А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS

ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 4 1939 V. II, № 4

О ПРИМЕНЕНИИ МЕТОДА ЗАМЕЩАЮЩИХ ТОЧЕК В ДИНАМИКЕ ПЛОСКОГО ДВИЖЕНИЯ

Я. Л. ГЕРОНИМУС

(Харьков)

Как известно, в теории плоских механизмов с большим успехом применяется метод динамической редукции масс, известный под названием метода замещающих точек[1] — каждое плоское звено заменяют системой сосредоточенных масс, которая динамически эквивалентна данному звену, т. е. имеет такую же живую силу и такие же главный вектор и главный момент инерционных сил, как данное звено.

Целью предлагаемой заметки является применение указанного метода уже не к плоской фигуре, а к пространственному твердому телу, движущемуся плоским движением.

§ 1. Пусть центр тяжести нашего тела находится в точке C_0 и пусть скорости всех точек тела параллельны плоскости xC_0y. Легко видеть, что главный вектор $\mathbf{R}$ и главный момент $\mathbf{L}$ инерционных сил (относительно C_0) даются следующими формулами:

$$\mathbf{R}=-M\mathbf{w}_C, \quad \mathbf{L}=\mathbf{i}(-D\omega^2+E\varepsilon)+\mathbf{j}(E\omega^2+D\varepsilon)-\mathbf{k}J\varepsilon, \tag{1}$$

где M — масса тела, $\mathbf{w}_C$ — ускорение центра тяжести тела, ω и ε — угловые скорость и ускорение, а через D, E и J обозначены моменты инерции, соответственно равные

$$D=\sum myz, \quad E=\sum mxz, \quad J=\sum m(x^2+y^2). \tag{2}$$

Заменим наше тело двумя массами m_1 и m_2, помещенными в точках $M_1(x_1, y_1, z_1)$ и $M_2(x_2, y_2, z_2)$, причем потребуем выполнения следующих условий:

$$m_1x_1+m_2x_2=m_1y_1+m_2y_2=m_1z_1+m_2z_2=0, \tag{3'}$$

$$m_1y_1z_1+m_2y_2z_2=D, \quad m_1x_1z_1+m_2x_2z_2=E, \quad m_1(x_1^2+y_1^2)+m_2(x_2^2+y_2^2)=J, \tag{3''}$$

$$m_1+m_2=M. \tag{3'''}$$

Условие (3′) требует, чтобы центр тяжести масс m_1 и m_2 находился в точке C_0; условие (3″) требует, чтобы моменты инерции D, E, J для наших масс были такими же, как для тела; наконец, по условию (3‴) сумма их масс должна быть равна массе тела.

[1] W i t t e n b a u e r F. Graphische Dynamik.

При выполнении этих условий массы m_1 и m_2 при плоском движении тела, параллельном плоскости xC_0y, будут динамически ему эквивалентны, как это ясно из (1).

Из (3') и (3'') находим:

$$m_2 y_2 (z_2 - z_1) = D, \quad m_2 x_2 (z_2 - z_1) = E, \tag{4}$$

откуда вытекает пропорция:

$$\frac{y_1}{x_1} = \frac{y_2}{x_2} = \frac{D}{E}, \tag{5}$$

показывающая, что точки M_1 и M_2 должны лежать в вертикальной плоскости проходящей через C_0 и образующей с плоскостью xC_0z угол $\operatorname{arc\,tg}\frac{D}{E}$.

