АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Т. II, в. 4

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS
V. II, № 4

1939

ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЧАСТОТ КОЛЕБАНИЙ УПРУГИХ СИСТЕМ, ЗАГРУЖЕННЫХ ДОПОЛНИТЕЛЬНОЙ МАССОЙ

А. С. КОНДРАТЬЕВ

(Куйбышев)

Многие задачи технической теории колебаний могут быть объединены в одну проблему, содержание которой сводится к следующему.

Пусть имеется какая-либо упругая система S, могущая совершать малые колебательные движения около положения устойчивого равновесия. Образуем из S новую систему S' путем присоединения к ней новых масс

$$\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n,$$

сосредоточенных соответственно в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, причем под ξ_k будем понимать совокупность координат, определяющих положение точки μ_k.

Зная решение задачи о собственных колебаниях исходной системы S, требуется найти частоты колебаний измененной системы S'.

Эта весьма сложная и интересная проблема объединяет в себе ряд практически важных задач. Сюда относятся, например, известные задачи о продольных, поперечных и крутильных колебаниях упругих стержней с насаженными на них дисками и с учетом массы самих стержней.

В настоящей работе дается решение поставленной выше задачи при следующих гипотезах:

1. Перемещение любой точки системы S может совершаться в одном определенном направлении.

2. Положение устойчивого равновесия систем S и S' одно и то же.

3. Присоединенные массы не изменяют упругих свойств системы S.

4. Последовательность собственных функций для систем S и S' одна и та же.

Но прежде, без использования гипотезы 4, дается решение для случая загрузки, распределенной непрерывным образом вдоль линии L, на которой последовательность собственных функций системы S ортогональна.

Работа представляет собой дальнейшее развитие исследований Гершгорина[1] и моей диссертации.[2]

---

[1] См. сборник „Прикладная математика и механика" за 1933 г., т. I, вып. 1, стр. 13—37.

[2] Печатается в Записках Московского университета за 1938 г.

1. Уравнения задачи. Выведем предварительно уравнения собственных и вынужденных колебаний исходной системы S.

а) Пусть $K(x, \xi)$ есть статическое отклонение точки x от положения равновесия при действии на систему S единичной силы, приложенной в точке ξ по направлению возможного движения этой точки. Положение точки x или ξ, вообще говоря, определяется несколькими параметрами. При действии силы P указанное отклонение выразится произведением $PK(x, \xi)$, и при одновременном действии сил $P_1, P_2, \ldots, P_n$, приложенных в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, отклонение точки x по принципу независимости действия сил представится суммой

$$\sum_{\nu=1}^{n} P_\nu K(x, \xi_\nu).$$

Учтя это замечание и применяя принцип Даламбера, можем написать уравнение для собственных функций системы S.

Обозначим через $\varphi(\xi)$ амплитуду точки ξ в одном из главных собственных колебаний системы S с частотой λ. Тогда произведение $\varphi(\xi)\sin\lambda t$ будет определять это колебательное движение. Если постоянная плотность массы, входящей в S, будет ρ, то сила инерции удельного объема массы в этом движении равна

$$\rho\lambda^2\varphi(\xi)\sin\lambda t.$$

Отклонение, даваемое силами инерции, определится интегралом

$$\rho\lambda^2\int K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\sin\lambda t\,d\xi.$$

Следовательно, опуская общий множитель $\sin\lambda t$, нужное нам уравнение можно написать в виде:

$$\varphi(x)=\lambda^2\rho\int K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi. \tag{1}$$

Область интегрирования в уравнении (1) определяется конкретной задачей. Обыкновенно $K(x, \xi)$ называют „функцией влияния" или функцией Грина. Согласно физическому содержанию задачи $K(x, \xi)$ является положительно определенным ядром интегрального уравнения (1). Нормальную последовательность собственных функций уравнения (1) запишем в таком виде:

$$c_1\varphi_1(x), \quad c_2\varphi_2(x), \ldots$$

где коэффициенты $c_1, c_2, \ldots$ имеют следующие значения:

$$c_1=\frac{1}{\sqrt{\int\varphi_1{}^2(\xi)\,d\xi}}, \qquad c_2=\frac{1}{\sqrt{\int\varphi_2{}^2(\xi)\,d\xi}}, \ldots$$

б) Напишем уравнение, определяющее вынужденные колебания при действии силы $P=\sin\lambda t$, приложенной к точке ξ. Обозначим перемещение точки x от действия силы P через $w(x, \xi, \lambda t)$. Это перемещение представим в виде произведения

$$w=\omega(x, \xi, \lambda)\sin\lambda t.$$

Мы видим, что задача определения вынужденных колебаний сводится к нахождению функции $\omega(x, \xi, \lambda)$.

