

Т. IV, в. 1, 1940

К КИНЕМАТИКЕ СФЕРИЧЕСКИХ МЕХАНИЗМОВ

Я. Б. ШОР

(Москва)

Графической кинематике сферических механизмов посвящен ряд работ. Упомянем здесь некоторые из них.

В 1928—1929 гг. появились работы К. Federhofer^[5], в которых дано решение некоторых сферических механизмов по методу изображений Майора-Мизеса. И. И. Артоболевский^[1] в своих работах 1936—1937 гг. предложил графические методы решения задач кинематики сферических механизмов средствами начертательной геометрии. В 1939 г. Б. В. Добровольский^[2] предложил использовать стереографическую проекцию для изображения сферического механизма на плоскости и для решения задач статики и кинематики сферических механизмов. Наконец, в работе^[4] автора настоящей статьи также указаны некоторые графические приемы кинематического исследования сферических механизмов¹.

Следует отметить, что методы, изложенные во всех вышеуказанных работах, требуют значительно более сложных графических построений, чем методы кинематики плоских механизмов. В связи с этим представляется интересной возможность сведения задачи кинематики сферического механизма к аналогичной задаче для плоского механизма. Ниже излагается простой способ, при помощи которого легко осуществляется это сведение.

§ 1. Предварительные замечания

Пусть дан пучок сходящихся в точке P скользящих векторов $\mathbf{a}_0, \mathbf{a}_1, \dots, \mathbf{a}_n$, причем вектор \mathbf{a}_0 равен геометрической сумме векторов $\mathbf{a}_1, \mathbf{a}_2, \dots, \mathbf{a}_n$ (Фиг. 1). Пересечем этот пучок произвольной плоскостью π и разложим данные векторы в точках A_0, A_1, \dots, A_n пересечения с этой плоскостью на составляющие

¹ После того как эта работа была сдана в печать, проф. И. Н. Артоболевский любезно указал мне на работу Штейна (K. Stein, *Bewegungsverhältnisse am sphärischen Kurbetrieb*. «Maschinenbau», 1939, № 3-4), в которой задача о скоростях сферического механизма также приводится к задаче о плоском механизме. Однако метод, предлагаемый Штейном, пригоден лишь для четырехзвенных механизмов и не может быть обобщен на более сложные механизмы.

$\mathbf{a}_0', \mathbf{a}_1', \dots, \mathbf{a}_n'$, перпендикулярные к плоскости π и составляющие $\mathbf{a}_0'', \mathbf{a}_1'', \dots, \mathbf{a}_n''$, параллельные этой плоскости.

Рассмотрим отдельно систему векторов $\mathbf{a}_0', \mathbf{a}_1', \dots, \mathbf{a}_n'$. Очевидно, что вектор \mathbf{a}_0' является равнодействующим системы $\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \dots, \mathbf{a}_n'$. Это значит, что

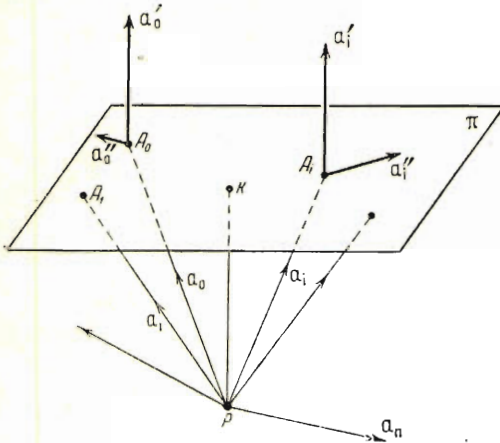
$$\mathbf{a}_0' = \mathbf{a}_1' + \mathbf{a}_2' + \dots + \mathbf{a}_n'$$

и для произвольной точки O

$$\mathbf{m}_0(\mathbf{a}_0') = \mathbf{m}_0(\mathbf{a}_1') + \dots + \mathbf{m}_0(\mathbf{a}_n'),$$

где $\bar{\mathbf{m}}_0(\mathbf{a}_i')$ — момент вектора \mathbf{a}_i' вокруг O .

