

ЗАМЕТКИ

ГОДОГРАФЫ СКОРОСТЕЙ И УСКОРЕНИЙ В ПЛОСКОМ ДВИЖЕНИИ

З. Ш. БЛОХ

(Москва)

Различные кинематические свойства плоского движения изучались до сих пор почти исключительно графическими методами, и в этом направлении были получены весьма важные для теории механизмов результаты. В течение последних лет начали появляться печатные работы, в которых различные вопросы кинематики плоского движения изучались аналитическими методами. Особый практический интерес представляет метод комплексной переменной (работы П. М. Ерохина¹ и С. С. Бюшгенса²), позволяющий получать различные свойства плоского движения из весьма общих аналитических зависимостей. В настоящей заметке этот метод применяется к изучению свойств неполярных планов скоростей и ускорений точек движущейся плоскости.

1. Уравнение годографа скоростей. Заданное плоское движение фигуры S (фиг. 1) уравнением:

$$z = z_0 + \zeta e^{i\varphi}, \quad (1)$$

где z — комплексная координата произвольной точки плоской фигуры в неподвижной системе xy ,

ζ — постоянная комплексная координата той же точки в системе ξ, η , жестко связанной с плоской фигурой,

z_0 — комплексная координата начала O подвижной системы ξ, η в системе xy ,

φ — переменный угол между осями x и ξ .

Дифференцируя (1) по времени, имеем уравнение скоростей:

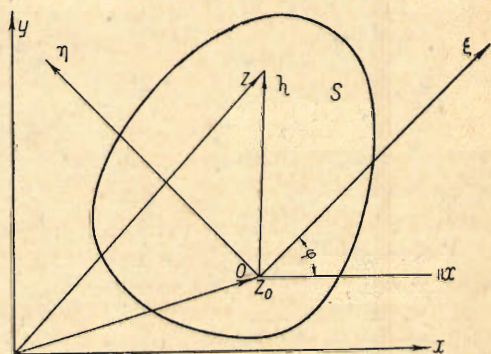
$$\bar{v} = v_0 + i\zeta\omega e^{i\varphi}.$$

В теории механизмов часто рассматривают „повернутые скорости“, т. е. векторы скоростей, повернутые относительно своего начального положения на постоянный угол ψ . Обозначая повернутые скорости

$$\hat{v} = \bar{v} e^{i\psi}, \quad \hat{v}_0 = v_0 e^{i\psi},$$

¹ О некоторых приложениях комплексных величин к механике. Известия Донского ун-та, т. IV, Ростов, 1924 г.; см. также сборник „Механика в СССР за XV лет“, стр. 12, ГТТИ, 1932 г.

² Аналитический метод исследования плоского движения. „Теория, конструкция и производство сельскохозяйственных машин“, т. I, стр. 179—193, Сельхозгиз, 1935.



Фиг. 1.

имеем:

$$\hat{v} = \hat{v}_0 + i\zeta\omega e^{i(\varphi+\psi)}. \quad (2)$$

Пусть масштабы расстояний α см/см, скоростей β $\frac{\text{см}}{\text{см.сек.}}$ Тогда комплексное уравнение геометрического места концов векторов повернутых скоростей \hat{v}_A какой-либо точки A плоскости S (уравнение годографа повернутых скоростей) будет:

$$z_{vA} = \frac{z_A}{\alpha} + \frac{\hat{v}_A}{\beta} = \frac{z_A}{\alpha} + \frac{\bar{v}_A}{\beta} e^{i\psi}.$$

Воспользовавшись значениями z_A и \hat{v}_A из (1) и (2), получим:

$$z_{vA} - z_{v0} = \zeta_A e^{i\varphi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{i\omega e^{i\psi}}{\beta} \right), \quad (3)$$

где

$$z_{v0} = \frac{z_0}{\alpha} + \frac{\bar{v}_0}{\beta} e^{i\psi} \quad (4)$$

— годограф скоростей полюса O .