Используя сказанное в а), легко можем написать уравнение для определения функции $\omega(x, \xi, \lambda)$. В самом деле: по принципу независимости действия сил статическое отклонение $\vartheta(x)$ точки x при нагрузке q, распределенной по некоторой кривой, определяется интегралом:

$$\vartheta(x) = \int q(\tau) K(x, \tau)\, d\tau.$$

Принцип же Даламбера позволяет нагрузку q заменить силами инерции

$$\rho\lambda^2 \omega(x, \xi, \lambda) \sin \lambda t.$$

Отклонение $\vartheta(x)$ заменится при этом функцией:

$$\omega(x, \xi, \lambda) \sin \lambda t.$$

Следовательно,

$$\omega(x, \xi, \lambda) = K(x, \xi) + \lambda^2 \rho \int \omega(\tau, \xi, \lambda) K(x, \tau)\, d\tau. \tag{2}$$

Последнее уравнение (2) есть уравнение резольвенты ядра $K(x, \xi)$. Но ядро $K(x, \xi)$ положительно Δ, определенно, и потому функция $\omega(x, \xi, \lambda)$ может быть представлена абсолютно и равномерно сходящимся рядом:

$$\omega(x, \xi, \lambda) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu^2 \varphi_\nu(x) \varphi_\nu(\xi)}{\rho(\lambda_\nu^2 - \lambda^2)}, \tag{3}$$

где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ и $c_1\varphi_1(x), c_2\varphi_2(x), \ldots$ суть собственные числа и функции ядра $K(x, \xi)$.

в) Рассмотрим теперь одно из главных колебаний измененной системы с частотой λ и с амплитудой $\vartheta(x)$ точки x. Сила инерции J_i массы μ_i в этом движении определится произведением:

$$J_i = \mu_i \lambda^2 \vartheta(\xi_i) \sin \lambda t.$$

По идее Гершгорина действие массы μ_i на S заменяется силой J_i. Сила $P = \sin \lambda t$ перемещает точку x на $\omega(x, \xi, \lambda) \sin \lambda t$; следовательно, J_i вызовет перемещение в $\mu_i \lambda^2 \vartheta(\xi_i)$ раз больше, т. е.

$$\mu_i \lambda^2 \vartheta(\xi_i) \sin \lambda t.$$

Если мы к S присоединим n масс $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, то можно написать:

$$\vartheta(x) = \sum_{i=1}^{n} \mu_i \lambda^2 \vartheta(\xi_i) \omega(x, \xi_i, \lambda). \tag{4}$$

В случае бесконечного числа дополнительных масс $\mu_1, \mu_2, \ldots$, распределенных непрерывным образом вдоль линии L, уравнение (4) обратится в интегральное:

$$\vartheta(x) = \lambda^2 \rho_1 \int_L \omega(x, \tau, \lambda) \vartheta(\tau)\, d\tau; \tag{5}$$

здесь ρ_1 есть постоянная плотность присоединенной массы. Уравнение (5) показывает, что для определения амплитуд всех точек достаточно знать отклонения точек, лежащих на L.

Решение уравнения (5) дает спектр частот и собственные функции системы S', загруженной массой вдоль линии L. Чтобы решить задачу о колебании системы, загруженной массой, сосредоточенной в одной точке, нужно в решении уравнения (5) длину линии L уменьшить до нуля, а плотность ρ_1 массы увеличивать до бесконечности, так чтобы произведение $\rho_1 L$ оставалось постоянным и равным присоединенной к точке массе. Принимая после загруженную систему в одной точке за новую неизменную систему и используя гипотезу 4, мы получим решение задачи с загрузкой системы в двух точках. Поступая таким путем далее, мы окончательно разрешим нашу проблему.

г) В случае крутильных колебаний валов $\varphi(x)$ будет являться углом поворота сечения вала, определяемого координатой x. Функция $K(x, \xi)$ представляет собой угловое отклонение того же сечения при действии на вал пары сил с моментом, равным единице, и приложенной к сечению, проходящему через ξ (плоскость пары совпадает с плоскостью сечения).