Если один из векторов, например, вектор \mathbf{a}_n , параллелен плоскости π , то, перенося его параллельно в эту плоскость, мы получим присоединенную пару, момент m_n которой лежит в плоскости π , перпендикулярен к вектору \mathbf{a}_n и численно равен произведению вектора \mathbf{a}_n на расстояние PK



Фиг. 1.

точки P от плоскости π . В этом случае вектор \mathbf{a}_0' будет эквивалентным системе, состоящей из векторов $\mathbf{a}_1', \mathbf{a}_2', \dots, \mathbf{a}_{n-1}'$ и пары m_n .

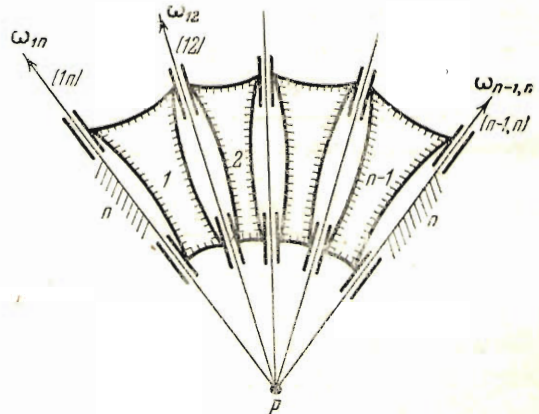
§ 2. Основная теорема

Пусть дана простая замкнутая сферическая шарнирная цепь, т. е. цепь, состоящая из звеньев, последовательно соединенных друг с другом при помощи цилиндрических шарниров, оси которых пересекаются в одной точке (фиг. 2). Пусть звено n неподвижно (стойка). Тогда для относительных угловых скоростей звеньев справедливо соотношение:

$$\omega_{1n} = \omega_{12} + \omega_{23} + \dots + \omega_{n-1, n},$$

где ω_{ik} — угловая скорость звена i относительно звена k , направленная по оси (ik) шарнира, связывающего звенья i и k .

Пересечем пучок этих векторов угловых скоростей произвольной плоскостью π . Если теперь в точках пересечения $A_{1n}, A_{12}, A_{23}, \dots, A_{n-1, n}$ приложить составляющие $\omega'_{1n}, \omega'_{12}, \dots, \omega'_{n-1, n}$, перпендикулярные к плоскости π , то будем иметь:



Фиг. 2.

Пересечем пучок этих векторов угловых скоростей произвольной плоскостью π . Если теперь в точках пересечения $A_{1n}, A_{12}, A_{23}, \dots, A_{n-1, n}$ приложить составляющие $\omega'_{1n}, \omega'_{12}, \dots, \omega'_{n-1, n}$, перпендикулярные к плоскости π , то будем иметь:

$$\omega'_{1n} = \omega'_{12} + \dots + \omega'_{n-1, n},$$

$$\mathbf{m}_0(\omega'_{1n}) = \mathbf{m}_0(\omega'_{12}) + \dots + \mathbf{m}_0(\omega'_{n-1, n}). \quad (1)$$

Представим себе теперь в плоскости π простую замкнутую плоскую шарнирную цепь, состоящую из n звеньев 1, 2, ..., n , соединенных между собой шарнирами в точках $A_{1n}, A_{12}, \dots, A_{n-1, n}$, причем звено n неподвижно (фиг. 3). Тогда для относительных угловых скоростей $\omega_{1n}^*, \omega_{12}^*, \dots, \omega_{n-1, n}^*$ этой плоской цепи будут выполняться условия:

