АКАДЕМИЯ НАУК СССР
USSR ACADEMY OF SCIENCES

ИНСТИТУТ МЕХАНИКИ
ЖУРНАЛ „ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА“

INSTITUTE OF MECHANICS
JOURNAL OF APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. IV, в. 1, 1940

ОБ УПРУГИХ ДЕФОРМАЦИЯХ В КАНАТЕ ПРИ ОПУСКАНИИ ГРУЗА

Н. П. НЕРОНОВ

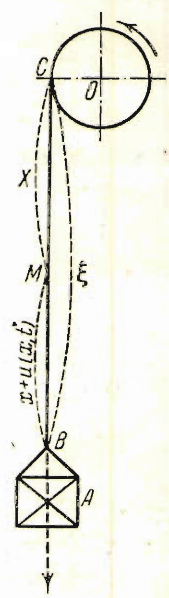
(Ленинград)

Рассматриваемая задача математической физики состоит в определении упругой деформации, а следовательно, и натяжения во всех точках подъемного каната. Случай подъема груза изучался автором раньше, как и случай опускания, но последний без учета массы и веса каната [1], [2], [3], [4]. В настоящей работе исследуется случай опускания груза, принимая во внимание массу и вес каната.

Полученные результаты показывают, что при опускании груза в канате возникают продольные упругие колебания, которые сопровождаются разрывом непрерывности того или другого порядка.

§ **1.** Считая высоту опускания произвольно большой, будем учитывать как массу, так и вес каната. Поперечными размерами последнего обычно пренебрегают. Поэтому рассматриваем его как упругую нить и ограничимся случаем каната постоянного сечения.

Груз A подвешен в точке B к канату, навитому на барабан, вращающийся вокруг неподвижной горизонтальной оси O (фиг. 1). Движение тела A предполагается поступательным и вертикальным.



Фиг. 1.

Для какой-либо точки M каната ее расстояние MB от конца B равно сумме двух слагаемых: первое x выражает нормальную (т. е. при отсутствии сил) длину рассматриваемой части MB каната, а второе $u(x, t)$ — ее деформацию (удлинение), являющуюся функцией переменных x и времени t.

Предполагая, что имеет место закон Гука, можно написать следующее выражение для величины силы упругости (натяжения) T каната в точке M:

$$T = k\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}, \tag{1}$$

где k обозначает некоторую положительную постоянную, имеющую для данного каната определенное численное значение, а производная — относительное удлинение в точке M.

Начало координат помещаем в точке C схода каната с барабана, а координатную ось направляем вертикально вниз. Обозначим координаты точек M и B соответственно через X и ξ (фиг. 1). Имеем:

$$X = \xi - x - u(x,\ t). \tag{2}$$

Ускорение точки M

$$\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}.$$

Дифференциальное уравнение движения каната в точке M

$$\rho\,\frac{\partial^2 X}{\partial t^2} = \rho g - \frac{\partial T}{\partial x}, \tag{3}$$

где ρ обозначает массу единицы длины каната, а g — ускорение свободного падения, после подстановки выражений $\frac{\partial^2 X}{\partial t^2}$ и $\frac{\partial T}{\partial x}$ примет вид:

$$\rho\left[\frac{\partial^2 \xi}{\partial t^2} - \frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial t^2}\right] = \rho g - k\,\frac{\partial^2 u(x,\ t)}{\partial x^2}.$$

Присоединяя к последнему уравнению дифференциальное уравнение движения груза

$$m\,\frac{d^2 \xi}{dt^2} = mg - k\,\frac{\partial u(x,\ t)}{\partial x}\bigg|_{x=0} \tag{4}$$

(где m — масса груза), из полученной системы уравнений исключаем $\frac{d^2\xi}{dt^2}$.

Таким образом неизвестная функция $u(x, t)$ должна удовлетворять уравнению в частных производных волнового типа:

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} = c^2\,\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} - b\,\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}, \tag{5}$$

где

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad b = \frac{k}{m}. \tag{6}$$

Общий интеграл предыдущего уравнения может быть представлен в виде:

$$u(x,t) = \varphi'(x+ct) + \psi'(x-ct) - \frac{b}{c^2}\left[\varphi(ct) + \psi(-ct)\right], \tag{7}$$

где φ и ψ обозначают произвольные функции соответствующих аргументов, а φ' и ψ' их производные.