Сила инерции какого-либо сечения в движении $\varphi(\xi)\sin\lambda t$ определится произведением:

$$J\lambda^2\varphi(\xi)\sin\lambda t,$$

так как силы инерции сечения при вращении его приводятся к паре сил с моментом:

$$J\frac{d\omega}{dt} = J\frac{d^2\varphi}{dt^2}.$$

Стало быть, для крутильных колебаний стержня уравнения (1) и (5) примут вид:

$$\varphi(x) = J\lambda^2\int K(x, \xi)\,\varphi(\xi)\,d\xi, \tag{6}$$

$$\vartheta(x) = J_1\lambda^2\int \omega(x, t, \lambda)\,\vartheta(t)\,dt, \tag{7}$$

где J — момент инерции сечения, J_1 — момент инерции присоединенной массы, приходящейся на сечение вала.

2. Решение задачи для случая загрузки, распределенной по линии специального вида. Принимая во внимание разложение (3), уравнение (5) после перестановки знаков суммирования и интегрирования преобразуется к такому виду:

$$\vartheta(x) = \frac{\lambda^2\rho_1}{\rho}\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{c_\nu^2\,\varphi_\nu(x)}{\lambda_\nu^2-\lambda^2}\cdot\int_L\varphi_\nu(\tau)\,\vartheta(\tau)\,d\tau. \tag{8}$$

Таким образом вопрос о нахождении собственных функций сводится к определению бесконечного числа неизвестных констант:

$$A_k = \int_L \varphi_k(\tau)\,\vartheta(\tau)\,d\tau. \tag{9}$$

Подставим в выражения этих констант разложение функции $\vartheta(\tau)$, даваемое рядом (8):

$$A_k = \frac{\lambda^2 \rho_1}{\rho} \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{c_\nu^2 A_\nu}{\lambda_\nu^2 - \lambda^2} \cdot \int_L \varphi_\nu(\tau)\, \varphi_k(\tau)\, d\tau. \tag{10}$$

Следовательно, постоянные A_k определяются однородной системой алгебраических уравнений с бесконечным числом неизвестных. Определитель этой системы имеет вид:

$$D = \begin{vmatrix} \frac{c_1^2 \beta_{11}}{\lambda_1^2 - \lambda^2} - \frac{\rho}{\lambda^2 \rho_1} & \frac{c_2^2 \beta_{21}}{\lambda_2^2 - \lambda^2} & \cdots \\ \frac{c_1^2 \beta_{12}}{\lambda_1^2 - \lambda^2} & \frac{c_2^2 \beta_{22}}{\lambda_2^2 - \lambda^2} - \frac{\rho}{\lambda^2 \rho_1} & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots \end{vmatrix}, \tag{11}$$

где

$$\beta_{\nu k} = \int_{(L)} \varphi_\nu(\tau)\, \varphi_k(\tau)\, d\tau.$$

В теории таких уравнений доказывается теорема: для того чтобы система однородных уравнений с определителем D нормальной формы имела решения, все одновременно отличные от нуля, необходимо равенство определителя D нулю. При этом бесконечный определитель D имеет нормальную форму, если только произведение его диагональных элементов и сумма всех остальных элементов сходятся абсолютно.

Оставляя вопрос об исследовании нормальной формы определителя (11) в общем случае, отметим один частный случай.

Возьмем за линию L такую, на которой известная нам последовательность функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots$ будет ортогональна. Тогда в определителе (11) все элементы, исключая диагональных, обратятся в нули, а произведение диагональных элементов

$$\prod_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \frac{c_\nu^2 \beta_{\nu\nu} \lambda^2 \rho_1}{\rho(\lambda_\nu^2 - \lambda^2)}\right] = \frac{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left[1 - \left(1 + c_\nu^2 \beta_{\nu\nu} \frac{\rho_1}{\rho}\right) \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right]}{\prod_{\nu=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}\right)} \tag{12}$$

в силу абсолютной сходимости ряда

$$\sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{\lambda^2}{\lambda_\nu^2}$$

при любом фиксированном значении λ^2 сходится абсолютно.

Следовательно, условие нормальной формы определителя уравнений (10) для этого частного случая загрузки выполняется.

Корни этого определителя, которые суть нули функции (12), дают нам спектр частот измененной системы для случая специально подобранной линии L.

