

Т. IV, в. 1, 1940

## О ПРИМЕНЕНИИ ИНТЕГРАТОРА В КАЧЕСТВЕ СТЕПЕННОГО ИНТЕГРИМЕТРА

К. А. СЕМЕНДЯЕВ

(Москва)

### 1. Конструкция специальных приборов<sup>1</sup> для нахождения значений интеграла

$$\int_{x_0}^x y^k dx \quad (k = 1, 2, 3)$$

по заданному графику функции  $y = y(x)$  недостаточно разработана. Поэтому на практике приходится пользоваться обычными интеграторами<sup>2</sup>.

Так как интеграторы дают результат только после обвода по замкнутой кривой, то для получения ряда значений интеграла приходится выполнять обводы по всей границе каждой криволинейной трапеции.

Следуя идеям Нистрема<sup>[3]</sup>, можно значительно упростить технику применения интегратора в качестве интегриметра. Это упрощение базируется в основном на следующем. При смещении обводного штифта вдоль кривой на элемент  $ds$  поворот счетного ролика интегратора  $dn$  всегда может быть представлен в виде:

$$dn = Cy^k dx - dF(y) - d\Phi(x),$$

где  $F(y)$  и  $\Phi(x)$  — некоторые однозначные функции, зависящие от конструкции прибора. При обводе замкнутой кривой интеграла от последних двух слагаемых исчезают, и отсчет на счетном ролике позволяет определить величину искомого интеграла.

Если обводный штифт остановлен до окончания обвода замкнутой кривой в некоторой точке  $(x, y)$ , то для получения значения интеграла необходимо к отсчету прибавить поправки  $F(y)$  и  $\Phi(x)$  (предполагается, что  $F(y_0) = \Phi(x_0) = 0$ ).

Составляя таблицу значений этих поправок, можно с успехом использовать интегратор в качестве интегриметра.

Аналитические выражения функций  $F(y)$  и  $\Phi(x)$  для схемы наиболее распространенных типов интеграторов Амслера-Коради<sup>[4]</sup> и Адлера-Отт<sup>[5]</sup> могут быть легко получены.

**2. Интегратор Амслера-Коради.** Пусть  $x, y$  — координаты обводного штифта  $P$  (фиг. 1), а  $x_k, y_k$  — координаты точки касания счетного ролика,  $M_k, n_k$  — число оборотов ролика  $M_k$ , его радиус  $R_k$  и  $\varphi$  — угол между  $O_1 P$  и осью  $x$ .

Введем, кроме того, обозначения:

$$O_1 P = a, \quad O_1 Q = b, \quad O_2 M_2 = p_2, \quad O_3 M_3 = p_3.$$

<sup>1</sup> Интегриметров по терминологии Вальтера<sup>[1]</sup>.

<sup>2</sup> Степенными планиметрами, если следовать той же терминологии.

Будем предполагать, что направление отсчета углов выбирается так, что при обходе по замкнутому контуру против часовой стрелки положительному интегралу соответствует положительный отсчет.

Далее легко видеть, что ось ролика  $M_1$  можно считать совпадающей с осью  $O_1 P$ .

Из фиг. 2 легко получим:

$$x_1 = x - (a - b) \cos \varphi, \quad y_1 = b \sin \varphi$$

$$2\pi R_1 dn_1 = dx_1 \sin \varphi - dy_1 \cos \varphi =$$

$$= \sin \varphi dx + (a \sin^2 \varphi - b) d\varphi,$$

или

$$2\pi R_1 n_1 = \int_{x_0}^x \sin \varphi dx +$$

$$+ \left( \frac{a}{2} - b \right) \varphi - \frac{a}{2} \sin \varphi \cos \varphi.$$

Так как  $\sin \varphi = \frac{y}{a}$ , то из последнего равенства следует, что

$$\int_{x_0}^x y dx = 2\pi R_1 a [n_1 - N_1], \quad (1)$$

где

$$N_1 = \frac{1}{2\pi R_1} \left[ \left( \frac{a}{2} - b \right) \varphi - \frac{a}{4} \sin 2\varphi \right] \quad (2)$$

и есть искомая поправка. Эта формула была выведена несколько иным путем Нистремом [3].

