АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Т. II, в. 4

1939

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS
V. II, № 4

МЕХАНИЗМ БЕННЕТА-ВЕРХОВСКОГО

С. С. БЮШГЕНС

(Москва)

1. Bennete в одном частном случае установил возможность существования четырехзвенного пространственного механизма с цилиндрическими шарнирами, оси которых не параллельны и не сходятся в одной точке.[1]

Кратчайшие расстояния осей последовательных шарниров механизма Беннета образуют шарнирный четырехсторонник. Геометрически конфигурация будет определена, если мы зададим: 1) четыре угла каждой из осей с предыдущей, 2) четыре длины общих перпендикуляров каждой пары последовательных осей. Механизм Беннета осуществляется при наличии трех следующих условий:

a) в четырехугольнике кратчайших расстояний осей противоположные стороны попарно равны (a, b, a, b),

b) углы осей также через один равны $(\alpha, \beta, \alpha, \beta)$,

c) упомянутые величины связаны условием:

$$\frac{\sin\alpha}{a}=\frac{\sin\beta}{b}.$$

Верховский[2] рассматривал общий пространственный четырехугольник (r_1, r_2, r_3, r_4), для которого последовательные оси цилиндрических шарниров образуют углы $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3, \alpha_4)$. Однако он не получил уравнений, определяющих движение механизма, а установил лишь полную систему тех шести условий которые связывают указанные восемь величин. Эту систему Верховскому не удалось привести к простейшему виду, и он лишь указал, что она удовлетворяется, в частности, в условиях Беннета a), b), c).

Верховскому не удалось также разрешить задачу обобщенного четырехзвенного механизма, когда концы двух смежных кратчайших расстояний на одной оси расходятся.

В настоящей заметке дается исчерпывающий анализ обобщенной четырехзвенной конфигурации, когда она сводится к механизму; наиболее подходящим приемом исследования я считаю здесь векторный метод, так как он дает нам полное число условий, характеризующих как самое движение механизма,

[1] Bennete G. T. A new mechanism, Engineering, Dec. 1903.

[2] Верховский А. А. Четырехзвенный пространственный механизм с цилиндрическими шарнирами, Известия Томск. технол. инст., т. 46, 1924.

так и все зависимости между его основными элементами, причем вывод всех условий сводится к простым векторным вычислениям.

2. Пусть $\bar{i}$, $\bar{j}$, $\bar{k}$ будут орты, образующие левую тройку попарно ортогональных векторов; изобразим через единичные векторы

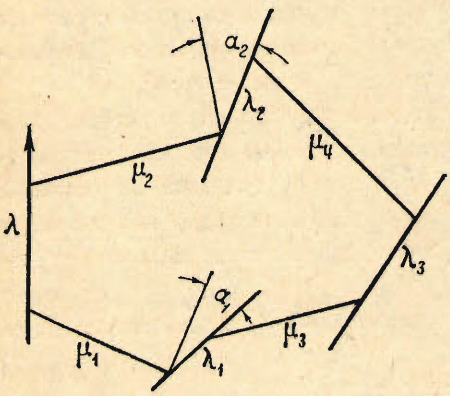
$$\bar{k},\ \bar{\lambda}_1^0,\ \bar{\lambda}_3^0,\ \bar{\lambda}_2^0$$

направления четырех осей цилиндрических шарниров и через векторы

$$\bar{\mu}_1,\ \bar{\mu}_3,\ -\bar{\mu}_4,\ -\bar{\mu}_2$$

кратчайшие расстояния пар смежных осей (их общие перпендикуляры). Расстояния концов смежных общих перпендикуляров на осях обозначим соответственно через λ, λ_1, λ_3, λ_2.

Мы будем считать, что все μ одновременно не обращаются в нули, т. е. наперед исключим тот случай, когда оси шарниров пересекаются в одной точке (случай I).



Фиг. 1.

