

УРАВНЕНИЯ ТРАЕКТОРИЙ ГЛАВНЫХ СДВИГАЮЩИХ
НАПРЯЖЕНИЙ В ПРИЗМАТИЧЕСКИХ БАЛКАХ
ПРЯМОУГОЛЬНОГО СЕЧЕНИЯ¹

М. Я. АНТОНОВ

(Новочеркасск)

Решение дифференциальных уравнений траекторий главных напряжений для балок, работающих в условиях поперечного изгиба, в технической литературе отсутствует. Эти уравнения трактуются некоторыми авторами как неразрешимые, почему для построения самих траекторий применяются в настоящее время методы, оставляющие в стороне вопрос о решении самих уравнений.

В излагаемой ниже заметке дается в замкнутой форме решение дифференциального уравнения главных касательных напряжений для призматических балок прямоугольного сечения.

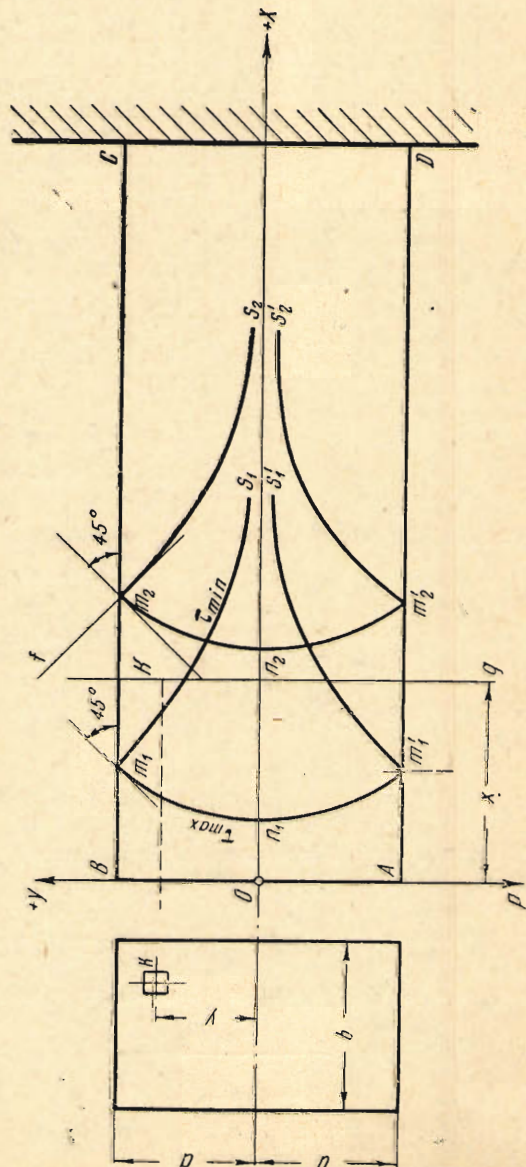
В обобщенном виде это уравнение будет:

$$xyy'^2 - \mu(a^2 - x^2)y' - xy = 0, \quad (1)$$

где $\mu = 2$ для балки, нагруженной на конце сосредоточенной силой,
 $\mu = 4$ для балки, нагруженной равномерно распределенной нагрузкой,
 $\mu = 6$ для балки, несущей гидростатическую нагрузку.

На основании выражений для y' и y'' , вытекающих из (1), нетрудно прийти к заключению, что траектории, соответствующие уравнению (1):

¹ Под главными сдвигающими напряжениями мы понимаем здесь наибольшие и наименьшие сдвигающие напряжения, как это принято для главных нормальных напряжений.

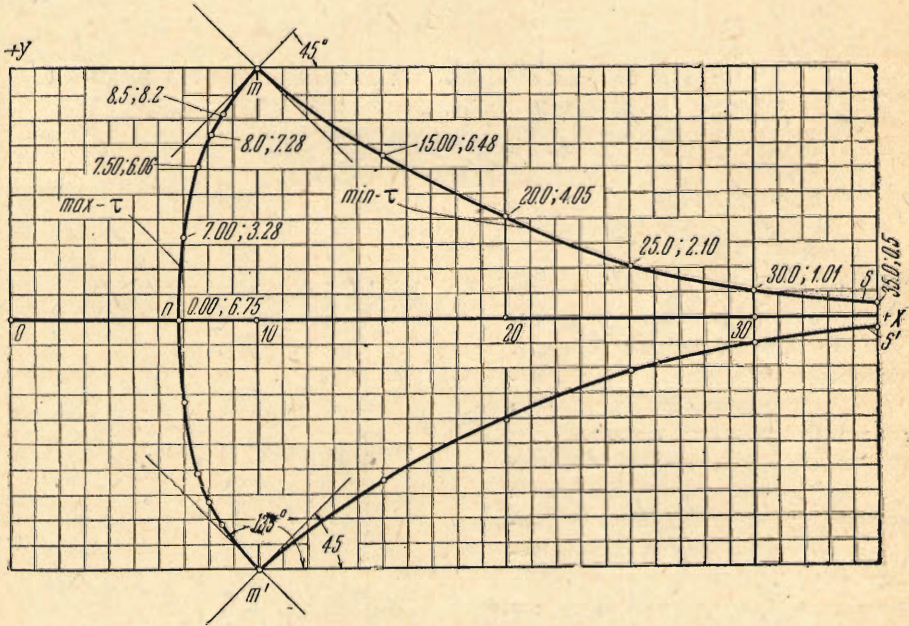


Фиг. 1.

