А К А Д Е М И Я Н А У К С С С Р
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS
AND MECHANICS

Т II, в. 4 1939 V. II, № 4

РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В НАГРЕВАЕМЫХ ПО ПОВЕРХНОСТИ ПЛАСТИНКАХ И ДИСКАХ

Я. Ф. МАЛКИН

(Бостон, США)

1. **Введение.** В настоящей третьей части работы,[1] посвященной задаче теплопроводности пластинок, дисков и оболочек, мы рассматриваем случай изменяющегося со временем распределения температуры в пластинках и дисках нагреваемых по поверхности. Отношение этой третьей части к предыдущим двум может быть охарактеризовано следующим образом.

В первых двух частях работы, цитируемых ниже посредством I и II, приведен способ решения задачи стационарного распределения температуры в плоских и гнутых пластинках, равно как и в цилиндрических оболочках с плоским дном в условиях концентрического температурного поля. Этот способ решения в настоящей третьей части обобщается для нестационарных распределений температуры в пластинках и дисках, нагреваемых по поверхности. Единственное существенное изменение первоначального процесса решения заключается в модификации, обусловливаемой начальным условием; это условие соответствует новой координате, фигурирующей в задаче нагревания, а именно времени. Мы, однако, увидим, что это дополнительное условие также может быть удовлетворено весьма просто путем наложения вспомогательного решения (равным образом основанного на данном в I и II способе решения) на некоторое первое частное решение. Получающееся полное решение в заключительном параграфе иллюстрируется практическим примером.

2. **Первое частное решение и дополнительная задача.** Пользуясь введенными в I обозначениями, мы снова рассматриваем бесконечную пластинку толщины $2h$ в прямоугольной системе координат xyz или $\xi\eta\zeta$, совмещая плоскость $z=0$, или $\zeta=0$, со средней плоскостью пластинки. С целью некоторого упрощения формул мы вводим величину

$$\tau=\frac{k}{h^2}t$$

---

[1] См. статьи автора: „К задаче распределения температуры в плоских пластинках" и „К влиянию резких закруглений на стационарные распределения температуры в тонкостенных твердых телах". Прикл. мат. и мех., т. II, в. 3.

измерения нуль, причем t означает время, а k есть коэффициент теплопроводности.[1] Дифференциальное уравнение изменяющегося со временем распределения температуры при указанных обозначениях принимает вид:

$$\triangle T - \frac{\partial T}{\partial \tau} = 0. \tag{1}$$

Ссылаясь на оператор D, введенный нами в **I** и **II**, мы вводим символ:

$$D_\tau = D - \frac{\partial}{\partial \tau}\cdot \tag{1a}$$

Рассмотрим теперь выражение

$$T = F_0 T^\circ + F_1 D_\tau T^\circ + F_2 D_\tau^2 T^\circ + \ldots + G_0 P^\circ + G_1 D_\tau P^\circ + G_2 D_\tau^2 P^\circ + \ldots, \tag{2}$$

получающееся из (**I**, 10) путем замены D на D_τ. Черта над буквой или символом здесь и в дальнейшем опускается, так как мы будем рассматривать лишь величины измерения нуль. Затем заметим, что часто можно будет ограничиваться рассмотрением конечных выражений вида (2).

Решение (2) легко проверяется таким же точно образом, как и в **I**, поскольку вопрос касается дифференциального уравнения в связи с граничными условиями:

$$\begin{aligned} T &= T_h = T^\circ + hP^\circ \quad \text{для} \quad z/h = \zeta = 1, \\ T &= T_{-h} = T^\circ - hP^\circ \quad \text{для} \quad z/h = \zeta = -1, \end{aligned} \tag{3}$$

где T° и P° суть некоторые данные функции, в случае конечных решений вида (2) представленные с помощью многочленов относительно ξ, η, τ. Некоторые новые затруднения возникают лишь в связи с вопросом удовлетворения начальных условий.

