АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ

ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА"

INSTITUTE OF MECHANICS

JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 1, 1940

О ПРИМЕНЕНИИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО К ЗАДАЧАМ КРУЧЕНИЯ И ИЗГИБА

Д. З. АВАЗАШВИЛИ

(Тбилиси)

Недавно Х. М. Муштари опубликовал статью [1], в которой, по словам автора, „показывается возможность точного решения классических задач кручения и изгиба изотропных призматических тел для поперечных сечений с одной и двумя осями симметрии". При ближайшем рассмотрении оказывается, как это, впрочем, следует и из самого заглавия статьи, что речь идет о некотором способе получения частных решений элементарным путем [1].

Способ автора заключается в том, что он заранее задается определенным частным видом комплексной функции кручения.

К сожалению, изложение автора не дает никакой возможности получить более или менее точное представление об области применимости его способа. О пользе метода можно было бы судить по приводимым автором примерам. Однако, к сожалению, ни один из примеров автора, относящихся к кручению, не дает ничего нового по отношению к тому, что уже было сделано академиком Н. И. Мусхелишвили, а примеры, относящиеся к изгибу, легко решаются способом Н. И. Мусхелишвили. К статье Х. М. Муштари мы еще вернемся (§ 4), а теперь покажем, как применять способ Н. И. Мусхелишвили к задачам изгиба поперечной силой.

§ 1. Общие формулы, относящиеся к изгибу поперечной силой

Начнем с того, что напомним общеизвестные формулы, относящиеся к изгибу.

Поместим начало координат в центре тяжести сечения S бруса, которое для простоты будем считать односвязным, а оси Ox, Oy направим по главным осям инерции сечения. Пусть поперечная сила W приложена к центру тяжести сечения и параллельна оси $0x$. Если предположим для простоты, что сечение бруса симметрично относительно оси $0x$, тогда будем иметь дело с чистым изгибом.

---

1 Из приведенных выше слов автора можно было бы заключить, что он сомневается в „возможности точного решения" в самом общем случае. Однако, повидимому, это надо отнести за счет неудачной формулировки.

Как известно[1], в этом случае компоненты напряжения определяются из формул:

$$X_x = 0, \qquad Y_y = 0, \qquad X_y = 0,$$

$$X_z = -\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left[\frac{\partial\chi}{\partial x} + \frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right], \tag{1}$$

$$Y_z = -\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left[\frac{\partial\chi}{\partial y} + (2+\sigma)xy\right], \qquad Z_z = -\frac{W(l-z)}{I}x,$$

а смещения, соответствующие этим напряжениям, будут:

$$u = \frac{W}{IE}\left[\frac{1}{2}\sigma(l-z)(x^2-y^2) + \frac{1}{2}lz^2 - \frac{1}{6}z^3\right],$$

$$v = \frac{W}{IE}\sigma(l-z)xy, \tag{2}$$

$$w = -\frac{W}{IE}\left[x\left(lz - \frac{1}{2}z^2\right) + \chi + xy^2\right].$$

В этих формулах l — длина бруса, I — момент инерции сечения относительно оси, проходящей через центр тяжести и параллельной оси Oy, E — модуль Юнга, σ — коэффициент Пуассона, а $\chi(x, y)$ — гармоническая функция в области S, удовлетворяющая на границе области условию:

$$\frac{d\chi}{dn} = -\left[\frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)y^2\right]\cos(n, x) - (2+\sigma)xy\cos(n, y),$$

где n — нормаль.

Если введем гармоническую функцию $\chi_1(x, y)$, сопряженную с $\chi(x, y)$, тогда последняя будет удовлетворять контурному условию[2]

$$\chi_1 = -\left(1 - \frac{1}{2}\sigma\right)\frac{y^3}{3} - \frac{\sigma x^2 y}{2} + 2(1+\sigma)\int xy\,dx + \text{const} \tag{3}$$

на границе области S.