Тогда прежде всего мы имеем:

$$\bar{\mu}_1+\bar{\lambda}_1+\bar{\mu}_3+\bar{\lambda}_3=\bar{\lambda}+\bar{\mu}_2+\bar{\lambda}_2+\bar{\mu}_4. \quad \text{(A)}$$

Обозначим далее через θ_1 и θ_2 углы, образованные векторами μ_1 и μ_2 с начальным вектором $\bar{i}$; в таком случае:

$$\bar{\mu}_1^0=\bar{i}\cos\theta_1+\bar{j}\sin\theta_1,$$

$$\bar{\mu}_2^0=\bar{i}\cos\theta_2+\bar{j}\sin\theta_2.$$

Пусть далее α_1 и α_2 будут углами векторов $\bar{\lambda}_1$ и $\bar{\lambda}_2$ с вектором $\bar{\lambda}=\bar{k}$; тогда

$$\bar{\lambda}_1^0=\bar{k}\cos\alpha_1-\bar{k}\times\bar{\mu}_1^0\sin\alpha_1,$$

$$\bar{\lambda}_2^0=\bar{k}\cos\alpha_2-\bar{k}\times\bar{\mu}_2^0\sin\alpha_2,$$

и следовательно,

$$\bar{\lambda}_1^0=\bar{i}\sin\theta_1\sin\alpha_1-\bar{j}\cos\theta_1\sin\alpha_1+\bar{k}\cos\alpha_1,$$

$$\bar{\lambda}_2^0=\bar{i}\sin\theta_2\sin\alpha_2-\bar{j}\cos\theta_2\sin\alpha_2+\bar{k}\cos\alpha_2.$$

Аналогично, если мы обозначим через θ_3 угол, образованный вектором $\bar{\mu}_3$ с вектором $\bar{\mu}_1$, и через θ_4 угол, образованный вектором $\bar{\mu}_4$ с вектором $\bar{\mu}_2$, то

$$\bar{\mu}_3^0=\bar{\mu}_1^0\cos\theta_3+\bar{\lambda}_1^0\times\bar{\mu}_1^0\sin\theta_3,$$

$$\bar{\mu}_4^0=\bar{\mu}_2^0\cos\theta_4+\bar{\lambda}_2^0\times\bar{\mu}_2^0\sin\theta_4,$$

и следовательно,

$$\bar{\mu}_3^0=\bar{i}p_{13}^1+\bar{j}q_{13}^1+\bar{k}\sin\theta_3\sin\alpha_1,$$

$$\bar{\mu}_4^0=\bar{i}p_{24}^2+\bar{j}q_{24}^2+\bar{k}\sin\theta_4\sin\alpha_2,$$

где принято

$$p_{mn}^s=\cos\theta_m\cos\theta_n-\sin\theta_m\sin\theta_n\cos\alpha_s,$$

$$q_{mn}^s=\sin\theta_m\cos\theta_n+\cos\theta_m\sin\theta_n\cos\alpha_s.$$

Наконец, если обозначить через α_3 и α_4 соответственно углы, образованные вектором $\bar{\lambda}_3^0$ с векторами $\bar{\lambda}_1^0$ и $\bar{\lambda}_2^0$, то мы получим:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_3^0 &= \bar{\lambda}_1^0 \cos\alpha_3 - \bar{\lambda}_1^0 \times \bar{\mu}_3^0 \sin\alpha_3,\\ \bar{\lambda}_3^0 &= \bar{\lambda}_2^0 \cos\alpha_4 - \bar{\lambda}_2^0 \times \bar{\mu}_4^0 \sin\alpha_4.\end{aligned} \tag{B}$$

Подставляя сюда найденные выше выражения для $\bar{\lambda}_1^0$ и $\bar{\mu}_3^0$, получим:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_3^0 &= \bar{i}\left(\cos\theta_1 \sin\theta_3 \sin\alpha_3 + \sin\theta_1 q_3^{13}\right) + \\ &+ \bar{j}\left(-\cos\theta_1 q_3^{13} + \sin\theta_1 \sin\theta_3 \sin\alpha_3\right) + \bar{k} p_3^{13},\end{aligned} \tag{B'}$$