- 1) симметричны относительно оси x ,
- 2) не имеют точек перегиба,
- 3) траектории наибольших касательных напряжений имеют вид кривых $m_1 n_1 m_1', m_2 n_2 m_2', \dots$, показанных на фиг. 1,
- 4) траектории наименьших касательных напряжений — вид кривых $m_1 s_1 - s_1' m_1', m_2 s_2 - s_2' m_2', \dots$

Для интегрирования рассматриваемого уравнения делаем замену переменных:

$$x^2 = w \text{ и } y^2 = z.$$



Фиг. 2.

Тогда после соответствующих преобразований в уравнении (1) получим:

$$wp^2 - \mu(a^2 - z)p - z = 0, \tag{2}$$

где

$$p = \frac{dz}{dw} = \frac{y}{x} \frac{dy}{dx} = \frac{\mu(a^2 - y^2) \pm \sqrt{\mu^2(a^2 - y^2)^2 + 4x^2 y^2}}{2x^2}.$$

Дифференцируя уравнение (2) по w и принимая во внимание, что $\frac{dp}{dw} = p \frac{dp}{dz}$, причем $p \neq 0$, получим:

$$(\mu + 1)p - 1 + [2wp - \mu(a^2 - z)] \frac{dp}{dz} = 0.$$

Исключая отсюда w с помощью уравнения (2), приходим к линейному неоднородному дифференциальному уравнению (вырожденному уравнению Бернулли):

$$\frac{dz}{dp} + \frac{2 - \mu p}{p[(\mu + 1)p - 1]} z = - \frac{\mu a^2 p}{[(\mu + 1)p - 1]},$$

интегрируя которое обычным порядком, получаем:

$$y^2 = \frac{p^2}{[(\mu + 1)p - 1]^{\frac{\mu+2}{\mu+1}}} \left[C - \mu a^2 \int \frac{\sqrt{(\mu + 1)p - 1}}{p^2} dp \right],$$

где C — постоянная.

Преобразовав входящий сюда интеграл с помощью обозначения

$$(\mu + 1)p - 1 = u^{\mu+1},$$

будем иметь решение дифференциального уравнения (1) в виде такой параметрической системы:

$$y = \pm \frac{p}{[(\mu + 1)p - 1]^{\frac{\mu+2}{2(\mu+1)}}} \sqrt{\mu a^2 \frac{u^{\mu+1} \sqrt{(\mu + 1)p - 1}}{p} - \mu (\mu + 1) a^2} \int \frac{du}{1 + u^{\mu+1}} + C, \quad (I)$$

$$p = \frac{\mu (a^2 - y^2) \pm \sqrt{\mu^2 (a^2 - y^2)^2 + 4a^2 y^2}}{2a^2}, \quad (II)$$

где положительный знак при радикале в уравнении (II) соответствует семейству траекторий наибольших касательных напряжений, а отрицательный — семейству траекторий наименьших касательных напряжений.

Выполним в качестве примера построение траекторий главных касательных напряжений, проходящих через точки $m(10, 10)$ и $m'(10, -10)$ в консольной балке прямоугольного сечения с высотой $2a = 20$ см, нагруженной на конце сосредоточенной силой (фиг. 2).

В этом случае $\mu = 2$ и система (I, II) имеет вид:

$$y = \pm \frac{p}{\sqrt[3]{3p - 1}} \times \sqrt{\frac{200 \sqrt[3]{3p - 1}}{p} - 230.26 \lg \frac{(\sqrt[3]{3p - 1} + 1)^3}{3p} - 346.42 \operatorname{arc} \operatorname{tg} [0.57735 (2 \sqrt[3]{3p - 1} - 1)]} + C \quad (I')$$

$$p = \frac{100 - y^2 \pm \sqrt{(100 - y^2)^2 + x^2 y^2}}{x^2}. \quad (II')$$

Построим траекторию mm' наибольших касательных напряжений (фиг. 2).

Прежде всего определяем постоянную C для этой траектории, исходя из условия, что траектория проходит через точку $(10, 10)$. Из уравнения (II') находим:

$$p = 1.$$

Затем с помощью уравнения (I') получим:

$$C = 334.2.$$

Зная характер расположения интересующей нас траектории, проводим ее эскизно через точки $(10, 10)$ и $(10, -10)$ и затем с помощью уравнений (I') и (II') определяем фактическое положение точки пересечения этой траектории с осью x .

По чертежу приближенное значение абсциссы точки пересечения траектории с осью x равно 6.8; поэтому на основании уравнения II' получим:

$$p = 4.3253.$$

Подставляя найденные значения для C и p в уравнение (I'), имеем:

$$y = \pm 0.918.$$

Так как результат значительно отклоняется от нуля, то делаем второй пересчет, приняв абсциссу точки пересечения траекторий с осью x , равной 6.70. В этом случае уравнение (II') дает:

$$p = 4.4554,$$

а уравнение (I'):

$$y = \pm 835 \sqrt{-2.11},$$

т. е. действительного решения для y нет. Поэтому абсциссу точки пересечения траектории с осью x можно принять равной среднему значению, т. е. 6.75.

Промежуточные точки кривой находим аналогично, задаваясь их координатами и уточняя затем положение этих точек.

Аналогично построена кривая наименьших касательных напряжений $m_s - s'm'$, показанная на той же фиг. 2.

Поступило в редакцию 10 I 1938.

EQUATION FOR TRAJECTORIES OF THE MAIN TANGENTIAL STRESSES IN A PRISMATIC CANTILEVER BEAM OF THE RECTANGULAR CROSS-SECTION

M. I. ANTONOV

Summary

In this article the author gives the solution for the differential equation

$$xyy'^2 - \mu(a^2 - y^2)y' - xy = 0$$

of the trajectories of the main tangential stresses in a prismatic cantilever beam with rectangular cross-section.

The integral of this equation is represented in the form of expressions (I) and (II).