§ 2. Решение задачи изгиба способом конформного отображения

Н. И. Мусхелишвили [2], [3] указал в 1929 г. простой прием, позволяющий элементарно решать задачу кручения для довольно обширного класса сечений[3]. В частности, прием всегда приводит к решению в конечном виде, когда сечение S отображается на круг при помощи рациональных функций.

---

[1] См., например, книгу Н. И. Мусхелишвили „Некоторые основные задачи математической теории упругости“, Л.—М. 2-е изд., § 100, 1935.

[2] Интеграл

$$J = \int xy\,dx,$$

фигурирующий в формуле (3), берется по контуру от какой-либо постоянной точки контура до переменной точки (x, y). Легко видеть, что интеграл, распространенный на весь контур сечения, равен нулю (это вытекает из условия, что начало координат находится в центре тяжести сечения), поэтому J есть однозначная функция точки контура.

[3] Содержание обеих статей воспроизведено в названной выше книге Н. И. Мусхелишвили (§§ 96, 97).

Этот же самый прием применяется и к задаче изгиба поперечной силой. Мы изложим здесь упомянутый прием в применении к последней задаче.

Пусть $G(x+iy)$ голоморфная в S функция комплексной переменной $x+iy$, действительная часть которой равна $\chi(x, y)$.

Пусть

$$x+iy=\omega(\zeta)$$

соотношение, отображающее область S на круг $|\zeta|\leqslant 1$, окружность которого обозначим через Г. Пусть, наконец,

$$F(\zeta)=G[\omega(\zeta)].$$

Тогда действительная часть функции

$$\frac{1}{i}F(\zeta)=\chi_1(x, y)-i\chi(x, y) \tag{4}$$

удовлетворяет на окружности Г контурному условию (t обозначает переменную точку окружности)

$$\chi_1=\left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)\frac{[\omega(t)-\overline{\omega(t)}]^3}{24i}-\frac{\sigma[\omega(t)+\overline{\omega(t)}]^2[\omega(t)-\overline{\omega(t)}]}{16i}+$$

$$+\frac{1+\sigma}{4i}\int[\omega^2(t)-\overline{\omega^2(t)}][\omega'(t)\,dt+\overline{\omega'(t)}\,d\bar{t}], \tag{5}$$

которое вытекает из (3); мы отбросили в правой части произвольную постоянную, не имеющую значения.

Как известно, если f является действительной частью граничного значения функции $\Phi(\zeta)$, аналитической внутри единичного круга Г, то

$$\Phi(\zeta)=\frac{1}{\pi i}\int_{\Gamma}\frac{f\,dt}{t-\zeta}+\text{const.}$$

Если воспользуемся последней формулой и отбросим не имеющее значение постоянное слагаемое, то из граничного условия (5) получим:

$$F(\zeta)=\frac{1-\frac{1}{2}\sigma}{12}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\omega(t)-\overline{\omega(t)}]^3}{t-\zeta}\,dt-\frac{\sigma}{8}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{[\omega(t)+\overline{\omega(t)}]^2[\omega(t)-\overline{\omega(t)}]\,dt}{t-\zeta}+$$

$$+\frac{1+\sigma}{2}\,\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\frac{\int[\omega^2(t)-\overline{\omega^2(t)}][\omega'(t)\,dt+\overline{\omega'(t)}\,d\bar{t}]}{t-\zeta}\,dt. \tag{6}$$

Для вычисления компонентов напряжения можно воспользоваться формулой[1]:

$$T_\rho-iT_\vartheta=\frac{\zeta}{\rho}\,\frac{\omega'(\zeta)}{|\omega'(\zeta)|}(X_z-iY_z). \tag{7}$$

[1] См. цитированную книгу Н. И. Мусхелишвили, § 58, формула (4), а также § 96; там же см. обозначения.