Если ввести обозначения

$$r_1 = \sqrt{x_1^2 + y_1^2}, \quad r_2 = \sqrt{x_2^2 + y_2^2}, \quad J = M\rho^2, \tag{6}$$

то мы получим:

$$r_1 r_2 = \rho^2, \tag{7'}$$

$$z_2 r_1 = -\frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{M}. \tag{7''}$$

Возьмем r_1 произвольным, что мы можем сделать, ибо имеем восемь неизвестных, связанных семью уравнениями; координату z_2 найдем, построив равнобочную гиперболу:

$$z_2 r_1 = -\frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{M};$$

если $B'C_0 = r_1$ и $C_0E' = \rho$, то, соединяя B' с E' и проводя $E'D' \perp B'E'$, найдем $C_0D' = r_2$; проводя $A'L' \perp C_0z$ до пересечения с $D'G$, найдем точку M_2; проводя M_2C_0 до пересечения с $B'F$, найдем точку M_1. Массы m_1 и m_2 найдутся обычным статическим разносом массы M, сосредоточенной в C_0, в точки M_1 и M_2 (фиг. 1).

Таким образом при движении нашего тела параллельно плоскости xC_0y система его инерционных сил эквивалентна силам инерции двух масс m_1 и m_2, помещенных в точках M_1 и M_2; эти точки можно подобрать бесчисленным множеством способов согласно указанному построению.

§ 2. Рассмотрим теперь тот частный случай, когда плоское движение является вращением вокруг оси; пусть сперва ось вращения, параллельная C_0z, лежит в плоскости P, проведенной через C_0z под углом $\operatorname{arc\,tg}\frac{D}{E}$.

В этом случае, помещая точку M_1 на оси вращения, найдем точку M_2 указанным построением. Согласно общей теории, массы m_1 и m_2 будут динамически эквивалентны нашему телу, а так как точка M_1 неподвижна, то при нахождении кинетической энергии, а также инерционных сил тела, надо принять во внимание только массу m_2.

Мы покажем в § 3, что всякая ось, лежащая в плоскости P и параллельная оси C_0z, будет главной осью инерции для той своей точки, которая лежит в пересечении этой оси с равнобочной гиперболой:

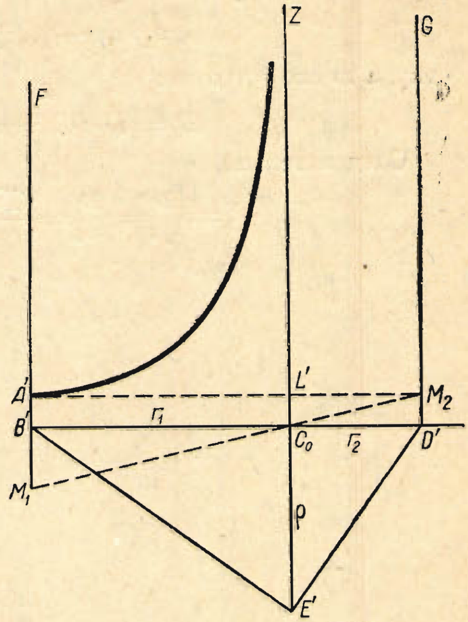
$$zr = -\frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{M}; \tag{8}$$

поэтому, если ось вращения является главной осью инерции для точки A (фиг. 1), то движение тела под действием заданных сил будет таким же, как движение массы m_2; ее надо поместить в точку M_2 оси качаний, если за ось подвеса взять ось вращения, причем $A'M_2 \perp C_0 z$.

Отсюда, в частности, сразу вытекает известная теория центра удара: удар S любой интенсивности, проходящий через точку M_2 перпендикулярно к плоскости P, вызывает движение по закону

$$\Delta\omega = \frac{S}{m_2 M_2 \overline{A'}^2} \tag{9}$$

и не передается на ось.



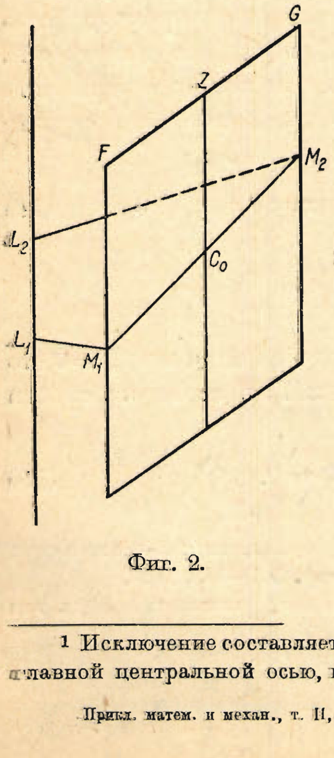
Фиг. 1.