Итак, мы приходим к теореме: *если* λ_1, λ_2, $\lambda_3, \ldots$ *есть спектр частот, а* $c_1 \varphi_1$, $c_2 \varphi_2$, $c_3 \varphi_3, \ldots$ *суть нормальная последовательность собственных функций системы* S, *и если на линии L собственные функции S ортогональны, то спектр частот измененной системы S' определится последовательностью:*

$$\frac{\lambda_1}{\sqrt{1+\frac{\rho_1\beta_1 c_1^2}{\rho}}}, \quad \frac{\lambda_2}{\sqrt{1+\frac{\rho_1\beta_2 c_2^2}{\rho}}}, \ldots$$

Так, например, применяя эту теорему к нахождению частот колебаний прямоугольной мембраны с длинами сторон a и b, загруженной по прямой линии, идущей параллельно граничной стороне a, получим:

$$\lambda'_{\nu i}=\frac{\pi\sqrt{\tau\left(\frac{i^2}{a^2}+\frac{\nu^2}{b^2}\right)}}{\sqrt{\rho+\rho_1\frac{2}{b}\sin^2\frac{\nu\pi y}{b}}},$$

где τ — натяжение.

3. Решение задачи для случая малой плотности присоединенной массы без использования гипотезы 4. Возьмем теперь плотность массы ρ_1, распределенной по линии L, по величине настолько малой, что спектр частот $\lambda_1', \lambda_2', \ldots$ измененной системы будет мало чем отличаться от частот $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ неизменной системы.

Вообще уменьшением плотности ρ_1 можно добиться того, что разность

$$\lambda_\nu'-\lambda_\nu \qquad (\nu=1, 2, \ldots \infty)$$

по абсолютной величине может быть сделана как угодно малой, т. е.

$$|\lambda_\nu'-\lambda_\nu|<\varepsilon,$$

где ε есть произвольное положительное число. Это физически очевидное положение позволяет для случая малой плотности присоединенной массы приближенно разрешить уравнения (10). Более того, путем уменьшения плотности ρ_1 приближенное решение можно сделать как угодно близким к точному. Будем искать ν-ю частоту и соответствующую ей собственную функцию.

При уменьшении ρ_1 до нуля разность $\lambda_\nu^2-\lambda_\nu'^2$ также стремится к нулю, отчего для случая малой плотности ρ_1 всеми членами, малыми по сравнению с

$$\frac{\rho_1\varphi_\nu(x)A_\nu\lambda_\nu'}{\rho(\lambda_\nu^2-\lambda_\nu'^2)},$$

можно пренебречь. После отбрасывания указанных членов уравнение (8) примет вид:

$$\vartheta(x)=\frac{\rho_1\lambda^2}{\rho}\cdot\frac{\varphi_\nu(x)A_\nu}{\lambda_\nu^2-\lambda^2}. \tag{13}$$

Таким образом присоединенная масса малой плотности не изменяет собственных функций системы S. Изменяется только масштаб их.

Отбрасывая все элементы частотного уравнения (11), кроме одного диагонального

$$\frac{c_\nu^2\beta_{\nu\nu}}{\lambda_\nu^2-\lambda^2}-\frac{\rho}{\lambda^2\rho_1},$$

как малые по сравнению с последним, получим:

$$\lambda_\nu' = \frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1 + \frac{\rho_1}{\rho}\beta_{\nu\nu} c_\nu^2}}.$$

При загрузке массой m, сосредоточенной в точке ξ, найдем:

$$\lim_{\substack{L \to 0 \\ \rho_1 \to \infty}} \rho_1 \cdot \int_L [\varphi_\nu(\tau)]^2 d\tau = [\varphi_\nu(\xi)]^2 m,$$

так что

$$\lambda_\nu' = \frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1 + \frac{m\varphi_\nu^2(\xi) c_\nu^2}{\rho}}}. \tag{14}$$

С практической точки зрения полученное решение неинтересно. Это потому, что в практических задачах присоединенная масса должна быть одинакового порядка с основной массой системы или же значительно превосходить ее.[1]

4. Решение задачи для случая произвольной (но конечной) плотности присоединенной массы. Пользуясь гипотезой о неизменности собственных функций систем S и S', докажем теорему: если последовательность собственных функций систем S и S' одна и та же, то при дополнительной массе какой угодно конечной плотности, распределенной по произвольной линии L, спектр частот системы S' определяется последовательностью:

$$\lambda_\nu' = \frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1 + \frac{\rho_1}{\rho}\beta_{\nu\nu} c_\nu^2}} \quad \nu = 1, 2, \ldots, \infty,$$