В задаче нагревания по поверхности мы потребуем, чтобы

$$T = 0 \quad \text{во всем теле} \qquad \text{для} \quad \tau = 0. \tag{4}$$

Начальное же распределение температуры, следующее из (2) и (3), очевидно, равно:

$$T_i = F_1 (D_\tau T^\circ)_i + F_2 (D_\tau^2 T^\circ)_i + \ldots + G_1 (D_\tau P^\circ)_i + G_2 (D_\tau^2 P^\circ)_i + \ldots, \tag{5}$$

где значок i указывает на начальное состояние, соответствующее $\tau = 0$. Следовательно, чтобы получить решение уравнения (1), удовлетворяющее пограничным условиям и начальному условию (4), на распределение (2) необходимо наложить распределение, которое дается некоторым дополнительным решением T' уравнения (1), причем последнее решение должно удовлетворить условиям:

$$\begin{aligned} T' &= -T_i \quad \text{для} \quad \tau = 0, \\ T' &= 0 \qquad \text{для} \quad \zeta = \pm 1. \end{aligned} \tag{6}$$

Исходя из некоторых свойств решения (2), рассмотренных в **I**, мы в следующем параграфе выведем подобного же рода простое решение вспомогательной задачи, формулированной посредством данной выше системы (1), (6).

3. **Решение дополнительной задачи.** Аналогично решению (10) части **I** решение (2) настоящей третьей части представляет собой сумму двух температурных функций; первая из них линейна в направлении, соответствующем

[1] См. H. S. Carslaw, Conduction of Heat, p. 8, London, 1921.

толщине пластинки, вторая же принимает значение нуль на пограничных поверхностях; эти две функции в отдельности, вообще говоря, не представляют собой решений дифференциального уравнения. Вторая из этих двух температурных функций согласно части I в первом приближении может быть представлена посредством формулы:

$$W = W_1(\xi, \eta, \tau)\cos\frac{1}{2}\pi\zeta + W_2(\xi, \eta, \tau)\sin\pi\zeta, \tag{7}$$

где W_1 и W_2 суть некоторые многочлены или, в более общем случае, некоторые функции от ξ, η, τ, получаемые из решения (2).

Первая (линейная) температурная функция для $\tau = 0$ принимает значение нуль, поэтому начальное распределение температуры, представленной формулой (2), выражается формулой вида (7) при подстановке в последнюю $\tau = 0$. Значения, принимаемые при этой подстановке функциями W, W_1, W_2, мы обозначим соответственно посредством W_i, W_{1i}, W_{2i}; все эти величины суть функции двух переменных ξ и η, причем $W_i = T_i$.

Теперь предположим, что начальное распределение температуры $T_i' = -T_i$ дано не только для действительно рассматриваемого интервала координаты ζ, но для интервала

$$-\infty \leqslant \zeta \leqslant +\infty,$$

воображая рассматриваемое тело и начальное распределение температуры $-T_i$ продолженными бесконечно и в направлении ζ. Изменяющее со временем распределение температуры дополнительной задачи на основании симметрии будет представлено одной и той же формулой в бесконечном теле и в пластинке, так как пограничные условия (6) всегда будут выполнены на основании симметрии.

Приведение дополнительной задачи к задаче бесконечного твердого тела значительно упрощает решение, так как пограничные условия в такой задаче не фигурируют и начальное условие есть единственное условие, требующее удовлетворения. Эта задача в теории теплопроводности играет весьма важную роль и решается она в весьма общем виде. Вследствие отсутствия пограничных условий решение при помощи бесконечных рядов переходит в таковое с помощью интеграла Фурье,[1] часто преобразуемого в известную формулу:[2]

$$T' = \frac{1}{(2\sqrt{\pi\tau})^3}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty}\int\limits_{-\infty}^{\infty} W_i'(\xi', \eta', \zeta')\, e^{-\frac{(\xi-\xi')^2+(\eta-\eta')^2+(\zeta-\zeta')^2}{4\tau}}\, d\xi'\, d\eta'\, d\zeta', \tag{8}$$

где W_i' есть начальное распределение температуры. В нашей дополнительной задаче W_i' следует заменить функцией $-T_i$. Однако можно получить решение проще следующим путем. Рассмотрение содержащихся в (8) возможностей[3] представления искомого решения ведет к предположению:

$$T' = -\left[\sum_{j=0}^{m} C_j D^j W_{1i}\tau^j\right] e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau}\cos\frac{1}{2}\pi\zeta - \left[\sum_{j=0}^{n} C_j' D^j W_{2i}\tau^j\right] e^{-\pi^2\tau}\sin\pi\zeta, \tag{9}$$

---

1 См. H. Poincaré, Propagation de la chaleur, pp. 157—167, Paris, 1895; R. v. Mises und P. Frank, Differ. u. Integr.-Gl., Bd. 2, Braunschweig, 1927; H. S. Carslaw, loc. cit., pp. 30—33.

2 См. предыдущее подстрочное примечание.

