АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 1, 1940

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ПЕРЕМЕЩЕНИЯ ПО ЗАДАННОМУ ТЕНЗОРУ ДЕФОРМАЦИИ

А. И. ЛУРЬЕ

(Ленинград)

Целью этой заметки является приведение к квадратурам задачи об определении перемещений по заданным составляющим тензора деформации в произвольной (неортогональной) системе координат.

Примем обозначения

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}(x^1, x^2, x^3) \tag{1}$$

для вектора-радиуса точки с криволинейными координатами x^i;

$$\mathbf{r}_i = \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial x^i} \tag{2}$$

для основных векторов, направленных по касательным и координатным линиям;

$$g_{ik} = \mathbf{r}_i \cdot \mathbf{r}_k \tag{3}$$

для ковариантных составляющих основного метрического тензора;

$$\mathbf{r}^s = g^{is}\,\mathbf{r}_i \tag{4}$$

для векторов, сопряженных основным, направленных по нормалям к соответствующим координатным поверхностям.

Очевидно,

$$\mathbf{r}^s \cdot \mathbf{r}_i = g_i^s = \begin{cases} 0 & (s \neq i), \\ 1 & (s = i). \end{cases} \tag{5}$$

Имеют место деривационные формулы:

$$\frac{\partial \mathbf{r}_i}{\partial x^j} = \mathbf{r}_{ij} = \left\{ {s \atop i\ j} \right\} \mathbf{r}_s, \tag{6}$$

$$\frac{\partial \mathbf{r}^i}{\partial x^j} = \mathbf{r}^i_{\ j} = -\left\{ {i \atop s\ j} \right\} \mathbf{r}^s, \tag{7}$$

где через $\left\{ {s \atop i\,j} \right\}$ обозначены символы Кристоффеля второго рода, для составления которых достаточно, как известно, знать основной метрический тензор g_{ik}:

$$\left\{ {s \atop i\ j} \right\} = g^{sk}\,[ij,\,k] = \frac{1}{2}\, g^{sk} \left(\frac{\partial g_{jk}}{\partial x^i} + \frac{\partial g_{ik}}{\partial x^j} - \frac{\partial g_{ij}}{\partial x^k} \right),$$

где $[ij,\,k]$ — символы Кристоффеля первого рода.

Выразим, что $\mathbf{r}_{ijm} = \mathbf{r}_{imj}$. Это приводит, как известно, к требованию (в предположении Эвклидовой метрики) обращения в нуль Риманова тензора кривизны:

$$R^{k}_{\ ijm} = \left\{ {s \atop i\ j} \right\} \left\{ {k \atop s\ m} \right\} - \left\{ {s \atop i\ m} \right\} \left\{ {k \atop s\ j} \right\} + \frac{\partial}{\partial x^m} \left\{ {k \atop i\ j} \right\} - \frac{\partial}{\partial x^j} \left\{ {k \atop i\ m} \right\} = 0. \tag{8}$$

Пусть точкам сплошной среды сообщается перемещение, характеризуемое вектором $\mathbf{u}(x^1, x^2, x^3)$.

Вектор-радиус $\mathbf{r}$ при этом преобразуется в

$$\mathbf{r}^* = \mathbf{r} + \mathbf{u} = \mathbf{r} + u^s \mathbf{r}_s, \tag{9}$$

а основные векторы $\mathbf{r}_k$ преобразуются в

$$\mathbf{r}_k^* = \mathbf{r}_k + \left[\frac{\partial u^s}{\partial x^k} + \left\{ {s \atop m\ k} \right\} u^m\right] \mathbf{r}_s = \mathbf{r}_k + u^s_{.,k}\, \mathbf{r}^k,$$

где $u^s_{.,k}$ обозначает ковариантную производную u^s по x^k.

Будем пренебрегать квадратами перемещений и их производных. Тогда выражение для ковариантных составляющих основного метрического тензора в деформированной среде будет иметь вид:

$$\overset{*}{g}_{ik} = \mathbf{r}_i^* \cdot \mathbf{r}_k^* = g_{ik} + g_{is} u^s_{.,k} + g_{ks} u^s_{.,i} = g_{ik} + 2\varepsilon_{ik}, \tag{10}$$

где

$$\varepsilon_{ik} = \frac{1}{2}(u_{i,\,k} + u_{k,\,i}) \tag{11}$$

суть (ковариантные) составляющие тензора деформации.

Задача, рассматриваемая в этой заметке, состоит в нахождении вектора $\mathbf{u}$, если ε_{ik} известны.