а если дополнительная масса распределена по нескольким линиям $L_1, L_2, \ldots, L$, (плотности соответственно $\rho_1, \rho_2, \ldots$), то спектр частот системы S' определяется последовательностью:

$$\lambda_\nu' = \frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1 + \frac{c_\nu^2}{\rho}\sum_{i=1}^{n} \rho_i \beta_{i\nu}}},$$

где

$$\beta_{i\nu} = \int_{L_i} \varphi_\nu^2(\tau)\, d\tau.$$

Для доказательства введем в рассмотрение вспомогательную последовательность механических систем:

$$S_1', S_2', \ldots, S_k' = S', \tag{15}$$

так что S_1' — система S с дополнительно присоединенной к ней массой плотности ρ_1/k, распределенной по линии L_1, S_2' — система S_1' с дополни-

---

[1] Отметим еще, что результат настоящего пункта для загрузки систем с конечным числом степеней свободы имеется в работе Каца „Влияние малых изменений масс на собственные частоты колеблющейся системы“ (см. Труды Ленинградского индустриального института за 1936 г., № 6).

тельно присоединенной к ней массой плотности ρ_1/k, распределенной по той же линии L_1, и т. д.

Спектры частот систем (15) соответственно обозначим так:

$$\begin{array}{lll} \lambda_{11}', & \lambda_{12}', & \ldots \\ \lambda_{21}', & \lambda_{22}', & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots \\ \lambda_{k1}'=\lambda_1', & \lambda_{k2}'=\lambda_2', & \ldots \end{array}$$

На основании результата пункта 3 и гипотезы 4 имеем:

$$\lambda_{1\nu}'=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1+\frac{\rho_1}{k\rho}\beta_{1\nu}c_\nu^2}}. \qquad (\nu=1, 2, \ldots, \infty)$$

В последних равенствах подкоренное слагаемое

$$\frac{\rho_1\beta_{1\nu}c_\nu^2}{k\rho}=\frac{\rho_1\int\limits_{L_1}\varphi_\nu^2(\tau)\,d\tau}{k\rho\int\varphi_\nu^2(\tau)\,d\tau}$$

представляет собой отношение суммы произведений присоединенной массы в точке на квадрат отклонения этой точки к сумме произведений массы точки системы на квадрат ее отклонения.

Для измененной системы S_2' указанное отношение равно:

$$\frac{\frac{\rho_1}{k}\int\limits_{L_1}\varphi_\nu^2(\tau)\,d\tau}{\rho\int\varphi_\nu^2(\tau)\,d\tau+\frac{\rho_1}{k}\int\limits_{L_1}\varphi_\nu^2(\tau)\,d\tau}=\frac{\frac{\rho_1}{k}\beta_{1\nu}}{\frac{\rho}{c_\nu^2}+\frac{\rho_1}{k}\beta_{1\nu}}.$$

Для других систем последовательности (15) это отношение найдется аналогичным образом.

Сделанное замечание без труда позволяет определить частоты всех систем последовательности (15).

Имеем:

$$\lambda_{2\nu}'=\frac{\lambda_{1\nu}'}{\sqrt{1+\frac{\rho_1\beta_{1\nu}}{k\left(\frac{\rho}{c_\nu^2}+\frac{1}{k}\rho_1\beta_{1\nu}\right)}}}, \ldots, \qquad \lambda_{k\nu}'=\frac{\lambda_{k-1,\nu}'}{\sqrt{1+\frac{\rho_1\beta_{1\nu}}{k\left(\frac{\rho}{c_\nu^2}+\frac{k-1}{k}\rho_1\beta_{1\nu}\right)}}}.$$

Последние ряды равенств путем последовательной подстановки позволяют частоты λ_{k1}', λ_{k2}', ... выразить через λ_1, λ_2, ... Таким путем мы приближенно определим λ_{k1}', λ_{k2}', ... Увеличением числа k до бесконечности, т. е. предельным переходом, решим вопрос о частотах точно.