Исключая из (3) $\zeta_A e^{i\varphi}$ при помощи (1), найдем:

$$z_{vA} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{i\omega e^{i\psi}}{\beta} \right) z_A + \frac{\bar{v}_0 e^{i\psi}}{\beta} - \frac{i\omega z_0 e^{i\psi}}{\beta}. \quad (5)$$

Для какого-либо одного положения плоскости S комплексные числа

$$A = \frac{1}{\alpha} + \frac{i\omega e^{i\psi}}{\beta}, \quad (6)$$

$$B = (v_0 - i\omega z_0) \frac{e^{i\psi}}{\beta}$$

постоянны. При этом преобразование точек z_A плоскости S , определяемое (5) и заключающееся в получении их изображений z_{vA} на неполярном плане повернутых скоростей, является преобразованием подобия и параллельного переноса. Отсюда непосредственно вытекает известная теорема о подобии для неполярного плана повернутых скоростей, доказанная Бурместером.¹ Уравнение (5) дает элементы преобразования подобия:

1) увеличение размеров в $\text{mod } A$ раз и поворот на угол, равный $\text{arg } A$, и

2) параллельный перенос в направлении вектора B на расстояние, равное $\text{mod } B$.

Если задать годограф повернутых скоростей для какой-либо другой точки B плоскости S в виде

$$z_{vB} - z_{v0} = \zeta_B e^{i\varphi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{i\omega e^{i\psi}}{\beta} \right),$$

то, воспользовавшись (3), легко получить уравнение, не зависящее от ω :

$$z_{vA} = z_{v0} + \frac{\zeta_A}{\zeta_B} (z_{vB} - z_{v0}). \quad (7)$$

Установим, при каких условиях годографы повернутых скоростей всех точек плоскости S подобны. Уравнение (7) дает преобразование подобия, если, например, $z_{v0} = \text{const}$.

В этом случае, перенеся начало неподвижной системы координат в точку с постоянной комплексной координатой $z_{v0} = c$, получим вместо (4) и (7) следующие формулы:

$$z_{vA} = \frac{\zeta_A}{\zeta_B} z_{vB}, \quad (8)$$

$$\frac{z_0}{\alpha} + \frac{\bar{v}_0}{\beta} e^{i\psi} = 0. \quad (9)$$

¹ Вегер. Technische Kinematik, S. 187.

Из (8) видно, что подобное преобразование годографа z_{vB} заключается в увеличении размеров в $\text{mod } \frac{\zeta_A}{\zeta_B}$ раз и повороте на угол, равный $\text{arg } \zeta_A - \text{arg } \zeta_B$. Условие (9) существования преобразования (8) приводится к дифференциальному уравнению с отделяющимися переменными:

$$\beta dt + \alpha \frac{dz_0}{z_0} e^{i\psi} = 0,$$

откуда

$$z_0 = C e^{(i \sin \psi - \cos \psi) \frac{\beta t}{\alpha}}, \quad (10)$$

где C — постоянная интегрирования.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда $\psi = \pi/2$. Тогда

$$z_0 = C e^{i \frac{\beta}{\alpha} t},$$

т. е. переносное движение происходит по окружности радиуса $\text{mod } C$, центр которой расположен в начале неподвижной системы координат, с постоянной угловой скоростью

$$\omega_0 = \frac{\beta}{\alpha}. \quad (11)$$

Такой случай движения мы имеем у кривошипа четырехзвенного механизма. Следовательно, если подобрать масштабы α и β так, чтобы они удовлетворяли уравнению (11) при заданной ω_0 , то годографы повернутых скоростей всех точек шатуна четырехзвенного механизма будут подобны.

Само преобразование подобия определяется уравнением (8).

Для всех точек шатуна A, B, C, \dots , лежащих на окружности проведенной из центра подвижной системы координат, т. е. из центра шарнира, соединяющего кривошип и шатун,

$$\text{mod } \zeta_A = \text{mod } \zeta_B = \text{mod } \zeta_C = \dots$$

Следовательно, годографы повернутых скоростей всех этих точек определяются одинаковыми кривыми, повернутыми друг относительно друга на углы, равные

$$\text{arg } \zeta_A - \text{arg } \zeta_B, \quad \text{arg } \zeta_A - \text{arg } \zeta_C, \dots$$

Для всех точек шатуна A_1, B_1, C_1, \dots , лежащих на луче, идущем из начала подвижной системы координат,

$$\text{arg } \zeta_{A_1} = \text{arg } \zeta_{B_1} = \text{arg } \zeta_{C_1} = \dots$$

В этом случае уравнение (8) дает преобразование подобия без поворота, причем полюсом подобия для всех рассматриваемых годографов будет начало неподвижной системы координат (центр вращения кривошипа механизма).

В более общем случае уравнение (7) дает преобразование подобия с параллельным переносом, когда z_{vO} и z_{vB} связаны линейной зависимостью:

$$z_{vO} = B z_{vB} + C, \quad (12)$$

где B и C — постоянные комплексные числа.