Но так как

$$X_z - iY_z = -\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{\partial\chi}{\partial x} - i\frac{\partial\chi}{\partial y} + \frac{1}{2}\sigma x^2 + \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)y^2 - i(2+\sigma)xy\right\},$$

то

$$X_z - iY_z = -\frac{W}{2(1+\sigma)I}\left\{\frac{F'(\zeta)}{\omega'(\zeta)} + \frac{1}{2}\sigma\left(\frac{\omega+\overline{\omega}}{2}\right)^2 - \left(1-\frac{1}{2}\sigma\right)\left(\frac{\omega-\overline{\omega}}{2}\right)^2 - \right.$$

$$\left. -(2+\sigma)\frac{\omega+\overline{\omega}}{2}\,\frac{\omega-\overline{\omega}}{2}\right\}, \tag{8}$$

после чего (7) примет вид:

$$T_\rho - iT_\vartheta = -\frac{W}{2(1+\sigma)I}\,\zeta\,\frac{F'(\zeta) + \omega'(\zeta)\left[\left(\frac{1}{4}+\frac{\sigma}{2}\right)\overline{\omega}^2 + \frac{1}{2}\omega\overline{\omega} - \frac{3}{4}\omega^2\right]}{\rho\,|\,\omega'(\zeta)\,|}. \tag{9}$$

Разделяя в последней формуле действительную и мнимую части, найдем компоненты T_ρ и T_ϑ; компонента Z_z вычисляется непосредственно по последней из формул (1).

В частности, если $\omega(\zeta)$ — рациональная функция, то, как легко видеть, решение представится в конечном виде при помощи элементарных функций.

§ 3. Пример: эпитрохоидальное сечение

Приведем простой пример. Пусть сечение S ограничено эпитрохоидой, параметрическое представление которой есть

$$x = b(\cos\vartheta + a\cos n\vartheta), \quad y = b(\sin\vartheta + a\sin n\vartheta), \tag{10}$$

где целое число $n > 2$, $b > 0$ и $0 \leq a \leq 1/n$.

В этом случае

$$\omega(\zeta) = b(\zeta + a\zeta^n). \tag{11}$$

Заменяя $\omega(\zeta)$ в формуле (6) через $b(\zeta + a\zeta^n)$, а $\overline{t}$ через $1/t$, после простых вычислений получим[1]:

$$F(\zeta) = -\frac{b^3[2\sigma+3+2a^2+4a^2n(1+\sigma)]}{4}\zeta + \frac{b^3}{4}\zeta^3 -$$

$$-\frac{b^3a[2n\sigma+n+2]}{4(n-2)}\zeta^{n-2} - \frac{b^3a[4\sigma+4+2n+(2\sigma+3)na^2]}{4n}\zeta^n +$$

$$+\frac{3b^3a}{4}\zeta^{n+2} - \frac{b^3a^2\left(n+\sigma+\frac{1}{2}\right)}{2(2n-1)}\zeta^{2n-1} + \frac{3b^3a^2}{4}\zeta^{2n+1} + \frac{a^3b^3}{4}\zeta^{3n}. \tag{12}$$

Подставляя это значение в формулу (9), полагая

$$\zeta = \rho e^{i\vartheta}$$

и разделяя действительную и мнимую части, легко получаем выражения для T_ρ и T_ϑ, которые считаем излишним выписывать.

При $n = 2$ (улитка Паскаля) решение получается еще проще. Следует только учесть, что в этом случае центр тяжести не совпадает с началом. Поэтому надо начать с переноса начала в центр тяжести.

---

[1] Это выражение для $F(\zeta)$ полностью совпадает с функцией, построенной другим методом А. К. Рухадзе [4], если применить формулы А. К. Рухадзе к частному случаю одинаковых материалов.

§ 4. Некоторые замечания относительно примеров Х. М. Муштари

В цитированной выше работе Х. М. Муштари рассматривает следующие примеры (решенные им, как он указывает, в 1933 г.).