Сделав указанные подстановки, находим:

$$\lambda_{k\nu}'=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{\left[1+\frac{\rho_1}{k\rho}\beta_{1\nu}c_\nu^2\right]\left[1+\frac{\rho_1\beta_{1\nu}c_\nu^2}{k\left(\rho+\frac{\rho_1}{k}\beta_{1\nu}c_\nu^2\right)}\right]\left[1+\frac{\rho_1\beta_{1\nu}c_\nu^2}{k\left(\rho+\frac{2\rho_1}{k}\beta_{1\nu}c_\nu^2\right)}\right]\cdots\left[1+\frac{\rho_1\beta_{1\nu}c_\nu^2}{k\left(\rho+\frac{k-1}{k}\rho_1\beta_{1\nu}c_\nu^2\right)}\right]}}$$

или, после сокращения в подкоренном выражении,

$$\lambda'_{k\nu}=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1+\frac{\rho_1\beta_{1\nu}c_\nu^2}{\rho}}}.$$

Предельный переход совершать не приходится, так как $\lambda'_{k\nu}$ не зависит даже от числа k.

Итак, первая часть теоремы доказана. Вторую часть теоремы докажем путем последовательного применения первой части к ряду систем:

$$S'_{L_1},\quad S'_{L_1-L_2},\ldots,\quad S'_{L_1-L_n},\tag{16}$$

где под $S'_{L_1-L_n}$ разумеется система S, загруженная по линиям $L_1, L_2, \ldots, L_n$.

На основании первой части теоремы частоты системы S'_{L_1} будут равны:

$$\lambda'_{\nu L_1}=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1+\frac{\rho_1}{\rho_2}\beta_{1\nu}c_\nu^2}},$$

а частоты системы $S'_{L_1-L_2}$ будут:

$$\lambda'_{\nu,L_1-L_2}=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{\left(1+\frac{\rho_1}{\rho}\beta_{1\nu}c_\nu^2\right)\left(1+\frac{\rho_2\beta_{2\nu}}{\frac{\rho}{c_\nu^2}+\rho_1\beta_{1\nu}}\right)}}=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1+\frac{c_\nu^2}{\rho}(\rho_1\beta_{1\nu}+\rho_2\beta_{2\nu})}}.$$

Полагая теперь частоты системы $S'_{L_1-L_{n-1}}$ равными:

$$\lambda'_{\nu,L_1-L_{n-1}}=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1+\frac{c_\nu^2}{\rho}\left(\rho_1\beta_{1\nu}+\rho_2\beta_{2\nu}+\ldots+\rho_{n-1}\beta_{n-1,\nu}\right)}}$$

и применяя опять первую часть теоремы, найдем частоты системы $S'_{L_1-L_n}$:

$$\lambda_\nu'=\frac{\lambda'_{\nu,L_1-L_{n-1}}}{\sqrt{1+\frac{\rho_n\beta_{\nu n}}{c_\nu^2+\rho_1\beta_{\nu 1}+\ldots+\rho_{n-1}\beta_{\nu,n-1}}}}=$$

$$=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{\left[1+\frac{c_\nu^2}{\rho}(\rho_1\beta_{\nu 1}+\ldots+\rho_{n-1}\beta_{\nu,n-1})\right]\left[1+\frac{\rho_n\beta_{\nu n}c_\nu^2}{\rho+c_\nu^2(\rho_1\beta_{\nu 1}+\ldots+\rho_{n-1}\beta_{\nu,n-1})}\right]}}=$$

$$=\frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1+\frac{c_\nu^2}{\rho}(\rho_1\beta_{\nu 1}+\ldots+\rho_n\beta_{\nu n})}}.\tag{17}$$

Чтобы найти частоты системы, загруженной массой, сосредоточенной в точках, нужно длины всех линий $L_1, L_2, \ldots, L_n$ в формуле (17) уменьшить до нуля, а плотности $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ увеличивать до бесконечности, так чтобы произведения $\rho_1 L_1$, $\rho_2 L_2, \ldots, \rho_n L_2$ оставались постоянными, соответственно равными присоединенным в точках массам $m_1, m_2, \ldots, m_n$.

Предел произведения $\rho_\nu L_\nu$ при одновременном уменьшении L_ν и увеличении ρ_ν по замеченному закону равен $\varphi_\nu^2(\xi)m_\nu$, а потому частоты системы, загруженной массами $m_1, m_2, \ldots, m_n$, сосредоточенными в точках $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n$, будут определяться формулой:

$$\lambda_\nu' = \frac{\lambda_\nu}{\sqrt{1+\frac{c_\nu^2}{\rho}\left[m_1\varphi_\nu^2(\xi_1)+\ldots+m_n\varphi_\nu^2(\xi_\nu)\right]}}. \tag{18}$$

Замечание. Для крутильных колебаний вала, несущего n дисков с моментами инерций $J_1, J_2, \ldots, J_n$, формула (18) примет вид:

$$\lambda_\nu'^2 = \frac{\lambda_\nu^2}{1+2\pi\frac{c_\nu^2}{J}\sum_{k=1}^{n}\varphi_\nu^2(\xi_k)J_k},$$

где J — момент инерции сечения вала.