где

$$p_s^{mn} = \cos\alpha_m \cos\alpha_n - \sin\alpha_m \sin\alpha_n \cos\theta_s,$$

$$q_s^{mn} = \sin\alpha_m \cos\alpha_n + \cos\alpha_m \sin\alpha_n \cos\theta_s.$$

Аналогично имеем:

$$\begin{aligned}\bar{\lambda}_3^0 &= \bar{j}\left(\cos\theta_2 \sin\theta_4 \sin\alpha_4 + \sin\theta_2 q_4^{24}\right) + \\ &+ \bar{j}\left(-\cos\theta_2 q_4^{24} + \sin\theta_2 \sin\theta_4 \sin\alpha_4\right) + k p_4^{24}.\end{aligned} \tag{B''}$$

Условие (B) дает два уравнения, в которых можем принять $\theta_1 = 0$:

$$\sin\theta_3 \sin\alpha_3 = \cos\theta_2 \sin\theta_4 \sin\alpha_4 + \sin\theta_2 q_4^{24}, \tag{1}$$

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 \cos\theta_3 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_4 - \sin\alpha_2 \sin\alpha_4 \cos\theta_4; \tag{2}$$

условие же (A) при том же предположении $\theta_1 = 0$ дает три уравнения:

$$\begin{aligned}&(\mu_1^2 + \lambda_1^2 + \mu_3^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3 \cos\alpha_3) + 2\mu_1\mu_3 \cos\theta_3 + 2\mu_1\lambda_3 \sin\alpha_3 \sin\theta_3 = \\ &= (\lambda^2 + \mu_2^2 + \lambda_2^2 + \mu_4^2 + 2\lambda\lambda_2 \cos\alpha_2) + 2\mu_2\mu_4 \cos\theta_4 + 2\lambda\mu_4 \sin\alpha_2 \sin\theta_4,\end{aligned} \tag{3}$$

$$\mu_1 + \mu_3 \cos\theta_3 + \lambda_3 \sin\alpha_3 \sin\theta_3 = \mu_2 \cos\theta_2 + \lambda_2 \sin\alpha_2 \sin\theta_2 + \mu_4 p_{24}^2, \tag{4}$$

$$\begin{aligned}&\lambda_1 \cos\alpha_1 + \mu_3 \sin\alpha_1 \sin\theta_3 + \lambda_3(\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 - \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 \cos\theta_3) = \\ &= \lambda + \lambda_2 \cos\alpha_2 + \mu_4 \sin\alpha_2 \sin\theta_4.\end{aligned} \tag{5}$$

Уравнение (2) может сводиться к тождеству (относительно θ_3 и θ_4) только в том случае, когда две из величин α_m обращаются в нули, но тогда и две другие из этих величин тоже обращаются в нули, и мы получим механизм, в котором все оси цилиндрических шарниров параллельны (случай II).

Так как ни одна из величин θ_3 и θ_4 не может быть постоянной (иначе конфигурация обращалась бы в трехзвенную и, следовательно, твердую), то из уравнения (2) мы можем заключить, что, если одна из величин α_m обращается в нуль, должны обращаться в нуль и все остальные.

Уравнение (5) также не может сводиться к тождеству, кроме случая II.