Пусть теперь ось вращения не лежит в плоскости P; в таком случае, как будет показано в § 3, она не может быть главной осью инерции ни для одной из своих точек.[1]

В этом общем случае нельзя поместить одну из масс на оси вращения; наше тело будет динамически эквивалентно двум массам m_1 и m_2. Отсюда, в частности, можно получить такой результат, относящийся к удару: удары, приложенные к твердому телу, вращающемуся вокруг оси (фиг. 2), не являющейся главной ни для одной из своих точек, не передаются на эту ось только в случае двух ударов S_1 и S_2, приложенных в точках M_1 и M_2 перпендикулярно к плоскостям L_1M_1F и L_2M_2G и удовлетворяющих соотношению:

$$S_1 : S_2 = m_1 \overline{M_1 L_1} : m_2 \overline{M_2 L_2}, \tag{10}$$

где $\overline{M_1 L_1}$ и $\overline{M_2 L_2}$ — расстояния точек M_1 и M_2 от оси вращения.



Фиг. 2.

§ 3. Рассмотрим теперь несколько подробнее свойства главных осей инерции.

Пусть уравнение центрального эллипсоида инерции будет:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 - 2Dyz - 2Exz - 2Fxy = 1$$
$$(D^2 + E^2 > 0), \tag{11}$$

где

$$A = \Sigma m(y^2 + z^2), \quad B = \Sigma m(x^2 + z^2), \quad C = \Sigma m(x^2 + y^2),$$
$$D = \Sigma myz, \qquad E = \Sigma mxz \qquad F = \Sigma mxy.$$

[1] Исключение составляет тот случай, когда $D = E = 0$; в этом случае ось $C_0 z$ является главной центральной осью, и все оси, ей параллельные, будут главными осями инерции.

Не уменьшая общности, можно рассмотреть все оси, параллельные оси $C_0 z$, чтобы выяснить, какие из них могут быть главными.

Если ось Oz_1 является главной для точки $O(\xi, \eta, \zeta)$, то мы имеем:

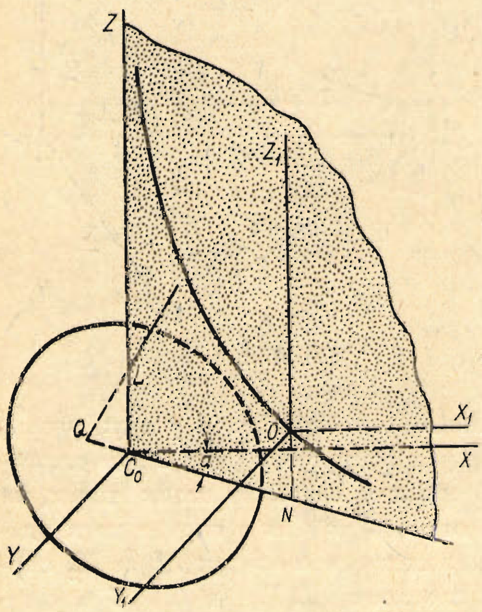
$$x_1 = x - \xi, \quad y_1 = y - \eta, \quad z_1 = z - \zeta,$$

откуда легко находим:

$$D_1 = D + M\zeta\eta = 0, \quad E_1 = E + M\zeta\xi = 0. \tag{12}$$

Следовательно,

$$-\zeta = \frac{D}{M\xi} = \frac{E}{M\xi} = \frac{\sqrt{D^2 + E^2}}{Mr}, \qquad r = C_0 N = \sqrt{\xi^2 + \eta^2}. \tag{13}$$



Фиг. 3.