5. Колебания квадратной свободно опертой пластинки с одной массой, помещенной в центре ее. Приближенно задача решена Герпгориным.[1] Цель приведения ее здесь — сравнить результат его вычислений частот с частотами, которые дает формула (18), с тем чтобы судить о реальности введения гипотезы 4 и правильности формулы (18).

Частоты пластинки, загруженной в центре массой, Герпгорин определяет из уравнения

$$f_1(k) = k\sum_{m=1}^{\infty}\left[\frac{\operatorname{th}\frac{\pi\cdot\sqrt{(2m+1)^2-k}}{2}}{\sqrt{(2m+1)^2-k}} - \frac{\operatorname{th}\frac{\pi\sqrt{(2m+1)^2+k}}{2}}{\sqrt{(2m+1)^2+k}}\right] = \frac{2Q}{\pi P}, \tag{19}$$

где Q — вес всей пластинки, $P = mg$ — вес присоединенной массы. При этом искомая частота связана с числом k соотношением:

$$\lambda = k\frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{gN}{\gamma h}},$$

где N — жесткость пластинки, γ — удельный вес, h — толщина и a — размер.

Для нахождения корней уравнения (19) им была составлена таблица, которая позволяет найти три наименьших частоты колебаний.

Определим меньшую из них формулой (18). Без загрузки частоты и собственные функции пластинки суть:

$$\varphi_{mn}(x, y) = \frac{4}{a^2}\sin\frac{\pi mx}{a}\sin\frac{\pi ny}{a},$$

$$(m, n = 1, 2, \ldots, \infty)$$

$$\lambda_{mn} = \frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{gN}{\gamma h}}(m^2+n^2).$$

Следовательно,

$$\lambda_1' = \frac{2\frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{gN}{\gamma h}}}{\sqrt{1+\frac{4P}{Q}}} = k\frac{\pi^2}{a^2}\sqrt{\frac{gN}{\gamma h}},$$

[1] См. указанную ранее его работу.

причем

$$k = \frac{2}{\sqrt{1 + \frac{4P}{Q}}}.$$

Значения k для различных значений отношения P/Q приведены в табл. 1.

Таблица 1

$\frac{2}{\pi}\frac{Q}{P}$	0.0289	0.1197	0.2818	0.5382	0.9323	1.3698
k	0.22	0.42	0.62	0.83	1.04	1.19
$\frac{2}{\pi}\frac{Q}{P}$	2.6115	4.7415	7.4900	11.1529	24.3803	∞
k	1.43	1.61	1.72	1.80	1.89	2

Совершенно такие же значения k соответствуют указанным значениям отношения $\frac{2}{\pi}\frac{Q}{P}$ и по таблице Гершгорина, т. е. наши вычисления полностью совпадают с вычислениями Гершгорина. Но по формуле (18) определение частот производится весьма просто, тогда как решение частотного уравнения (19) представляет большие вычислительные трудности.

6. Продольные колебания призматического стержня с грузом на конце. С целью подтверждения правильности результата пункта 4 рассмотрим еще задачу о нахождении частот колебаний стержня длины l с грузом на конце. В книге Тимошенко[1] эти частоты определяются из уравнения:

$$\alpha = \beta \operatorname{tg} \beta,$$

где $\alpha = \frac{A\gamma l}{W}$, т. е. есть отношение веса стержня к весу W присоединенного груза, и $\beta = \lambda l \sqrt{\frac{\gamma}{Eg}}$ (λ — частота, E — модуль упругости). Значения наименьшего корня частотного уравнения для различных значений α приведены в табл. 2.

Таблица 2

α	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.5
β_1	0.10	0.32	0.52	0.65	0.75	0.82	0.86	0.98
α	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0	20.0	100.0	∞
β_1	1.13	1.20	1.27	1.32	1.42	1.52	1.56	1.571

[1] См., например, Тимошенко, Теория колебаний в инженерном деле. ГИЗ, стр. 208, 1932 г.