Если соотношения (2) и (5) не пропадают, то они различны и должны давать аффинное преобразование окружности

$$\cos^2\theta_4 + \sin^2\theta_4 = 1$$

в окружность

$$\cos^2\theta_3 + \sin^2\theta_3 = 1.$$

Но такое аффинное преобразование в силу уравнения (2) не может быть вращением, а потому оно должно сводиться к тождеству или симметрии:

$$\cos\theta_4 = \varepsilon \cos\theta_3, \qquad \sin\theta_4 = \varepsilon' \sin\theta_3, \tag{6}$$

где

$$\varepsilon^2 = 1, \quad \varepsilon'^2 = 1.$$

Уравнения (2), (3), (5) в таком случае дают условия:

$$\cos\alpha_1 \cos\alpha_3 = \cos\alpha_2 \cos\alpha_4, \tag{7}$$

$$\sin\alpha_1 \sin\alpha_3 = \varepsilon \sin\alpha_2 \sin\alpha_4, \tag{8}$$

$$\mu_1 \mu_3 = \varepsilon \mu_2 \mu_4, \tag{9}$$

$$\mu_1 \lambda_3 \sin\alpha_3 = \varepsilon' \lambda \mu_4 \sin\alpha_2, \tag{10}$$

$$\lambda_1 \cos\alpha_1 + \lambda_3 \cos\alpha_1 \cos\alpha_3 = \lambda + \lambda_2 \cos\alpha_2, \tag{11}$$

$$\varepsilon' \mu_3 \sin\alpha_1 = \mu_4 \sin\alpha_2, \tag{12}$$

$$\lambda_3 \sin\alpha_1 \sin\alpha_3 = 0, \tag{13}$$

$$\mu_1^2 + \lambda_1^2 + \mu_3^2 + \lambda_3^2 + 2\lambda_1\lambda_3 \cos\alpha_3 = \lambda^2 + \mu_2^2 + \lambda_2^2 + \mu_4^2 + 2\lambda\lambda_2 \cos\alpha_2. \tag{14}$$

Уравнения (10) и (13) нам дают (не считая уже выделенного случая II):

$$\lambda = 0, \qquad \lambda_3 = 0, \tag{15}$$

а уравнение (9) позволяет принять $\varepsilon = +1$ (так как все длины μ_1, μ_2, μ_3, μ_4 мы можем считать положительными).

В силу соотношений (6) уравнения (1) и (4) связывают θ_2 и θ_3. Рассмотрим прежде всего тот случай, когда эти два уравнения совпадают, что будет при условиях:

$$\frac{\mu_1 + \mu_3 \cos\theta_3}{\sin\theta_3 \sin\alpha_3} = \frac{\mu_2 + \mu_4 \cos\theta_3}{\varepsilon' \sin\theta_3 \sin\alpha_4} = \frac{\lambda_2 \sin\alpha_2 - \varepsilon' \mu_4 \sin\theta_3 \cos\alpha_2}{\sin\alpha_2 \cos\alpha_4 + \cos\alpha_2 \sin\alpha_4 \cos\theta_3},$$

которые должны удовлетворяться тождественно относительно θ_3; это требование сейчас же даст нам соотношения:

$$\mu_1 \sin\alpha_4 = \varepsilon' \mu_2 \sin\alpha_3, \tag{16}$$

$$\mu_3 \sin\alpha_4 = \varepsilon' \mu_4 \sin\alpha_3, \tag{17}$$

$$\mu_2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_4 + \mu_4 \cos\alpha_2 \sin\alpha_4 = 0, \tag{18}$$

$$\lambda_2 \sin\alpha_2 \sin\alpha_4 = 0, \tag{19}$$

$$\mu_2 \cos\alpha_2 \sin\alpha_4 + \mu_4 \sin\alpha_2 \cos\alpha_4 = 0. \tag{20}$$

Совместность уравнений (18) и (20) прежде всего требует, чтобы

$$\sin^2\alpha_2 = \sin^2\alpha_4,$$

или, что то же самое,

$$\cos^2\alpha_2 = \cos^2\alpha_4,$$

но тогда $\mu_2 = \mu_4$.