Пусть $\left\{ {s \atop i\,j} \right\}^*$ обозначают символы Кристоффеля второго рода для деформированной среды; введем в рассмотрение величины

$$\gamma^{\ s}_{i\,j} = \left\{ {s \atop i\ j} \right\}^* - \left\{ {s \atop i\ j} \right\} = g^{sk*}[ij,\,k]^* - g^{sk}[ij,\,k] = 2\tilde{\varepsilon}^{\,sk}[ij,\,k] + \\ + g^{sk}\left(\frac{\partial \varepsilon_{ik}}{\partial x^j} + \frac{\partial \varepsilon_{jk}}{\partial x^i} - \frac{\partial \varepsilon_{ij}}{\partial x^k}\right), \tag{12}$$

где $[ij,\,k]^*$ — символы Кристоффеля первого рода для деформированной среды, а $\tilde{\varepsilon}^{\,sk}$ — полуразность значений контравариантных составляющих метрического тензора для деформированной и недеформированной среды.

По формуле (8) имеем:

$$\left(R^k_{.ijm}\right)^* = R^k_{.ijm} + S^k_{.ijm} = R^k_{.ijm} + \left\{ {s \atop i\ j} \right\} \gamma^{\ k}_{sm} + \left\{ {k \atop s\ m} \right\} \gamma^{\ s}_{ij} - \left\{ {s \atop i\ m} \right\} \gamma^{\ k}_{sj} - \left\{ {k \atop s\ j} \right\} \gamma^{\ s}_{im} + \\ + \frac{\partial}{\partial x^m}\gamma^{\ k}_{ij} - \frac{\partial}{\partial x^j}\gamma^{\ k}_{im}$$

и, поскольку Эвклидова метрика должна иметь место и в деформированной среде,

$$\left(R^k_{.ijm}\right)^* = 0$$

и, следовательно,

$$S^k_{.ijm} = 0. \tag{13}$$

Эти соотношения (их всего шесть) представляют зависимости Сан-Венана в произвольной криволинейной системе координат.

Деривационные формулы

$$\overset{*}{\mathbf{r}}_{ij} = \left\{ {s \atop i\ j} \right\}^* \mathbf{r}_s^*, \tag{14}$$

составленные для деформированной среды, могут быть написаны (с указанным выше пренебрежением) в виде:

$$\mathbf{r}_{ij} + \mathbf{u}_{ij} = \left\{ {s \atop i\ j} \right\} \mathbf{r}_s + \left\{ {s \atop i\ j} \right\} \mathbf{u}_s + \gamma^{\ s}_{ij}\, \mathbf{r}_s,$$

или в силу (6)

$$\frac{\partial^2 \mathbf{u}}{\partial x^i \partial x^j} = \mathbf{u}_{ij} = \left\{ {s \atop i\ j} \right\} \mathbf{u}_s + \gamma_{ij}^{s} \mathbf{r}_s \,. \tag{15}$$

Речь идет об интегрировании этой неоднородной системы линейных дифференциальных уравнений. Но соответствующей однородной системой является система (6), и общим решением последней может служить любой вектор $\mathbf{q}_s$, составляющие которого суть линейные функции вектора $\mathbf{r}_s$ с постоянными коэффициентами. Но такой вектор может быть представлен в виде скалярного произведения:

$$\mathbf{q}_s = \Pi \cdot \mathbf{r}_s \,,$$

где Π — постоянный тензор второго ранга. Для решения системы (15) поэтому следует применить метод вариации произвольных постоянных, т. е., приняв

$$\mathbf{u}_s = \Pi \cdot \mathbf{r}_s \,, \tag{16}$$

считать Π не постоянным тензором, а определить его так, чтобы удовлетворить этой системе.

Это приводит к соотношению

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x^j} \cdot \mathbf{r}_i = \gamma_{ij}^{s} \mathbf{r}_s \,. \tag{17}$$

Можно удовлетворить этому соотношению, представив $\frac{\partial \Pi}{\partial x^j}$ в виде:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x^j} = \gamma_{\rho j}^{s} \mathbf{r}_s \mathbf{r}^\rho \tag{18}$$

($\mathbf{r}_s \mathbf{r}^\rho$ обозначает диадное произведение векторов $\mathbf{r}_s$ и $\mathbf{r}^\rho$).