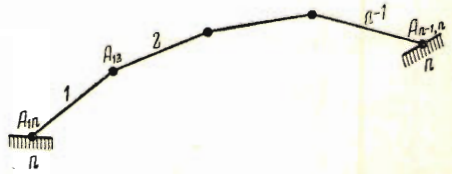
$$\begin{aligned} \omega_{1n}^* &= \omega_{12}^* + \dots + \omega_{n-1, n}^*, \\ m_0(\omega_{1n}^*) &= m_0(\omega_{12}^*) + \dots + m_0(\omega_{n-1, n}^*). \end{aligned} \tag{2}$$

Поэтому, если для построенной плоской цепи взять

$$\omega_{1n}^* = \omega_{1n},$$

то системы векторов $\{\omega_{12}^*, \omega_{23}^*, \dots, \omega_{n-1, n}^*\}$ и $\{\omega'_{12}, \omega'_{23}, \dots, \omega'_{n-1, n}\}$ будут эквивалентны (в смысле эквивалентности систем скользящих векторов).

Пусть дан теперь произвольный сферический шарнирный механизм, состоящий из n звеньев. Пересечем оси его шарниров произвольной плоскостью π и построим вспомогательный плоский механизм, у которого:



Фиг. 3.

1) шарниры находятся в точках пересечения осей данного сферического механизма с плоскостью π ,

2) звеньями являются сечения звеньев данного механизма плоскостью π ,

3) стойкой является сечение неподвижного звена данного механизма плоскостью π .

Пусть для данного сферического механизма задана угловая скорость ω_{1n} звена 1 относительно стойки n . Зададимся во вспомогательном плоском механизме угловой скоростью ω_{1n}^* , равной перпендикулярной к плоскости π составляющей ω'_{1n} заданной скорости ω_{1n} . Тогда для каждой простой кинематической цепи, входящей в состав данного сферического механизма, и для соответствующей простой цепи вспомогательного плоского механизма системы векторов ω'_{ik} и ω_{ik}^* будут эквивалентны. Покажем, что соответственные угловые скорости в обоих механизмах будут равны между собой, т. е. что

$$\omega_{ik}^* = \omega'_{ik}$$

для всех i и k .

Как известно (см., например, ^[3]), в каждом n -звенном сферическом или плоском механизме можно выделить $\nu = \frac{n-2}{2}$ простых замкнутых цепей, имеющих общий шарнир ($1n$), охватывающих все шарниры данного механизма и отличающихся друг от друга по крайней мере одним шарниром. Для каждой такой простой цепи можно записать два векторных уравнения вида (1) или (2) или три эквивалентных скалярных уравнения. Всего для определения угловых скоростей n -звенного механизма мы будем иметь

$$3\nu = \frac{3(n-2)}{2}$$

скалярных уравнений. С другой стороны, число неизвестных угловых скоростей будет на единицу меньше числа p шарниров в механизме, так как одна угловая скорость задана. Но по формуле Грюблера

$$p = \frac{3n - 4}{2},$$

откуда следует, что

$$p - 1 = 3v,$$

т. е. что системы уравнений (1) и (2), записанных для всех цепей, достаточны для определения всех угловых скоростей. Но тогда из условия

$$\omega_{1n}^* = \omega'_{1n}$$

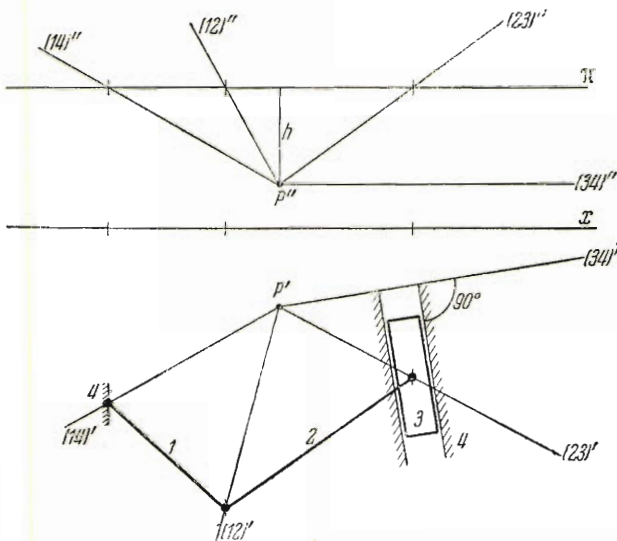
следует, что из уравнений (1) и (2) вследствие равенства левых частей получатся одинаковые системы значений для ω'_{ik} и ω_{ik}^* .