Исключая из (7) z_{vO} , получим соответствующее преобразование:

$$z_{vA} = z_{vB} \left[\frac{\zeta_A}{\zeta_B} + B \left(1 - \frac{\zeta_A}{\zeta_B} \right) \right] + C \left(1 - \frac{\zeta_A}{\zeta_B} \right). \quad (13)$$

Из полученного уравнения следует, что если годографы z_{vO} и z_{vB} двух точек O и B движущейся плоскости подобны, то годографы всех остальных точек также будут им подобны.

Найдем точку A плоскости S , для которой $z_{vA} = \text{const}$. Из (13) следует, что относительная комплексная координата ζ_A искомой точки в этом случае определяется уравнением:

$$\frac{\zeta_A}{\zeta_B} + B \left(1 - \frac{\zeta_A}{\zeta_B} \right) = 0,$$

откуда

$$\zeta_A = \zeta_B \frac{B}{B-1}. \quad (14)$$

Полученные формулы дают решение следующей задачи по синтезу четырехзвенника.

В плоскости шатуна четырехзвенника заданы две точки O и B , годографы скоростей которых z_{vO} и z_{vB} подобны и удовлетворяют зависимостям (12). Необходимо для заданного случая определить положение центра вращения кривошипа и точку его присоединения к шатуну.

Положение центра вращения кривошипа (начала неподвижной системы координат) определится, очевидно, из условия $z_{vA} = 0$, что имеет место при переносе начала неподвижной системы координат в точку C комплексной координатой:

$$Z = \frac{C}{1-B}.$$

Положение шарнира, связывающего плоскости шатуна и кривошипа, определяется относительной комплексной координатой ζ_A по формуле (14).

2. Уравнение годографа ускорений. Дифференцируя (2) по времени, получим уравнение для повернутых ускорений:

$$\hat{w} = \hat{w}_0 + \zeta e^{i(\varphi+\psi)}(i\varepsilon - \omega^2), \quad (15)$$

где $\varepsilon = \frac{d\omega}{dt}$ — относительное угловое ускорение.

Пусть масштаб ускорений $\gamma \frac{\text{см}}{\text{сек}^2 \text{см}}$. Тогда комплексное уравнение геометрического места концов векторов повернутых ускорений \hat{w}_A произвольной [точки A плоскости S (уравнение годографа повернутых ускорений) будет:

$$z_{wA} = \frac{z_A}{\alpha} + \frac{\hat{w}_A}{\gamma} = \frac{z_A}{\alpha} + \frac{\bar{w}_A}{\gamma} e^{i\psi}.$$

Воспользовавшись значениями z_A и \hat{w}_A из (1) и (15), получим:

$$z_{wA} - z_{wO} = \zeta_A e^{i\varphi} \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{i\varepsilon - \omega^2}{\gamma} e^{i\psi} \right), \quad (16)$$

где

$$z_{wO} = \frac{z_O}{\alpha} + \frac{\bar{w}_O}{\gamma} e^{i\psi}$$

— годограф повернутых ускорений полюса O .

Исключая из (16) $\zeta_A e^{i\varphi}$ при помощи (1), имеем:

$$z_{wA} = \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{i\varepsilon - \omega^2}{\gamma} e^{i\psi} \right) z_A + \frac{e^{i\psi}}{\gamma} [\bar{w}_O - (i\varepsilon - \omega^2) z_O].$$

Полученное преобразование доказывает известную теорему Бурместера о подобии для неполярного плана повернутых ускорений.¹

Элементы преобразования для какого-либо одного положения плоскости S определяются постоянными комплексными коэффициентами, аналогичными (6):

$$A = \frac{1}{\alpha} + \frac{i\varepsilon - \omega^2}{\gamma} e^{i\psi},$$

$$B = \frac{1}{\gamma} e^{i\psi} [\bar{w}_O - (i\varepsilon - \omega^2) z_O].$$

Воспользовавшись уравнением годографа повернутых ускорений z_{wB} какой-либо другой точки B плоскости S , получим для построения z_{wA} уравнение:

$$z_{wA} = z_{wO} + \frac{\zeta_A}{\zeta_B} (z_{wB} - z_{wO}), \quad (17)$$

которое не отличающееся по структуре от (7).

¹ Beyer, op. cit., S. 238.