Функции φ и ψ определяются при помощи начальных и пограничных условий. Начальные условия таковы:

$$u(x,t)\big|_{t=0} = f_1(x), \qquad \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{t=0} = f_2(x) \tag{8}$$

для значений переменного x, заключающихся в интервале

$$0 \leqslant x \leqslant l_0,$$

где l_0 обозначает нормальную длину вертикальной части BC каната (фиг. 1) в начальный момент времени $t=0$ рассматриваемого движения. Функции $f_1(x)$ и $f_2(x)$ предполагаются непрерывными и имеющими столько непрерывных производных, сколько потребуется обстоятельствами вычислений. Рассматривая разрывы непрерывности второго порядка, мы должны считать непрерывными сами функции $f_1(x)$, $f_2(x)$, а также производную $f_1'(x)$.

Сделаем еще следующее замечание. В силу первого пограничного условия, относящегося к точке B:

$$u(x, t)|_{x=0} = 0, \tag{8}$$

и сохраняющего силу при всяком значении t, имеем равенства:

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0. \tag{10}$$

Переходим ко второму пограничному условию, относящемуся к точке C. Предполагая отсутствие скольжения каната по барабану, выделим на последнем в некоторой точке N элемент каната длины $d\sigma$, находящийся в деформированном (растянутом) состоянии. Пусть ему соответствуют нормальная длина dl и относительное удлинение $\varepsilon(\sigma)$, являющееся заданной функцией длины σ части каната, заключенной между элементом каната в точке C_0 и рассматриваемым элементом в точке N. Положение первого элемента определяется условием, что в начальный момент времени $t=0$ он занимает положение C, совпадающее с верхним концом вертикальной части BC каната. Имеем:

$$dl = \frac{d\sigma}{1 + \varepsilon(\sigma)}. \tag{11}$$

Далее обозначим через s, $s = s(t)$, длину дуги поворота точки барабана отсчитываемую от ее начального положения при $t=0$, и через $v(t)$ линейную скорость этой точки. При этом мы рассматриваем $v(t)$ как заданную функцию времени.

Имеем:

$$v(t) = \frac{ds(t)}{dt}, \qquad s = s(t) = \int_0 v(t)\,dt. \tag{12}$$

Применяем уравнение (11) к элементу каната в точке C, полагая $\sigma = s$, и переписываем его в следующем виде:

$$\frac{dl}{dt} = \frac{\frac{ds}{dt}}{1 + \varepsilon(s)}, \quad \text{или} \quad \frac{dl}{dt} = \frac{v(t)}{1 + \varepsilon(s)}. \tag{13}$$

Сделаем обычное в теории упругости предположение о малости относительного удлинения $\varepsilon(s)$. Тогда последнее равенство может быть приближенно заменено следующим:

$$\frac{dl}{dt} = v(t). \tag{14}$$

Отсюда путем интегрирования находим значение l нормальной длины вертикальной части BC каната в произвольный момент времени:

$$l = l_0 + \int_0^t v(t)\,dt = l_0 + s(t), \tag{15}$$

где l_0 сохраняет прежнее значение.

Возвращаемся ко второму пограничному условию, относящемуся к точке C, для которой

$$X=0, \quad x=l.$$

Применяем уравнение (2) к точке C:

$$\xi - l - u(x, t)\big|_{x=l} = 0. \tag{16}$$

Дифференцируем последнее уравнение два раза по t:

$$\frac{d\xi}{dt} = \frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\bigg|_{x=l} + \frac{dl}{dt}\left[1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=l}\right], \tag{17}$$

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = \frac{d^2 l}{dt^2}\left[1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=l}\right] + 2\,\frac{dl}{dt}\,\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x\,\partial t}\bigg|_{x=l} +$$
$$+\left(\frac{dl}{dt}\right)^2 \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=l} + \frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2}\bigg|_{x=l}. \tag{18}$$

С другой стороны, дифференцирование соотношения (13), в котором функция $\varepsilon(s)$ характеризует закон изменения относительного удлинения для части каната, навитой на барабан, дает:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = \frac{[1+\varepsilon(s)]\,v'(t) - v^2(t)\,\varepsilon'(s)}{[1+\varepsilon(s)]^2}, \tag{19}$$

где

$$v'(t) = \frac{dv(t)}{dt}, \qquad \varepsilon'(s) = \frac{d\varepsilon(\sigma)}{d\sigma}\bigg|_{\sigma=s}.$$

Имея в виду приложение теории, главным образом, к вопросам шахтного подъема, сохраняем сделанное ранее предположение о малости относительного удлинения $\varepsilon(s)$. Благодаря этому уравнение (19) может быть заменено следующим:

$$\frac{d^2 l}{dt^2} = v'(t) - v^2(t)\,\varepsilon'(s). \tag{20}$$

Наконец, из уравнения (4) имеем:

$$\frac{d^2\xi}{dt^2} = g - b\,\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=0}. \tag{21}$$

На основании равенств (14), (20), (21) вносим значения $\frac{dl}{dt}$, $\frac{d^2 l}{dt^2}$, $\frac{d^2\xi}{dt^2}$ в уравнение (18).