Этим доказана основная теорема: если задать угловую скорость ведущего звена вспомогательного плоского механизма равной перпендикулярной к плоскости π составляющей угловой скорости

ведущего звена сферического механизма, то угловая скорость в любом шарнире вспомогательного механизма будет равна перпендикулярной составляющей, соответствующей угловой скорости сферического механизма.

Значение этой теоремы заключается в том, что она позволяет свести задачу определения скоростей как угодно сложного сферического механизма к аналогичной, но значительно более простой задаче о плоском механизме.

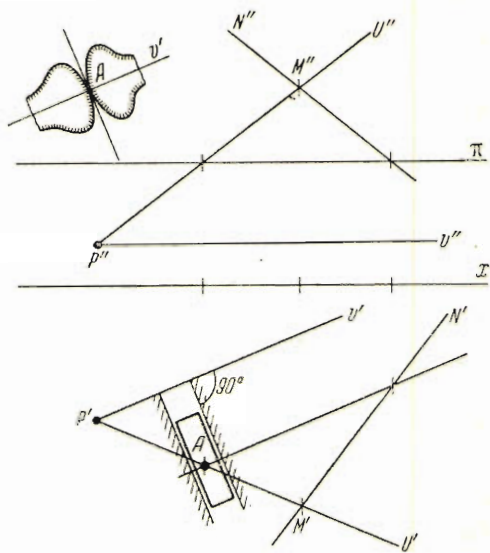
Если одна из осей сферического механизма, например, ось (kj) , параллельна плоскости π , то согласно изложенному в § 1 и в силу статических аналогий в этом случае во вспомогательном плоском механизме вместо шарнира A_{kj} будет поступательная пара $\{k, j\}$, в которой направление относительной линейной скорости будет перпендикулярно к оси (kj) . Величина этой скорости будет равна произведению $h \cdot \omega_{kj}$, где h — расстояние точки P от плоскости π . На фиг. 4 показано построение вспомогательного плоского механизма для четырехзвенного сферического механизма, оси (1, 4), (1, 2), (2, 3) и (3, 4) которого заданы в проекциях по Монжу, причем ось (3, 4) параллельна плоскости π (плоскость π проведена параллельно горизонтальной плоскости проекций).



Фиг. 4.

Рассмотрим еще случай, когда в сферическом механизме наряду с шарнирами имеется и высшая пара — пара качения-скольжения, образованная двумя соприкасающимися криволинейными профилями. Покажем, как построить соответствующую кинематическую пару во вспомогательном плоском механизме.

Пусть заданы в проекциях по Монжу точка M касания обоих профилей, ось u , проведенная через центр P и точку M , и общая нормаль N к профилям в точке M (фиг. 5). Очевидно, что мгновенная ось относительного движения профилей пройдет через точку P и будет лежать в плоскости (u, N) , проведенной через прямые u и N . Поэтому угловую скорость относительного движения профилей можно в точке P разложить на две составляющие по направлениям осей u и v , где ось v проведена через точку P параллельно линии пересечения плоскости π и (u, N) . Тогда угловая скорость, идущая по оси u , даст шарнир в точке A пересечения оси u с плоскостью π , а угловая скорость, направленная по оси v , — поступательную пару, ось которой перпендикулярна к прямой v' . Эту комбинацию шарнира и поступательной пары можно заменить одной высшей парой, у которой точка касания совпадает с точкой A , а нормаль к соприкасающимся профилям имеет направление прямой v' (см. фиг. 5 слева).