3 См. E. Goursat, Cours d'Analyse, p. 302, vol. 3, Paris, 1923.

где m и n суть целые положительные числа, а величины C_j и C_j' суть некоторые постоянные. Вводя гипотетическую формулу (9) в (1) и (6), найдем, что (9) действительно представляет собой решение дополнительной задачи, если постоянные C_j и C_j' определены соответствующим образом. Простое вычисление дает:

$$T' = -\left[\sum_{j=0}^{m} \frac{\tau^j}{j!} D^j W_{1i}\right] e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau} \cos\frac{1}{2}\pi\zeta - \left[\sum_{j=0}^{n} \frac{\tau^j}{j!} D^j W_{2i}\right] e^{-\pi^2\tau} \sin\pi\zeta. \quad (10)$$

Остается лишь выразить функции W_1, W_2 формулы (7). Пользуясь формулами (I, 27), (I, 28), легко найдем, что

$$\begin{aligned} W_1 &= \frac{4}{\pi}\left\{\frac{4}{\pi^2} D_\tau T^\circ + \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2 D_\tau^2 T^\circ + \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^3 D_\tau^3 T^\circ + \ldots\right\}, \\ W_2 &= \frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{\pi^2} D_\tau P^\circ + \left(\frac{1}{\pi^2}\right)^2 D_\tau^2 P^\circ + \left(\frac{1}{\pi^2}\right)^3 D_\tau^3 P^\circ + \ldots\right\}, \end{aligned} \quad (11)$$

где T° и P° суть данные многочлены от ξ, η, τ или, в более общем случае, данные функции этих переменных.

4. **Общие замечания к решению (2), (10).** Из данной выше формулы

$$\tau = \frac{k}{h^2} t$$

мы заключаем, что решение (2), (10) для пластинок различной толщины $2h$, но того же самого материала, остается тем же, если значение времени t изменяется в том же отношении, что и квадрат толщины. В этом выражается закон подобия нашей задачи.[1] Само собой разумеется, что в этот закон можно было бы включить и варьирование материала.

Следует заметить, что решение (2), (10) строго удовлетворяет начальному и пограничным условиям; дифференциальное же уравнение этим решением удовлетворяется лишь приближенным образом, как указано выше. Исходя из точных формул (27), (28) части I, можно, однако, получить более точные решения, как показано будет в § 5.

Важный особый случай задачи характеризуется распределением температуры, независимым от ξ, η. В этом случае на основании (1a) имеем:

$$D_\tau = -\frac{d}{d\tau},$$

так что

$$\begin{aligned} W_1 &= -\frac{4}{\pi}\left\{\frac{4}{\pi^2}\frac{dT^\circ}{d\tau} - \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^2 \frac{d^2T^\circ}{d\tau^2} + \left(\frac{4}{\pi^2}\right)^3 \frac{d^3T^\circ}{d\tau^3} - \ldots\right\}, \\ W_2 &= -\frac{2}{\pi}\left\{\frac{1}{\pi^2}\frac{dP^\circ}{d\tau} - \left(\frac{1}{\pi^2}\right)^2 \frac{d^2P^\circ}{d\tau^2} + \left(\frac{1}{\pi^2}\right)^3 \frac{d^3P^\circ}{d\tau^3} - \ldots\right\}. \end{aligned} \quad (11a)$$

Функции W_{1i} и W_{2i} в этом случае переходят в постоянные, см. пример ниже.

5. **Пример.** Бесконечная плоская пластинка толщины $2h$ подвергается нагреванию по поверхности по формулам:

$$T_h = T_{-h} = T^\circ = \tau - \frac{1}{2\tau_0}\tau^2, \qquad P^\circ = 0, \quad (12)$$

[1] Подробное изложение принципа подобия можно найти, например, у H. Groeber und S. Erk, Wärmeübertragung, 2 Aufl., Berlin, 1933.

где τ_0 есть постоянная, характеризующая то мгновение, когда температура поверхности достигает максимального значения. Требуется определить распределение температуры в пластинке.