Удерживая прежнее предположение о малости относительного удлинения $\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}$, будем иметь:

$$[c^2 + v^2(t)]\,\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\bigg|_{x=l} + 2v(t)\,\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x\,\partial t}\bigg|_{x=l} = g - v'(t) + v^2(t)\,\varepsilon'(s), \tag{22}$$

если принять во внимание уравнение (5).

Полученное нами уравнение (22) и представляет искомое второе пограничное условие.

Завися от вида функции $\varepsilon(s)$, это последнее существенно отличается от аналогичного условия при подъеме груза. В период подъема элементы каната, навиваясь на барабан, выключаются из системы, состоящей из вертикальной части каната с грузом на конце.

Наоборот, при опускании груза элементы каната, находившиеся ранее на барабане, включаются в рассматриваемую систему. Поэтому движение последней будет зависеть от состояния, в котором ранее находились вновь включенные элементы каната, другими словами, от вида функции $\varepsilon(s)$.

Функция $\varepsilon(s)$ определяется предшествующим опусканию периодом поднятия груза и имеет, вообще говоря, довольно сложный вид. Поэтому мы предпочитаем задавать ее полиномом [4].

Итак, поставленная нами задача приведена к решению дифференциального уравнения (5) в частных производных при начальных и пограничных условиях, выражающихся равенствами (8), (9), (22).

Дальнейший ход исследования, различаясь в деталях, представляет много общего со случаем подъема, для которого соответствующие вычисления уже выполнены.

§ **2.** Во всем предыдущем функция $\varepsilon(s)$ считалась произвольно заданной. В силу произвольного задания этой функции элементы части каната, навитой на барабан, переходя через положение C, претерпевают удар в момент их включения в вертикальную часть BC каната, так как относительное удлинение и скорость этих элементов, вообще говоря, не совпадают соответственно с относительным удлинением и скоростью части BC каната в точке C. Заметим здесь, что значения скоростей отличаются друг от друга, как это следует из дальнейшего, на малую величину порядка относительного удлинения.

Можно поставить вопрос о том, когда явление удара не будет иметь место. В этом случае функция $\varepsilon(s)$ должна удовлетворять специальному условию

$$\varepsilon(s) = \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=l}. \tag{23}$$

Покажем, что при выполнении указанного выше условия скорость верхнего конца C вертикальной части каната совпадает со скоростью вновь включаемых элементов, т. е. равна $v(t)$. В самом деле, дифференцируем уравнение (2) по времени t

$$\frac{\partial X}{\partial t} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}$$

и полагаем затем в уравнении (2) и выше написанном

$$X = 0, \qquad x = l.$$

Имеем:

$$\xi - l - u(x, t)\Big|_{x=l} = 0, \qquad \frac{\partial X}{\partial t}\bigg|_{x=l} = \frac{d\xi}{dt} - \frac{\partial u(x,t)}{\partial t}\bigg|_{x=l}.$$

Исключаем ξ из последней системы уравнений:

$$\frac{\partial X}{\partial t}\bigg|_{x=l} = \left(1 + \frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\bigg|_{x=l}\right)\frac{dl}{dt}.$$

Наконец, принимая во внимание равенства (13) и (23), находим:

$$\left.\frac{\partial X}{\partial t}\right|_{x=l} = v(t).$$

Итак, при специальном виде функции $\varepsilon(s)$ процесс включения новых элементов в вертикальную часть каната при опускании груза происходит без ударов, т. е. эти элементы после включения сохранят и свою скорость и свое относительное удлинение. В этом случае после внесения соответствующего значения функции $\varepsilon(s)$ второе пограничное условие (22) принимает вид:

$$\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} + v(t)\left.\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x\,\partial t}\right|_{x=l} = g - v'(t). \tag{24}$$

Полученная нами форма второго пограничного условия тождественна с найденной ранее формой, соответствующей случаю поднятия груза[2]. При поднятии груза $v(t) \leqslant 0$, напротив, при опускании $v(t) \geqslant 0$.