Фиг. 5.

§ 3. Пример

Проиллюстрируем метод на одном примере.

На фиг. 6 изображен сферический шестизвенный механизм 123456 в двух проекциях по Монжу. Задана угловая скорость ω_{16} звена 1 относительно стойки 6. Требуется определить ω_{46} . Решение ведется следующим образом. Проводим горизонтальную плоскость π и определяем ее точки пересечения с осями шарниров. Пусть горизонтальные проекции этих точек будут A, B, C, D, E, F и G . Строим теперь в горизонтальной плоскости вспомогательный механизм, шарниры которого находятся в найденных точках. Так как точки $A(1, 6)$, $B(1, 2)$ и $C(1, 5)$ принадлежат одному звену 1 сферического механизма, то, соединив жестко A, B и C , мы образуем звено 1 вспомогательного плоского механизма. Аналогично точки $D(2, 3)$, $E(5, 3)$ и $F(3, 4)$ образуют звено 3, точки $B(1, 2)$ и $D(2, 3)$ образуют звено 2, точки $C(1, 5)$ и $E(5, 3)$ образуют звено 5 и, наконец, точки $F(3, 4)$ и $G(4, 6)$ образуют звено 4.

Зададимся теперь угловой скоростью ω_{16}^* звена 1, равной вертикальной составляющей ω_{16}^v заданной скорости ω_{16} , и определим скорости звеньев

вспомогательного плоского механизма. Скорости точек B и C легко строятся по формулам:

$$v_B = \frac{\omega_{16}^v \cdot AB}{c}, \quad v_C = \frac{\omega_{16}^v \cdot AC}{c},$$

где c — масштабная постоянная. Для простоты берем $c = \omega_{16}^v$ и тогда получаем $v_B = AB$ и $v_C = AC$. Строим теперь план повернутых скоростей механизма,

используя точку Ассура K звена 3. Скорость точки F определится на плане скоростей отрезком gf .

Из равенства

$$v_F = \frac{\omega_{46}^* \cdot FG}{c}$$

и сравнения направления вращений звеньев 1 и 4 следует, что

$$\omega_{46}^* = + \frac{c \cdot gf}{GF}.$$

Таким образом величина скорости ω_{46}^* может быть легко построена, после чего нетрудно построить проекция ω_{46}' и ω_{46}'' искомого вектора ω_{46} .

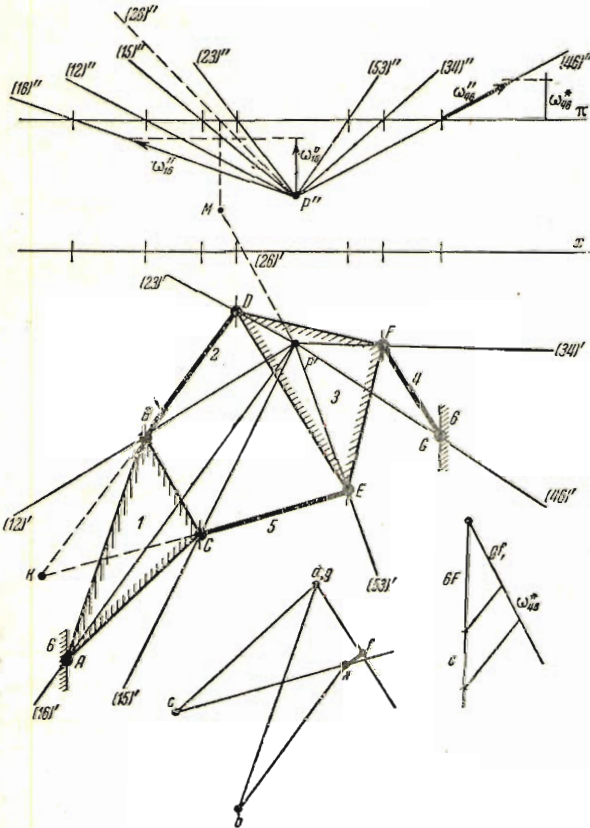
Нетрудно указать теперь простой способ построения мгновенной оси вращения любого звена сферического механизма. Пусть требуется, например, определить мгновенную ось (26) звена (2). Для этого находим в горизонтальной плоскости мгновенный центр M звена 2 вспомогательного простого механизма.

