$ ,  $ctg(\alpha+\beta i) = re^{\varphi i}$ , где  $\varphi = \theta + \frac{\pi}{2}$



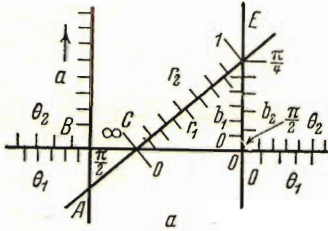
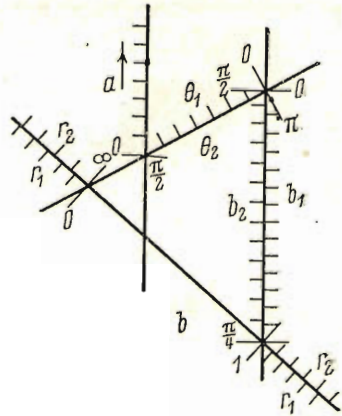
<sup>1</sup> Ибо существует ей гомеоморфный эскиз, который получаем, приписав точкам  $A$  и  $E$  четырехсторонника ( $a$ ) на фиг. 4 пометки  $\infty$  и  $0$  переменной  $a$  [см. эскиз номограммы (фиг. 6)] и удалив затем неградуированные части.

Вильямс



Можно думать, что найденный нами вариант не замечен упомянутыми авторами по причине некоторой трудности отыскания из сравнительно многих попарно негомеоморфных классов эскизов только одного, не имеющего никаких разрывов и лежащего в конечной части плоскости.

И вообще, если любая система двух уравнений с четырьмя переменными допускает номограмму с совмещенными шкалами



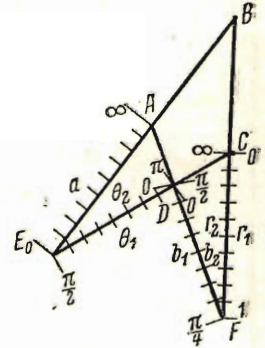
Фиг. 5.

нулевого жанра на полном четырехстороннике, то изложенная классификация эскизов сразу дает все существенно различные друг от друга типы номограмм, расчет которых после этого не встречает принципиальных трудностей.

Поступила в редакцию 11 X 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1. Вильнер И. А. Номограмма для определения гиперболического синуса и косинуса от комплексного аргумента. Номограммы для вычисления эллиптических интегралов. Журнал „Электричество“. 1934. № 12 [стр. 48]; 1935. № 17 [стр. 45] и 1935. № 6 [стр. 49].
2. Рибнер. Номограммы в приложении к проблемам электротехники, перев. с англ. на русский Синельникова. Изд. ОНТВУ. 1932.
3. Schwerdt H. Die Anwendung der Nomographie in der Mathematik. Berlin. 1931.



Фиг. 6.

DIAGRAMS FOR CALCULATING THE HYPERBOLIC AND CIRCULAR TANGENTS AND COTANGENTS OF COMPLEX ARGUMENT

I. A. VILNER

(Summary)

The diagram is constructed on the basis of aligned points.

In  $5^\circ$  it is shown that given two critical values of any of the four variables  $a, b, r, \theta$  for any pair, three collinear vertices of the complete quadrilateral determines the diagram.

By virtue of this the four quadrilaterals represented in fig. 4 immediately give all possible types of diagrams which are different from each other in Euclid's plane.

One of this type enables us to construct a diagram (fig. 6) in the finite part of the plane for the whole domain of the values of argument in which the functions considered are determined.