Мы видим, таким образом, что задачи опускания и поднятия груза приводят, вообще говоря, к различным формам второго пограничного условия. Совпадение этих форм имеет место лишь в одном частном случае, требующем специального задания функции $\varepsilon(s)$.

Поступила в редакцию 21 IX 1939.

ЛИТЕРАТУРА

1. Неронов Н. П. Прикладная математика и механика. 1936. Т. III. № 1. [Стр. 31—45].
2. Неронов Н. П. Прикладная математика и механика, новая серия. 1937. Т. I. № 1. [Стр. 91—116].
3. Неронов Н. П. Записки Ленинградского горного института. 1937. Т. X. № 3. [Стр. 1—27].
4. Неронов Н. П. Прикладная математика и механика. 1939. Т. III. № 3. [Стр. 125—144].

SUR LES DÉFORMATIONS ÉLASTIQUES DU CÂBLE PENDANT LA DESCENTE DE LA CAGE DU PUITS DE MINE

N. P. NÉRONOFF

(Résumé)

Dans le présent article nous examinons le cas de la descente de la cage du puits de mine en tenant compte de la masse et du poids du câble[1].

Nous envisageons le câble comme un fil élastique auquel est suspendue à son extrémité inférieure B la cage A de poids p, $p = mg$ (fig. 1). La partie supérieure du câble est enroulée sur le tambour qui tourne autour de l'axe horizontal immobile O. La vitesse $v(t)$ des points de la circonférence du tambour est considérée par nous comme une fonction donnée du temps t.

[1] Les travaux précédents de l'auteur sur le même sujet sont indiqués après le texte russe.

Nous avons l'expression suivante pour la distance de l'extrémité B du câble à son point arbitraire M

$$MB = x + u(x, t),$$

où x désigne la longueur primitive (correspondant à l'absence de forces) de la partie MB du câble et $u(x, t)$ sa déformation (fig. 1). La loi de Hook donne la valeur de la tension T au point M du câble

$$T = k\frac{\partial u(x, t)}{\partial x},$$

où k est une constante.

La fonction inconnue $u(x, t)$ se détermine de l'équation différentielle suivante aux dérivées partielles du deuxième ordre

$$\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial t^2} = c^2\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2} - b\left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=0},$$

où

$$c = +\sqrt{\frac{k}{\rho}}, \quad b = \frac{k}{m}$$

et ρ désigne la masse de l'unité de longeur du câble.

Son intégrale générale a la forme

$$u(x, t) = \varphi'(x + ct) + \psi'(x - ct) - \frac{b}{c^2}[\varphi(ct) + \psi(-ct)],$$

où φ, ψ représentent des fonctions arbitraires des arguments correspondants et φ', ψ' les dérivées de ces fonctions.

Les conditions initiales sont les suivantes:

$$u(x, t)\big|_{t=0} = f_1(x), \quad \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = f_2(x),$$

où

$$f_1(0) = 0, \quad f_2(0) = 0.$$

Passons aux deux conditions aux limites. La première d'elles

$$u(x, t)\big|_{x=0} = 0$$

se rapporte au point B et la seconde

$$[c^2 + v^2(t)]\left.\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x^2}\right|_{x=l} + 2v(t)\left.\frac{\partial^2 u(x, t)}{\partial x\, \partial t}\right|_{x=l} = g - v'(t) + v^2(t)\,\varepsilon'(s),$$

où

$$l = l_0 + s(t), \quad s = s(t) = \int_0^t v(t)\,dt, \quad l_0 = l\big|_{t=0},$$

au point C, désignant par l la longueur primitive de la partie verticale BC du câble.

La fonction $\varepsilon(s)$ est considérée comme connue et représente le coefficient de la dilatation linéaire des éléments du câble se trouvant sur le tambour. A cela le glissement du câble sur le tambour est supposé exclus.

Nous voyons que la seconde condition aux limites dans le cas de la descente a une autre forme en comparaison du cas de l'ascension. On peut démontrer que ces formes coïncident dans un cas, où

$$\varepsilon(s) = \left.\frac{\partial u(x, t)}{\partial x}\right|_{x=l}.$$

Les résultats obtenus par nous montrent que la rotation du tambour et la descente de la cage provoquent des vibrations élastiques longitudinales du câble qui sont accompagnées de la propagation le long du câble d'une discontinuité d'un ordre quelconque. Dans le présent travail nous considérons des discontinuités du deuxième ordre.

Le problème considéré peut aussi être résolu à l'aide de l'algorithme symbolique de Heaveside.