Для ролика статических моментов получим:

$$x_2 = x - a \cos \varphi - p_2 \sin 2\varphi,$$

$$y_2 = \text{const} - p_2 \cos 2\varphi,$$

$$2\pi R_2 dn_2 = dy_2 \sin 2\varphi - dx_2 \cos 2\varphi =$$

$$= -\cos 2\varphi dx - a \sin \varphi \cos 2\varphi d\varphi + 2p_2 d\varphi,$$

или

$$2\pi R_2 n_2 = 2 \int_{x_0}^x \sin^2 \varphi dx - (x - x_0) +$$

$$+ 2p_2 \varphi - \frac{a}{6} (3 \cos \varphi - \cos 3\varphi - 2).$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^x y^2 dx = \pi R_2 a^2 [n_2 + L_2 - N_2], \quad (3)$$

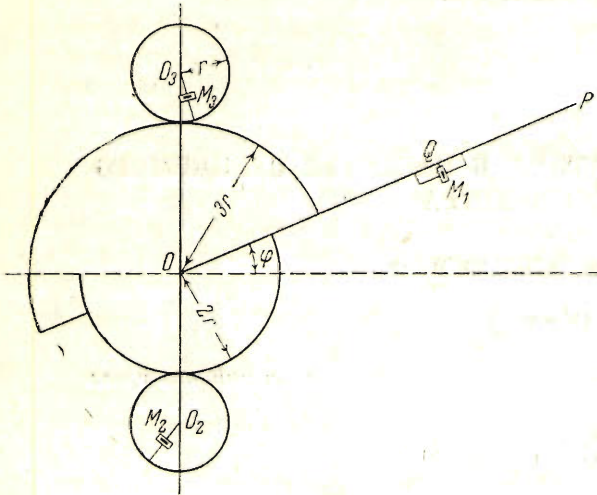
где

$$L_2 = \frac{1}{2\pi R_2} (x - x_0) \quad (4)$$

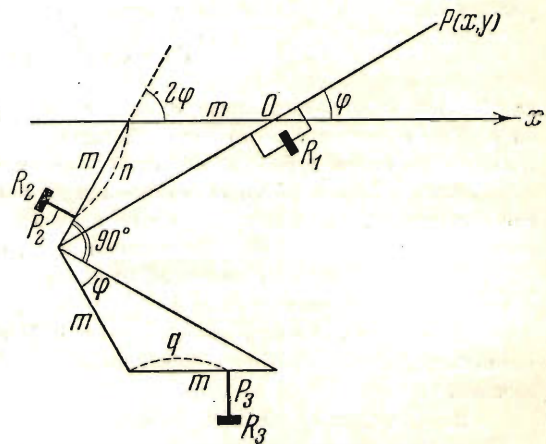
и

$$N_2 = \frac{1}{2\pi R_2} \left[ 2p_2 \varphi - \frac{a}{6} (3 \cos \varphi - \cos 3\varphi - 2) \right] \quad (5)$$

являются искомыми поправками.



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Аналогично для ролика моментов инерции получим:

$$x_3 = x - a \cos \varphi + p_3 \cos 3\varphi, \quad y_3 = \text{const} - p_3 \sin 3\varphi,$$

$$2\pi R_3 dn_3 = dx_3 \sin 3\varphi + dy_3 \cos 3\varphi = \sin 3\varphi dx + a \sin \varphi \sin 3\varphi d\varphi - 3p_3 d\varphi,$$

или

$$2\pi R_3 n_3 = \int_{x_0}^x \sin 3\varphi dx + \frac{a}{8} (2 \sin 2\varphi - \sin 4\varphi) - 3p_3 \varphi.$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^x y^3 dx = \frac{3a^2}{4} \int_{x_0}^x y dx - \frac{a^3}{4} \int_{x_0}^x \sin 3\varphi dx = \frac{3a^2}{4} \int_{x_0}^x y dx - \frac{\pi R_3 a^3}{2} [n_3 - N_3], \quad (6)$$

где

$$N_3 = \frac{a}{16\pi R_3} (2 \sin 2\varphi - \sin 4\varphi) - \frac{3p_3 \varphi}{2\pi R_3}. \quad (7)$$

**3. Интегратор Адлер-Отто** (фиг. 2). Обозначения для размеров прибора приведены на фиг. 2, обозначения же для величин, связанных со счетными роликами, сохраняем.

Для ролика  $R_1$  можно применить предыдущие формулы (1) и (2), положив в них  $b = 0$ .