Решение будет, очевидно, симметричным по отношению к средней плоскости $\zeta=0$ (см. примеры в I); благодаря этой симметрии искомое распределение температуры представит собой также решение задачи плоской пластинки толщины h, нагреваемой по поверхности $\zeta=1$ и непроницаемой для теплового тока на поверхности $\zeta=0$, т. е.

$$\frac{\partial T}{\partial \zeta}_{(\zeta=0)}=0.$$

Вводя пограничные функции (12) в систему (11a) и подставляя полученный результат в (7), находим первое приближение:

$$T=\tau-\frac{1}{2\tau_0}\tau^2+\frac{16}{\pi^3}\left\{\frac{\tau}{\tau_0}+\left(1+\frac{4}{\pi^2\tau_0}\right)\left(e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau}-1\right)\right\}\cos\frac{1}{2}\pi\zeta. \tag{13}$$

Возьмем для примера

$$h=2.5\ \text{см},\quad k=0.125\ \text{см}^2/\text{сек}$$

и предположим, что постоянная τ_0 соответствует продолжительности 10 сек., так что

$$\tau_0=\frac{0.125}{6.25}10=0.2.$$

Тогда на основании формулы (13) имеем:

$$T=\tau-2.5\tau^2+0.516\left[5\tau+3.03\left(e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau}-1\right)\right]\cos\frac{1}{2}\pi\zeta. \tag{14}$$

В частности, для средней плоскости получим:

T	0	—0.008	—0.009	—0.006	—0.001	0.007	0.019	0.024
для τ	0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28

Из таблицы можно уже заключить, что формула (14) представляет собой лишь довольно грубое приближение искомого решения, так как кривая температурной функции в средней плоскости $\zeta=0$ в рассматриваемый период времени должна быть расположена на положительной стороне оси абсцисс. Пользуясь формулой (27) части I и принимая в расчет и член с $\cos\frac{3}{2}\pi\zeta$, мы вместо (13) получаем более точную формулу:

$$T=\tau-\frac{1}{2\tau_0}\tau^2+\frac{16}{\pi^3}\left\{\frac{\tau}{\tau_0}+\left(1+\frac{4}{\pi^2\tau_0}\right)\left(e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau}-1\right)\right\}\cos\frac{1}{2}\pi\zeta-$$

$$-\frac{16}{(3\pi)^3}\left\{\frac{\tau}{\tau_0}+\left[1+\left(\frac{2}{3\pi}\right)^2\frac{1}{\tau_0}\right]\left(e^{-\frac{9\pi^2}{4}\tau}-1\right)\right\}\cos\frac{3}{2}\pi\zeta,$$

а вместо (14) выражение:

$$T = \tau - 2.5\tau^2 + 0.516\left[5\tau + 3.03\left(e^{-\frac{\pi^2}{4}\tau} - 1\right)\right]\cos\frac{1}{2}\pi\zeta -$$

$$-0.019\left[5\tau + 1.225\left(e^{-\frac{9\pi^2}{4}\tau} - 1\right)\right]\cos\frac{3}{2}\pi\zeta.$$

Согласно последней формуле для средней плоскости $\zeta = 0$ будем иметь:

T	0	0.001	0.002	0.004	0.006	0.011	0.023	0.020
для τ	0	0.04	0.08	0.12	0.16	0.20	0.24	0.28

Поступило в редакцию 14 III 1937.

TEMPERATURE DISTRIBUTION IN PLANE PLATES AND DISKS UNDER CONDITIONS OF SURFACE HEATING

I. P. MALKIN

(Summary)

In this article, which is the third part of a contribution to the problem of the conduction of heat in plates, disks, shells and shafts,[1] the special case of a plate or disk in the conditions of surface heating is being treated.

In using the differential operator defined by the symbol

$$D_\tau = D - \frac{\partial}{\partial\tau},$$

wherein D is the plane Laplacian differential operator and τ is the time coordinate, the temperature distribution, varying with the time, of the plane plate or disk can be expressed, with the correction indicated below, by the formula

$$T = \sum_{n=0}^{\infty} [F_n D_\tau{}^n T^\circ + G_n D_\tau{}^n P^\circ] \tag{1}$$

obtained from the analogous formula of the preceding articles in replacing D by D_τ; the expressions T° and P° being now functions of the time coordinate as well. The series (1) satisfies the differential equation as well as the boundary conditions, but it does not satisfy, in general, the initial condition, which is $T = 0$ when $\tau = 0$.

To make the solution complete, an auxiliary solution of a type suggested by the new procedure used in the articles, is added to (1) mitting all conditions of the problem.

---

[1] See the preceding articles: „On the Problem of Temperature Distribution in Plane Plates" and „On the Effect of Sharp Curvature Changes in Steady Temperature Distributions in Thin-Walled Solids", this Journal of Applied Mathematics and Mechanics v. II, № 3, pp. 317 and 331, 1938.