Повторяя все изложенное при исследовании уравнения (7), приходим к заключению, что условием подобия годографов z_{wA} и z_{wB} будет уравнение, аналогичное (9):

$$\frac{z_0}{\alpha} + \frac{\bar{w}_0}{\gamma} e^{i\psi} = 0. \quad (18)$$

Интегрируя уравнение (18), получим:

$$z_0 = Ce \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha} (i \sin \psi - \cos \psi) t},$$

где C — произвольная постоянная.

Наибольший практический интерес представляет случай, когда $\psi = 0$. Тогда

$$z_0 = Ce^i \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha} t},$$

т. е. переносное движение происходит по окружности радиуса $\text{mod } C$, центр которой расположен в начале неподвижной системы координат, с постоянной угловой скоростью

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{\gamma}{\alpha}}. \quad (19)$$

Такой случай движения мы имеем у кривошипа четырехзвенного механизма. Следовательно, если подобрать масштабы α и γ так, чтобы они удовлетворяли уравнению (19) при заданном ω_0 , то годографы действительных ускорений всех точек шатуна будут подобны. Само преобразование подобия определяется уравнением, аналогичным (8).

В более общем случае уравнение (17) дает преобразование подобия и параллельного переноса, если z_{w0} и z_{wB} связаны линейной зависимостью, аналогичной (12)

$$z_{w0} = Bz_{wB} + C,$$

что приводит к преобразованию вида

$$z_{wA} = z_{wB} \left[\frac{\zeta_A}{\zeta_B} + B \left(1 - \frac{\zeta_A}{\zeta_B} \right) \right] + C \left(1 - \frac{\zeta_A}{\zeta_B} \right). \quad (20)$$

Дальнейшее исследование формулы (20) полностью совпадает с тем, что изложено выше по поводу преобразования (13) и вытекающих из него задач.

З а к л ю ч е н и е. Применение метода комплексной переменной к изучению годографов скоростей и ускорений точек движущейся плоскости обнаружило не только уже хорошо известные ранее свойства этих построений (теоремы Бурместера), но и дало возможность получить некоторые, как нам кажется, новые результаты. Особый практический интерес представляют найденные подобные свойства годографов скоростей и ускорений точек шатуна четырехзвенного механизма. Мы видим, что при надлежащем выборе масштабов, для изучения годографов всех точек шатуна достаточно построить по одному годографу скоростей (повернутых) и ускорений какой-либо одной точки шатуна, например шарнира, соединяющего шатун с коромыслом. Помимо прочих преимуществ при применении аналитического метода всегда имеется возможность ставить и решать обратные задачи по синтезу механизмов, в виде примера, как это было продемонстрировано в § 2 настоящей работы.

Поступило в редакцию 20 IV 1938.

GESCHWINDIGKEITS- UND BESCHLEUNIGUNGS-HODOGRAPHEN BEI EBENER BEWEGUNG

S. BLOCH

(Zusammenfassung)

Es werden Gleichungen der lokalen Hodographen gedrehter Geschwindigkeiten und Beschleunigungen der Punkte der sich bewegenden Ebene S erhalten werden (Abb. 1). Es die allgemeinen Bedingungen gefunden, bei welchen lokale Hodographen ähnliche Kurven

darstellen. Es wird bewiesen worden, dass wenn man für ein Gelenkviereck als Masstäb der Entfernungen $\alpha \frac{\text{cm}}{\text{cm}}$, als Masstäb der Geschwindigkeiten $\beta \frac{\text{cm}}{\text{sec} \cdot \text{cm}}$ und als Masstäb der Beschleunigungen $\gamma \frac{\text{cm}}{\text{sec}^2 \text{cm}}$ so nimmt, dass die Bedingungen $\beta = \omega_0 \alpha$ und $\gamma = \omega_0^2 \alpha$ erfüllt werden, wo ω_0 die ständige Winkelgeschwindigkeit der Kurbeldrehung ist, sowohl die lokalen Hodographen der gedrehten Geschwindigkeiten aller Punkte der Koppalebene, ähnlich werden als auch die lokalen Hodographen der wirklichen Beschleunigungen derselben Punkte. Es ist eine Erklärung gegeben, wie man ein ebenes Gelenkviereck bilden kann, wenn für die lokalen Hodographen der Geschwindigkeiten oder Beschleunigungen zweier Punkte seiner Koppalebene die Elemente der Umgestaltung der Ähnlichkeit im voraus angegeben ist.