Что же касается ролика  $R_2$ , то прежним путем получим:

$$x_2 = x - m - a \cos \varphi - n \cos 2\varphi - p_2 \sin 2\varphi, \quad y_2 = -n \sin 2\varphi + p_2 \cos 2\varphi,$$

$$2\pi R_2 dn_2 = -dx_2 \cos 2\varphi - dy_2 \sin 2\varphi = -\cos 2\varphi dx - a \sin \varphi \cos 2\varphi d\varphi - 2p_2 d\varphi,$$

или

$$2\pi R_2 n_2 = 2 \int_{x_0}^x \sin^2 \varphi dx - (x - x_0) - 2p_2 \varphi + \frac{a}{6} (2 + \cos 3\varphi - 3 \cos \varphi).$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^x y^2 dx = \pi R_2 a^2 [n_2 + L_2 - N_2], \quad (8)$$

где  $L_2$  и  $N_2$  определяются формулами (4) и (5).

Аналогичным образом для ролика  $R_3$  получим:

$$x_3 = x - m (1 - \sin \varphi + \cos 2\varphi) - a \cos \varphi + q \sin 3\varphi - p_3 \cos 3\varphi,$$

$$y_3 = -m (\cos \varphi + \sin 2\varphi) - q \cos 3\varphi - p_3 \sin 3\varphi,$$

$$2\pi R_3 dn_3 = dx_3 \sin 3\varphi - dy_3 \cos 3\varphi = \sin 3\varphi dx + a \sin \varphi \sin 3\varphi d\varphi + m (2 \cos \varphi + \sin 2\varphi) d\varphi,$$

или

$$2\pi R_3 n_3 = \int_{x_0}^x \sin 3\varphi dx + \frac{a}{8} (2 \sin 2\varphi - \sin 4\varphi) + \frac{m}{2} (4 \sin \varphi + 1 - \cos 2\varphi) + 3p_3 \varphi.$$

Отсюда

$$\int_{x_0}^x y^3 dx = \frac{3a^2}{4} \int_{x_0}^x y dx - \frac{\pi R_3 a^3}{2} (n_3 - N_3'),$$

где

$$N_3' = \frac{a}{16\pi R_3} (2 \sin 2\varphi - \sin 4\varphi) + \frac{m}{4\pi R_3} (4 \sin \varphi + 1 - \cos 2\varphi) + \frac{3p_3 \varphi}{2\pi R_3}.$$

4. Составление таблиц для поправок  $L$  и  $N$  по полученным выше формулам требует знания размеров деталей прибора. Точное определение этих размеров затруднительно, и потому практически удобнее определять величину поправок экспериментальным путем. Эта возможность в отношении планиметров предусмотрена в указанной статье Нистрома [3].

Для составления таблицы поправок  $N_k$  смещают постепенно обводный штифт, начиная от оси  $x$ , по прямой, перпендикулярной к оси, останавливаясь в некоторых заранее выбранных точках (например, через каждый сантиметр). Поворот ролика  $R_k$  и даст величину поправки  $N_k$  для соответствующего значения  $y$ .

По полученным значениям  $N_k$  строится график, позволяющий определять величину поправки для любого  $y$ .

Практически удобно построить шкалу поправок следующим образом: на отрезке прямой откладываются значения  $y$ , для которых поправка выражается целым числом делений счетного ролика, и соответствующее значение поправки надписывается. Прикладывание линейки с подобной шкалой к ординате в любой точке остановки обводного штифта позволяет сразу определить величину искомой поправки.

Поправка  $L_2$  также может быть определена экспериментально, что особенно легко сделать, так как  $L_2$  является линейной функцией  $x$ .

5. Рассмотренный выше метод был проверен экспериментально на интеграторах фирмы Коради № 1203 и фирмы Отт № 40052. Ряд опытных обводов показал, что полу-

чение таблицы значений интегралов  $\int_{x_0}^x y^k dx$  для ряда значений верхнего предела с помощью таблицы поправок требует в 1.5—2 раза меньше времени, чем путем обвода отдельных участков, причем первый метод давал несколько более точные результаты, что, естественно, объясняется значительным сокращением длины пути обвода.