Таким образом точка (ξ, η) и ось Oz_1 лежат в плоскости, проходящей через $C_0 z$ под углом $\alpha = \operatorname{arc\,tg} \frac{D}{E}$ к плоскости $xC_0 z$ (фиг. 3).

Мы приходим к следующему результату: оси, параллельные данному направлению $C_0 z$, будут главными для одной из своих точек, если они лежат в плоскости, проходящей через $C_0 z$ и через нормаль LQ к центральному эллипсоиду инерции, проведенную в точке его пересечения с $C_0 z$; точки, в которых эти оси будут главными, лежат на равнобочной гиперболе (13).[1]

Нетрудно также получить, что из всех осей, проходящих через заданную точку $K(\xi, \eta, \zeta)$, главными могут быть только образующие конуса с вершиной в K, направляющей которого служит равнобочная гипербола:

$$xy(A - B) - x\eta(C - B) - y\xi(A - C) = 0, \quad z = 0 \quad (\zeta \neq 0), \tag{14}$$

причем эллипсоид инерции отнесен к главным осям:

$$Ax^2 + By^2 + Cz^2 = 1;$$

если же точка K лежит в одной из главных плоскостей, например $\zeta = 0$, то главными осями, проходящими через точку K, будут: 1) прямые плоскости $z = 0$, 2) прямые плоскости:[2]

$$x\eta(C - A) + y\xi(B - C) + \xi\eta(A - B) = 0. \tag{15}$$

[1] См. Я. Геронимус, О главных осях инерции. Сборник научно-технических статей Харьковского электротехнического института, вып. I, стр. 107—113, 1934.

См. также А. Акопян, О свойствах центробежного момента, рассматриваемого как вектор. Прикладная математика и механика, т. II, стр. 61—73, 1934.

[2] См. Я. Геронимус, op. cit.

Отметим в заключение результат, позволяющий выяснить расположение главных осей в данной плоскости: из всех прямых, лежащих в данной плоскости $z=h$, главными осями будут только те, которые касаются параболы с директриссой

$$Dx - Ey = 0, \quad z = h, \tag{16}$$

и фокусом

$$x = \frac{2DF + E(B-A)}{D^2+E^2}\,h, \qquad y = \frac{2EF + D(A-B)}{D^2+E^2}\,h, \qquad z = h. \tag{17}$$

Для доказательства этого последнего утверждения возьмем луч

$$\eta = k\xi, \quad \zeta = 0 \tag{18}$$

и проведем плоскость через него и через нормаль к эллипсоиду инерции в точке его пересечения с этим лучом; уравнение этой плоскости, как нетрудно видеть, будет:

$$\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & k & 0 \\ A - Fk & -F + Bk & -E - Dk \end{vmatrix} = \\ = (kx - y)(Dk + E) + z[(A-B)k + F(1-k^2)] = 0; \tag{19}$$

полагая $z=h$, мы найдем ту прямую плоскости $z=h$, параллельную лучу (18), которая будет главной осью инерции.

Огибающей этих прямых

$$(kx - y)(Dk + E) + h[(A-B)k + F(1-k^2)] = 0, \quad z = h \tag{19'}$$

служит парабола

$$(Dy + Ex)^2 - 2xh[2DF - (A-B)E] - 2yh[2EF + (A-B)D] + \\ + h^2[4F^2 + (A-B)^2] = 0, \quad z = h \tag{20}$$

(уравнение получено дифференцированием (19′) по k и исключением k). Отсюда легко вывести формулы (16) и (17).