Уравнения (11) и (19) дают:

$$\lambda_1 = 0, \qquad \lambda_2 = 0.$$

Полагая

$$\sin\alpha_4 = \eta \sin\alpha_2, \qquad \cos\alpha_4 = -\eta \cos\alpha_2 \qquad (\eta^2 = 1),$$

найдем, что системы уравнений (7—14) (16—20) приводят к условиям:

$$\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0, \qquad \mu_1 = \mu_2 = \mu_3 = \mu_4,$$
$$\varepsilon' \sin\alpha_1 = \sin\alpha_2 = \eta\varepsilon' \sin\alpha_3 = \eta \sin\alpha_4,$$

т. е. определяют частный случай механизма Беннета-Верховского.

Остается разобрать тот случай, когда уравнения (1) и (4), связывающие в силу условий (6) величины θ_2 и θ_3, различны. Если мы представим эти уравнения в виде:

$$a_1 \cos\theta_2 + b_1 \sin\theta_2 = c_1, \qquad a_2 \cos\theta_2 + b_2 \sin\theta_2 = c_2, \tag{21}$$

то условие

$$(b_1 c_2 - b_2 c_1)^2 + (-a_1 c_2 + a_2 c_1)^2 = (-a_1 b_2 + a_2 b_1)^2 \tag{22}$$

должно выполняться тождественно относительно θ_3.

При этом, принимая во внимание значения коэффициентов уравнений (21), мы можем положить:

$$b_1 c_2 - b_2 c_1 = A_1 \sin\theta_3 + B_1 \cos\theta_3 + C_1,$$
$$-a_1 c_2 + a_2 c_1 = A_2 \sin\theta_3,$$
$$-a_1 b_2 + a_2 b_1 = A_3 \sin\theta_3 + B_3 \cos\theta_3 + C_3,$$

где

$$A_1 = -\lambda_2 \sin\alpha_2 \sin\alpha_3, \qquad B_1 = \mu_1 \cos\alpha_2 \sin\alpha_4 + \mu_3 \sin\alpha_2 \cos\alpha_4,$$
$$C_1 = \mu_1 \sin\alpha_2 \cos\alpha_4 + \mu_3 \cos\alpha_2 \sin\alpha_4,$$
$$A_2 = \mu_2 \sin\alpha_3 - \varepsilon' \mu_1 \sin\alpha_4,$$
$$A_3 = -\varepsilon' \lambda_2 \sin\alpha_2 \sin\alpha_4, \qquad B_3 = \mu_2 \cos\alpha_2 \sin\alpha_4 + \mu_4 \sin\alpha_2 \cos\alpha_4,$$
$$C_3 = \mu_2 \sin\alpha_2 \cos\alpha_4 + \mu_4 \cos\alpha_2 \sin\alpha_4.$$

Соотношение (22) принимает теперь вид:

$$(A_1 \sin\theta_3 + B_1 \cos\theta_3 + C_1)^2 + A_2^2 \sin^2\theta_3 = (A_3 \sin\theta_3 + B_3 \cos\theta_3 + C_3)^2,$$

и оно будет тождественным относительно θ_3 при условии:

$$\begin{gathered} A_1 B_1 = A_3 B_3, \quad A_1 C_1 = A_3 C_3, \quad B_1 C_1 = B_3 C_3, \\ A_1^2 + A_2^2 - A_3^2 = B_1^2 - B_3^2 = C_3^2 - C_1^2. \end{gathered} \tag{23}$$

Если $A_1 \neq 0$, то положим $A_3 = \sigma A_1$, и тогда система (23) приведется к условиям:

$$A_3 = \sigma A_1, \quad B_1 = \sigma B_3, \quad C_1 = \sigma C_3, \quad \sigma^2 = 1, \quad A_2 = 0.$$

Но условие $A_2 = 0$ приводит к случаю, рассмотренному выше, когда уравнения (1) и (4) не являлись различными.