Таблицы поправок были составлены путем, описанным выше. Полученные значения сравнивались с вычисленными по формулам, приведенным выше. Так как непосредственное определение размеров интегратора затруднительно, то проверка совпадения экспериментального материала с формулой производилась следующим образом: основные размеры ( $a$ ,  $R_k$ ) определялись из постоянных прибора по данным фирмы; кроме того, для

Таблица 1

Поправки (в делениях нониуса) для интегратора Коради № 1203

[ $a = 20$  см,  $2\pi R_1 = 5$  см,  $2\pi R_2 = 2\pi R_3 = 6$  см,  $b = 14.063$  см,  $p_2 = 0.974$  см,  $p_3 = 0.991$  см]

$y$ (см)	$N_1$		$N_2$		$N_3$	
	экспер.	теорет.	экспер.	теорет.	экспер.	теорет.
2	— 280.2	— 280.4	14.3	16.1	— 4.67	— 4.62
4	— 556.9	— 555.3	0.9	0.8	— 7.46	— 7.38
6	— 821.1	— 820.0	— 40.9	— 40.1	— 6.61	— 6.51
8	1067.7	1067.6	—100.1	— 99.1	— 0.85	— 0.84
10	1291.4	1291.5	—162.4	—161.7	10.11	10.14
12	1483.3	1482.9	—208.4	—208.3	25.72	25.71
14	1630.0	1629.9	—207.2	—207.5	43.31	43.29
16	1712.5	1713.5	—106.0	—107.0	56.49	56.45

интегратора Отт величина  $m$  определялась непосредственным измерением расстояния между шаровыми шарнирами на ведущей каретке, после чего в каждой из формул (4), (5), (6), (7) остается неизвестной лишь одна величина ( $b, p_2, p_3$ ), входящая в коэффициент при  $\varphi$ . Во всех случаях разность между экспериментально найденной поправкой и нелнейными относительно  $\varphi$  членами в формулах (4)—(7) оказалась довольно точно пропорциональной  $\varphi$ .

Для сравнения в табл. 1 и 2 приведены поправки  $N_1, N_2$  и  $N_3$ , определенные экспериментально (средние из 15 обводов для интегратора Коради и из 9 обводов для интегратора Отт) и вычисленные теоретически для значений  $b, p_2$  и  $p_3$ , найденных из указанных выше разностей по методу наименьших квадратов. Заметим также, что для интегратора Отт при вычислении  $N_1$  нельзя полагать  $b = 0$ , так как это равенство выполняется при изготовлении прибора лишь приблизительно, поскольку величина  $b$  при использовании прибора как интегратора не существенна.

Таблица 2

Поправки (в делениях нониуса) для интегратора Отт № 40052

[ $a = 25$  см,  $\pi R_k = 3.2$  см ( $k = 1, 2, 3$ ),  $m = 5$  см,  $b = 0.0103$  см,  $p_2 = 3.1585$  см,  $p_3 = 3.0908$  см]

$y$ (см)	$N_1$		$N_2$		$N_3'$	
	экспер.	теорет.	экспер.	теорет.	экспер.	теорет.
2	1.6	1.1	67.4	67.5	248.6	246.3
4	6.7	6.6	111.9	111.2	519.1	518.7
6	20.2	20.3	134.2	134.2	823.6	823.6
8	46.4	46.5	140.8	140.6	1172.8	1173.3
10	90.6	91.0	137.5	137.4	1574.3	1575.4
12	158.6	159.5	132.8	132.6	2033.1	2034.4
14	259.7	259.5	139.3	139.4	2551.4	2549.6
16	402.2	401.5	174.1	174.6	3113.1	3113.1

Поступила в редакцию 14 IX 1939.

Математический институт  
Акад. Наук Союза ССР.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Walther A. Mathematische Geräte zum Integrieren. Zeitschrift d. V. D. I. 1936. Bd. 80. № 47. S. 1397.
2. Amsler A. J. Verfahren zur Bestimmung des polaren Trägheitsmomenten eines Umdrehungskörpers mittels des Integrators. Zeitschrift f. Instrumentenkunde. 1926. Bd. 46. S. 19.
3. Nyström E. J. Anwendung des Planimeters als Integrator. Comm. Phys.-Mathem. Soc. Sc. Fen. 1934. T. VII. № 10.
4. Galle A. Mathematische Instrumente. Berlin. 1912.
5. Werkmeister P. Ein Dreirollen-Momentenplanimeter. Z. f. Instrumentenkunde. 1937. Bd. 54. S. 410.

## AN APPLICATION OF THE INTEGRATOR

K. A. SEMENDYAEV

(Summary)

In the article the procedure for calculating the values of integrals

$$\int_{x_0}^x y^k dx$$

for values of the upper limit  $x$  with the help of an integrator by means of tracing the graph of function

$$y = f(x)$$

and by employing an auxiliary table or scale is given.

This same procedure for the planimeter was given by Nyström [2].