Пользуясь формулой (22), выведенной в цитированной выше заметке автора, нетрудно получить, что каждая прямая, касающаяся параболы (20) будет главной осью инерции в точке, которую мы найдем, проектируя на эту прямую конец вектора

$$\frac{\mathbf{i}E + \mathbf{j}D}{Mh}. \tag{21}$$

Геометрическим местом этих точек служит кривая третьего порядка:

$$\left(\frac{x}{Mhy - D} + \frac{y}{Mhx - E}\right)\left(\frac{D}{Mhy - D} - \frac{E}{Mhx - E}\right) - \\ - \left\{A - B - F\left[\frac{Mhy - D}{Mhx - E} - \frac{Mhx - E}{Mhy - D}\right]\right\}\frac{h}{(Mhx - E)(Mhy - D)} = 0, \qquad z = h; \tag{22}$$

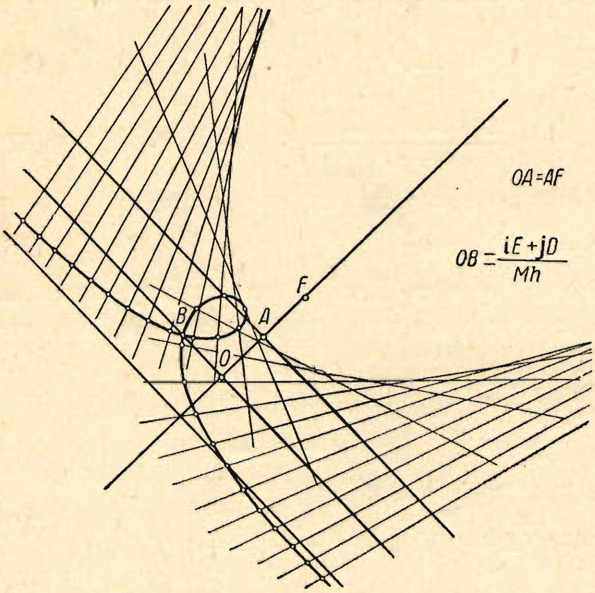
она имеет асимптоту, параллельную директриссе, расположенную от этой последней на таком же расстоянии, как и вершина (фиг. 4).

Если плоскость $z=h$ параллельна одной из главных центральных осей, то из всех прямых, лежащих в этой плоскости, главными осями инерции могут быть только: 1) все прямые, параллельные главной центральной оси: 2) все прямые, проходящие через некоторую точку. Например, если C_0x — главная центральная ось, т. е. $E=F=0$, то главными осями могут быть прямые:

1) $x=\text{const}$, $z=h$;

2) все прямые, проходящие через точку

$$x=0, \quad y=\frac{h(A-B)}{D}, \quad z=h. \tag{23}$$



Фиг. 4.

Геометрическим местом точек, в которых прямые пучка 2) являются главными осями инерции, будет круг, диаметром которого служит отрезок с концами $\left(0, \frac{D}{Mh}\right)$ и $\left(0, h\frac{A-B}{D}\right)$.

Если же плоскость $z=h$ параллельна плоскости симметрии главного центрального эллипсоида инерции, то из всех прямых плоскости $z=h$ главными осями инерции будут только те, которые параллельны главным центральным осям инерции.

Поступило в редакцию 7 IV 1938.

SUR L'APPLICATION DE LA MÉTHODE DE LA RÉDUCTION DYNAMIQUE DES MASSES À L'ÉTUDE DU MOUVEMENT PLAN D'UN CORPS SOLIDE

J. L. GUERONIMUS

(Résumé)

L'auteur démontre qu'on peut remplacer chaque corps effectuant un mouvement plan par deux masses équivalentes à ce corps au point de vue de la dynamique; on indique le moyen de trouver ces masses ainsi que les points où il faut les placer.

En particulier, pour la rotation autour d'un axe d'inertie principal on peut placer une masse sur cet axe, et alors l'autre doit être placée au centre du choc.

L'auteur considère de plus les conditions nécessaires et suffisantes pour que des droites parallèles à la direction donnée puissent être des axes d'inertie principaux. Parmi toutes les droites situées dans un plan donné ne peuvent être axes d'inertie principaux que celles qui enveloppent une certaine parabole; le lieu géométrique des points pour lesquels ces droites sont les axes principaux est la podaire de cette parabole par rapport à un point fixe.