Остается исследовать случай $A_1 = 0$, т. е.

$$\lambda_2 = 0 \quad (A_3 = 0),$$

но тогда уравнения (11) и (15) дают:

$$\lambda_1 = 0.$$

В рассматриваемом случае к уравнениям (7), (8), (19), (12), (14) мы должны присоединить условия:

$$B_1 C_1 = B_3 C_3, \quad A_2^2 = B_1^2 - B_3^2, \; B_1^2 - B_3^2 = C_3^2 - C_1^2. \tag{23'}$$

На основании уравнений (9) и (12) можно принять:

$$\frac{\mu_1}{\sin\alpha_1} = \frac{\varepsilon' \mu_2}{\sin\alpha_2} = p, \qquad \frac{\mu_3}{\sin\alpha_2} = \frac{\varepsilon' \mu_4}{\sin\alpha_1} = q; \tag{24}$$

в таком случае условие (14) дает:

$$(p^2 - q^2)(\sin^2\alpha_1 - \sin^2\alpha_2) = 0,$$

но мы должны считать, что $\sin^2\alpha_1 \neq \sin^2\alpha_2$, иначе, $A_2 = 0$; таким образом мы заключаем, что

$$p^2 = q^2, \tag{25}$$

и тогда первое и последнее из условий (23′) удовлетворяются тождественно, а среднее дает:

$$\sin^2\alpha_2 = \sin^2\alpha_3, \tag{26}$$

а потому и

$$\sin^2\alpha_1 = \sin^2\alpha_4. \tag{26'}$$

Соотношения (24), (25), (26) и (26′) при условиях $\lambda = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ характеризуют случай Верховского (III). Как вытекает из нашего анализа, единственно возможными случаями четырехзвенного пространственного механизма оказываются случаи I, II, III.

Таким образом заключение статьи А. В. Верховского (loc. cit.), что возможен четвертый случай четырехзвенного механизма, в котором концы смежных кратчайших расстояний не совпадают, оказывается неверным.

Обращаясь к основной системе уравнений (1) — (5), легко видеть, что возможны разнообразные четырехзвенные механизмы, в которых концы кратчайших расстояний с помощью ползушек перемещаются по соответствующим осям цилиндрических шарниров; ибо, считая λ, λ_1, λ_2, λ_3 переменными наряду с величинами θ_2, θ_3, θ_4, мы для этих семи величин имеем пять уравнений (1) — (5), к которым может быть присоединено во всяком случае одно добавочное условие.

Поступило в редакцию 10 VI 1938.

SUR LE MÉCANISME DE BENNETT-VERÇHOVSKY

S. S. BUSCHGENS

(Résumé)

G. T. Bennett („A new mechanism“, Engineering, Dec. 1903) a constaté dans un cas particulier la possibilité d'un mécanisme spatial à quatre tiges articulées ayant les axes de leurs charnières ni parallèles ni concourants.

Pour un quadrilatère spatial (r_1, r_2, r_3, r_4) ayant (α_1, α_2, α_3, α_4) comme valeurs des angles des axes A. A. Verchovsky (А. А. Верховский, „Четырехзвенный пространственный механизм с цилиндрическими шарнирами“, Известия Томск. технологического инст., т. 46, 1924) a obtenu quelques relations qui déterminent la configuration comme un mécanisme; il a constaté qu'elles sont vérifiées dans le cas special de Bennett:

$$r_1 = r_3, \quad \alpha_1 = \alpha_3, \qquad \frac{\sin\alpha_1}{r_1} = \frac{\sin\alpha_2}{r_2}.$$
$$r_2 = r_4, \quad \alpha_2 = \alpha_4,$$

Dans cette note je donne une analyse complète d'un mécanisme généralisé à quatre tiges articulées.

A cet effet j'emploie la méthode vectorielle qui, j'espère, pourra servir également pour le mécanisme à sept tiges articulées.

Ces considérations montrent que le mécanismes sphérique, le mécanisme ayant les axes des charnières parallèles et les mécanismes de Bennett sont les seuls mécanismes à quatre tiges articulées. Par conséquent, l'affirmation de A. Verchovsky qu'on peut écarter les pieds des tiges consécutives sur un axe dans le mécanisme de Bennett, est mal fondée.