Теперь мы решим приводимый пример методом пункта 4. Частоты и собственные функции продольных колебаний стержня без груза, как известно, суть:

$$c_n^2 \varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{l}} \sin \frac{\lambda_n}{a} x,$$

$$(n = 1, 3, 5, \ldots, \infty)$$

$$\lambda_n = \frac{\pi n a}{2l} = \frac{\pi n}{2l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}.$$

Следовательно, на основании формулы (18) значение n-й частоты колебаний стержня с грузом веса W на конце будет равно:

$$\lambda_n' = \frac{\frac{\pi n}{2l} \sqrt{\frac{Eg}{\gamma}}}{\sqrt{1 + \frac{2W}{\rho l} \sin^2 \frac{\pi}{2} n}},$$

или, вводя обозначения:

$$\frac{W}{\rho l} = \frac{1}{\alpha}, \qquad \frac{\lambda l}{\sqrt{\frac{Eg}{\rho}}} = \beta,$$

получим:

$$\beta_n = \frac{\frac{\pi}{2} n}{\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha} \sin^2 \frac{\pi}{2} n}}.$$

Для $n = 1$ имеем:

$$\beta_1 = \frac{\frac{\pi}{2}}{\sqrt{1 + \frac{2}{\alpha}}}. \tag{20}$$

Для значений α тех же, что и в приведенной выше табл. 2, соответствующие значения β_1, вычисленные по формуле (20), приведены в табл. 3.

Таблица 3

α	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.5
β_1	0.11	0.34	0.57	0.70	0.80	0.87	0.91	1.02
α	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0	20.0	100.0	∞
β_1	1.11	1.22	1.29	1.33	1.43	1.51	1.55	$\frac{\pi}{2}$

Из сравнения приведенных таблиц легко составить таблицу ошибок в процентах, которые получаются при подсчете частоты основного тона по формуле (20) по сравнению с значением ее, взятым из табл. 2.

Таблица 4

α	0.01	0.1	0.3	0.5	0.7	0.9	1.0	1.5
Ошибка в % для β	10	6.1	9.6	7.7	6.6	6.0	5.8	4.0
α	2.0	3.0	4.0	5.0	10.0	20.0	100.0	∞
Ошибка в % для β	1.8	1.7	1.6	0.8	0.7	0.7	0.6	0

Начиная с отношения веса груза к весу стержня, равного половине и меньше, совпадение результатов можно считать вполне удовлетворительным. Расхождение следует отнести за счет отклонений собственных функций стержня без груза от собственных функций стержня с грузом.

Если учесть трудность решаемой проблемы, простоту ее решения формулой (18) и удовлетворительное согласие вычислений частот по этой формуле с известными уже ранее решениями, то становится весьма целесообразным при приближенном решении вопроса о частотах загруженной системы пользоваться формулой (18). Заметим еще, что гипотезы, лежащие в основе доказательства формулы (18), в литературе являются общепринятыми.

Поступило в редакцию 31 V 1938.

BESTIMMUNG DER SCHWINGUNGSFREQUENZ VON MIT NACHTRÄGLICHER MASSE BELASTETEN ELASTISCHEN SYSTEMEN

A. S. KONDRATJEW

(Zusammenfassung)

Es wird das Probelm der Frequenz von kleinen Schwingungen eines elastischen Systems gestellt (Stab, Platte), das mit nachträglicher Masse belastet ist, die in kontinuierlicher Weise auf der Linie verteilt oder in einzelnen Punkten konzentriert ist.

Eine genaue Lösung der angegebenen Aufgabe wird unter Zulassung folgender Hypothesen gegeben:

1. Die Verschiebung eines beliebigen Punktes des Systems S (ohne Belastung) kann sich in einer bestimmten Richtung vollziehen.

2. Die labile Gleichgewichtslage der Systeme S und S_1 bleibt bei Belastung dieselbe.

3. Die beigefügten Massen verändern nicht die elastischen Eigenschaften des Systems S.

4. Die Reihenfolge der Eigenfunktionen für die Systeme S und S_1 ist dieselbe.

Ausserdem wird ohne Anwendung der Hypothese 4 die Lösung für den Fall der Belastung längst der Linie L gegeben, auf der die Reihenfolge der Eigenfunktionen des Systems S orthogonal ist.

Das am Schluss der Arbeit erhaltene Ergebnis wird zur Lösung der Beispiele verwendet.