1°. Кручение цилиндра с поперечным сечением, ограниченным лемнискатой Booth.

2°. Кручение цилиндра с поперечным сечением, контур которогодаетс я уравнением:

$$\rho = a + b + b \cos \varphi \quad (0 \leqslant \varphi \leqslant 2\pi).$$

3°. Решение задачи изгиба для сечения синусоидального кулака, в частности для кардиоиды.

4°. Решение задачи изгиба для сечения, ограниченного лемнискатой Booth.

Задача 1°, как отмечает сам автор, была решена (в качестве примера) Н. И. Мусхелишвили, но не в 1933 г., как это кажется автору, а в 1929 г.[1] в названных выше статьях.

Задачу 2° также нельзя считать новой, так как контур сечения есть уравнение улитки Паскаля в полярных координатах[2], чего автор, как это ни странно, видимо, не замечает, ибо в противном случае он бы увидел, что задача 2° есть частный случай примера, приводимого Н. И. Мусхелишвили в той самой книге (и в том же самом параграфе), которую цитирует сам Х. М. Муштари (Н. И. Мусхелишвили дает решение для случая эпитрохоиды; при $n=2$ получается улитка Паскаля).

Переходим к задаче 3°. Здесь впервые автор дает название (контур „сечения синусоидального кулака") кривой задачи 2°, фигурировавшей там без специального названия, которая, как мы уже указали, есть попросту улитка Паскаля. Таким образом задача 3° представляет собой частный случай примера, решенного нами в предыдущем параграфе.

Задача 4° также весьма просто решается указанным выше приемом.

Поступила в редакцию 10 V 1939.

Тбилисский математический институт
грузинского филиала Академии Наук СССР
15/I 1939 г.

ЛИТЕРАТУРА

1. Муштари Х. М. Об одном способе получения некоторых результатов в решении задач Сан-Венана о кручении и о поперечном изгибе призматических тел. „Прикладная математика и механика", новая серия. 1938. Т. I. Вып. 4. [Стр. 427—440].
2. Mouskhelichvili N. Sur le problème de torsion etc. „Rendiconti Lincei". 6 ser. 1929. Vol. IX. [P. 295].
3. Muskhelischwili N. Zum Problem der Torsion. „Изв. Тифл. политехнич. инст." 1929. Т. I. [Стр. 1].
4. Рухадзе А. К. Кручение и изгиб поперечной силой упругого бруса, составленного из двух различных материалов, ограниченных эпитрохоидами. „Труды Тбилисского мат. инст.". 1937. Т. I.

[1] Х. М. Муштари цитирует первое издание названной выше книги Н. И. Мусхелишвили, вышедшее в 1933 г. В этой книге в соответствующем месте имеется вполне определенная ссылка на статьи 1929 г.

[2] Если взять обычное параметрическое представление улитки Паскаля [см. выше формула (10) при $n=2$]

$$x = B(\cos \vartheta + A \cos 2\vartheta),$$

$$y = B(\sin \vartheta + A \sin 2\vartheta),$$

положить

$$A = b/[2(a+b)], \quad B = a + b,$$

перенести начало координат в точку $(-b/2, 0)$ и перейти к полярным координатам, то получится уравнение, приведенное в тексте.

UEBER DIE ANWENDUNG DER THEORIE DER FUNKTIONEN EINER KOMPLEXEN VERÄNDERLICHEN AUF DIE AUFGABEN DER TORSION UND DER BIEGUNG

D. S. AVASASCHWILI

(Zusammenfassung)

N. Muschelischwili (Mouskhelichvili) hat eine Methode zur Lösung der Torsionsaufgabe für einige Querschnitte spezieller Art gegeben [2], [3]. Der Verfasser wendet dieselbe Methode auf das Problem der Biegung mit einer Querkraft an und macht eine Reihe kriitischer Bemerkungen in Bezug auf einen Artikel von Mushtary[1].