Действительно при этом будем иметь:

$$\frac{\partial \Pi}{\partial x^j} \cdot \mathbf{r}_i = \gamma_{\rho j}^{s} \mathbf{r}_s \mathbf{r}^\rho \cdot \mathbf{r}_i = \gamma_{\rho j}^{s} \mathbf{r}_s g_i^\rho = \gamma_{ij}^{s} \mathbf{r}_s \,,$$

что и требуется. Легко проверить, что правая часть (17) удовлетворяет условиям интегрируемости; действительно, пользуясь (6) и (7), найдем в силу (13):

$$\frac{\partial}{\partial x^m}\left(\gamma_{ij}^{s} \mathbf{r}_s \mathbf{r}^\rho\right) - \frac{\partial}{\partial x^j}\left(\gamma_{im}^{s} \mathbf{r}_s \mathbf{r}^\rho\right) = S^{s}_{\cdot ijm} \mathbf{r}_s \mathbf{r}^\rho = 0. \tag{19}$$

Условимся для краткости обозначать выражение вида

$$\int_{x_0^1}^{x^1} X_1(\xi^1, x^2, x^3)\, d\xi^1 + \int_{x_0^2}^{x^2} X_2(x_0^1, \xi^2, x_3)\, d\xi^2 + \int_{x_0^3}^{x^3} X_3(x_0^1, x_0^2, \xi^3)\, d\xi^3, \tag{20}$$

где X_1, X_2, X_3 удовлетворяют условиям интегрируемости, через

$$\int X_j \, d\xi^j.$$

При этом условии из (18) получим:

$$\Pi = \int \gamma_{\rho j}^{s} \mathbf{r}_s \mathbf{r}^\rho \, d\xi^j \,. \tag{21}$$

Конечно, для фактического вычисления здесь придется прибегнуть к представлению диадного произведения $\mathbf{r}_s \mathbf{r}^\rho$ в виде суммы составляющих по осям некоторой постоянной координатной системы. Результат вычисления можно снова преобразовать к виду:

$$\Pi = \beta^{k}_{\cdot \rho} \mathbf{r}_k \mathbf{r}^\rho. \tag{22}$$

Сделав подстановку в (16), получим теперь:

$$\mathbf{u}_s = u^{k}_{\cdot s} \mathbf{r}_k = \beta^{k}_{\cdot \rho} \mathbf{r}_k \mathbf{r}^\rho \cdot \mathbf{r}_s = \beta^{k}_{\cdot s} \mathbf{r}_k \tag{23}$$

и, следовательно,

$$\beta^{k}_{.s} = u^{k}_{.,s}, \tag{24}$$

т. е. тензор П представляет совокупность девяти ковариантных производных составляющих вектора перемещения.

Заметим, что формулы

$$u^{k}_{.,s} - u^{s}_{.,k} = \beta^{k}_{.s} - \beta^{s}_{.k} \tag{25}$$

определяют составляющие rot **u**. Из предшествующих выводов следует, что тензор П нами определен с точностью до постоянного тензора Π_0. Последний определяет решение системы (15) при $\gamma_{ij}^{\ s} = 0$, т. е. при отсутствии деформации. Нетрудно видеть, что Π_0 является антисимметричным тензором; действительно, из (11) и (24) при $\varepsilon_{ik} = 0$ получаем:

$$\beta_{ik} + \beta_{ki} = 0,$$

и, следовательно, вектор **u** определяется через тензор П с точностью до слагаемого вектора, ротор которого является постоянным.

Зная П, легко найти и вектор:

$$\mathbf{u} = \int \beta^{k}_{.s} \mathbf{r}_k \, d\xi^s,$$

причем для фактического вычисления придется заменить векторы $\mathbf{r}_k$ их разложениями по осям постоянного направления; это интегрирование определит **u** с точностью до аддитивного постоянного вектора $\mathbf{u}_0$. В окончательном итоге **u** определится с точностью до малого перемещения среды как твердого тела.

Поступила в редакцию 5 XI 1939.

DETERMINATION OF DISPLACEMENTS BY MEANS OF THE TENSOR OF DEFORMATION

A. I. LOURYE

(Summary)

The problem is studied in an arbitrary (non-orthogonal) curvilinear system of coordinates.

The problem is reduced to the integration of the system of the linear equations (15).

The general solution of the corresponding homogeneous system of equations may be written in the form of a scalar product of the constant tensor П of the second order and of the basic vector $\mathbf{r}_s$. Then, in order to solve system (15), a method analogous to the method of variation of the arbitrary constants may be employed. By taking $\mathbf{u}_s$ in form (16) for the determination of П equation (17) will be obtained. The solution of the latter may be written immediately in form (18).

In this way the problem is reduced to the quadrature.

The vector **u** of the displacement will of course be determined with the accuracy of a minute displacement of a rigid body.