Очевидно, что прямая PM будет горизонтальной проекцией (26)' искомой мгновенной оси (26), а вертикальная проекция (26)'' этой оси легко находится из условия, что точка M является горизонтальной проекцией точки пересечения оси (26) с плоскостью π . Таким образом оказывается возможным весьма просто применить теоремы Аронгольда и Роденберга о мгновенных центрах плоских механизмов к разысканию мгновенных осей сферических механизмов.

§ 4. Заключение

Интересно указать на возможность другого пути обоснования метода, изложенного в § 2.

Пусть дан в пространстве вектор R с проекциями X, Y и Z на оси координат.



Фиг. 6.

Изобразим его на картинной плоскости π при помощи точки M с координатами x , y и „весом“ p согласно формулам:

$$x = \frac{cX}{Z}, \quad y = \frac{cY}{Z}, \quad p = Z,$$

где c — постоянная изображения.

Нетрудно убедиться в справедливости следующих свойств этого изображения.

1. Все векторы, параллельные одной и той же прямой, изображаются при помощи одной и той же точки, так что эту точку можно считать изображением направления данной прямой.

2. Если векторы R_0, R_1, \dots, R_n связаны зависимостью

$$R_0 = R_1 + R_2 + \dots + R_n,$$

то их веса связаны зависимостью

$$p = p_1 + p_2 + \dots + p_n,$$

а точка M является центром тяжести системы точек M_1, M_2, \dots, M_n .

Пусть дан сферический механизм. Отобразим его на плоскость по этому методу. Тогда каждая ось механизма изобразится одной точкой. Если эти точки принять за шарниры плоского механизма, то мы сможем получить основную теорему, повторяя рассуждения § 2.

Отметим еще, что указанное здесь отображение на плоскость отличается от отображения Прагера только поворотом на прямой угол вокруг центра картинной плоскости.

В заключение отметим еще, что изложенный здесь метод определения скоростей сферических механизмов может быть распространен на определение их ускорений. Это мы рассчитываем сделать в отдельной статье.

Поступила в редакцию 25 X 1939.

Институт механики.
Акад. Наук Союза ССР

ЛИТЕРАТУРА

1. Артоблевский И. И. Сложные сферические механизмы. „Вестник инженеров и техников“. 1936. № 10.
2. Артоблевский И. И. Теория пространственных механизмов. 1937. Ч. 1.
3. Добровольский В. В. Новая теория сферических механизмов. „Труды Московского станко-инструментального института“. 1939. Вып. VI.
3. Сомов П. О степенях свободы кинематической цепи. „Журнал русского физико-химического общества“. 1887.
4. Шор Я. Б. Графические методы в статике и кинематике сложных пространственных систем. „Успехи математических наук“. Вып. VII (печатается).
5. Federhofer K. Graphische Kinematik und Kinetostatik des starren räumlichen Systems. Wien, 1928.
- Federhofer K. Graphische Kinematik der Talmelscheibe. ZAMM. 1929

KINEMATICS OF SPHERICAL MECHANISMS**J. B. SHOR**

(Summary)

To determine the velocities of complicated spherical mechanisms the present work proposes the graphical procedure based on the following theorem:

If the axes of the joints of a spherical mechanism are intersected by an arbitrary plane π and the points of intersection are taken as the joints of a corresponding plane mechanism, then the angular velocities of the joints of this plane mechanism will be proportional to those components of the corresponding angular velocities of the given spherical mechanism which are perpendicular to the plane π .

The method may be generalized to include higher kinematical pairs.
