АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА
Т. II, в. 4

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS
V. II, № 4

1939

К ВОПРОСУ О МАЛЫХ КОЛЕБАНИЯХ УПРУГО-ВЯЗКИХ МЕМБРАН

А. Н. ГЕРАСИМОВ

(Москва)

Вообразим тонкую пластинку, вещество которой обладает одновременно и упругими и вязкими свойствами. Возьмем прямоугольную систему $OXYZ$ декартовых координат так, чтобы OX, OY лежали в плоскости пластинки, и разобьем последнюю на призматические столбики системой равноотстоящих друг от друга плоскостей, параллельных YOZ и ZOX и достаточно близких друг к другу. Будем считать, что во все время движения каждый из таких столбиков остается параллелепипедом, параллельным OZ, и не деформирует своего сечения плоскостью, параллельной XOY.

Такое предположение избавит от необходимости рассматривать моменты, повертывающие боковые грани столбиков. Следовательно, речь будет итти лишь о достаточно тонкой пластинке, которую в дальнейшем будем называть мембраной.[1]

Рассмотрим три столбика A, B, C, находящиеся в одном ряду, параллельном OX, и последовательно соприкасающиеся друг с другом гранями, перпендикулярными к OX (фиг. 1). Если стороны основания столбика B имеют длины Δx, Δy, высота этого столбика есть l, а плотность вещества в B есть ρ, то

$$-\rho l\,\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial^2 z}{\partial t^2} \tag{1}$$

есть сила инерции для B в тот момент, когда смещение центра его массы равно z.

Во-вторых, если натяжение мембраны на гранях с абсциссами $x-\frac{\Delta x}{2}$, $x+\frac{\Delta x}{2}$, рассчитанное на единицу площади, соответственно равно T и T' и образует с OX углы α и α', то на B действует вертикальная (параллельная OZ) слагающая силы натяжения, равная:

$$\begin{gathered}T'l'\,\Delta y\sin\alpha'-Tl\,\Delta y\sin\alpha\approx\Delta y\,[T'l'\operatorname{tg}\alpha'-Tl\operatorname{tg}\alpha]=\\=\Delta y\left[\left(Tl\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x+\frac{\Delta x}{2}}-\left(Tl\frac{\partial z}{\partial x}\right)_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right]=\Delta x\,\Delta y\,\frac{\partial}{\partial x}\left(Tl\frac{\partial z}{\partial x}\right).\end{gathered}\tag{2}$$

[1] Что касается контура, ограничивающего мембрану, то для него предполагается существование функции Грина в обычном, узком, смысле.

Аналогично из-за натяжения вдоль OY на B действует вертикальная слагающая натяжения, имеющая величину

$$\Delta x\, \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\left(T l \frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{2'}$$

Пусть, далее, на гранях $x - \frac{\Delta x}{2}$, $x + \frac{\Delta x}{2}$ столбика B значения модуля сдвига равны соответственно μ и μ'. В таком случае на B действует вертикальная слагающая силы упругости, равная

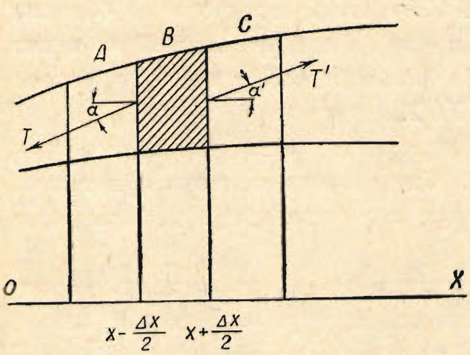
$$\mu' l' \Delta y \sin \alpha' - \mu l \Delta y \sin \alpha = \Delta x\, \Delta y \frac{\partial}{\partial x}\left(\mu l \frac{\partial z}{\partial x}\right). \tag{3}$$

Подобным образом благодаря сдвигам в направлении OY на B действует сила упругости с вертикальной слагающей

$$\Delta x\, \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\left(\mu l \frac{\partial z}{\partial y}\right). \tag{3'}$$

Исследуем, наконец, действие сил внутреннего трения; при этом будем исходить из закона Ньютона, по которому сила трения между двумя слоями пропорциональна градиенту скорости и площади соприкосновения слоев. Рассмотрим ряд столбиков, параллельный OX (фиг. 1). На поверхности соприкосновения столбиков A и B возникает сила внутреннего трения, которая, будучи отнесена к B, имеет величину:

$$-\Delta y\left(\eta l \frac{\partial \dot z}{\partial x}\right)_{x-\frac{\Delta x}{2}}.$$



Фиг. 1.

Здесь точка обозначает производную по времени, а η есть коэффициент вязкости. Аналогично, B действует на C с силой:

$$-\Delta y\left(\eta l \frac{\partial \dot z}{\partial x}\right)_{x+\frac{\Delta x}{2}}.$$

Следовательно, столбик C действует на B с силой, равной

$$+\Delta y\left(\eta l \frac{\partial \dot z}{\partial x}\right)_{x+\frac{\Delta x}{2}}.$$

Поэтому в ряде столбиков, параллельном OX, на B действует вертикальная сила внутреннего трения:

$$\Delta y\left[\left(\eta l \frac{\partial \dot z}{\partial x}\right)_{x+\frac{\Delta x}{2}} - \left(\eta l \frac{\partial \dot z}{\partial x}\right)_{x-\frac{\Delta x}{2}}\right] = \Delta x\, \Delta y \frac{\partial}{\partial x}\left(\eta l \frac{\partial \dot z}{\partial x}\right). \tag{4}$$

Совершенно так же найдем, что в ряде столбиков, параллельном OY, на B действует сила внутреннего трения, имеющая величину:

$$\Delta x\, \Delta y \frac{\partial}{\partial y}\left(\eta l \frac{\partial \dot z}{\partial y}\right). \tag{4'}$$

На основании принципа Даламбера уравнение движения получится, если приравнять нулю сумму сил (1), (2), (2'), (3), (3'), (4) и (4'). Итак, имеем:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[l(T+\mu)\frac{\partial z}{\partial x}+l\eta\frac{\partial \dot z}{\partial x}\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[l(T+\mu)\frac{\partial z}{\partial y}+l\eta\frac{\partial \dot z}{\partial y}\right]=\rho l\frac{\partial^2 z}{\partial t^2},$$

или, положив

$$T+\mu=M, \tag{5}$$

напишем уравнение колебаний пластинки в виде:

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[\left(\eta\frac{\partial \dot z}{\partial x}+M\frac{\partial z}{\partial x}\right)l\right]+\frac{\partial}{\partial y}\left[\left(\eta\frac{\partial \dot z}{\partial y}+M\frac{\partial z}{\partial y}\right)l\right]=\rho l\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{A'}$$

В частности, если толщина l пластинки остается постоянной, то (A') принимает более простой вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\left[\eta\frac{\partial \dot z}{\partial t}+Mz\right]+\frac{\partial^2}{\partial y^2}\left[\eta\frac{\partial \dot z}{\partial t}+Mz\right]=\rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{A}$$

В дальнейшем мы ограничиваемся лишь случаем однородной пластинки и уравнение колебаний будем писать в виде (A). В одной из предыдущих работ[1] мной было показано, что малые колебания упруго-вязких тел описываются при помощи обобщенной системы уравнений Навье-Стокса-Ламé, которая, будучи представлена в векторной форме, имеет вид:

$$\rho\left(\mathbf{F}-\frac{d\dot{\mathbf{u}}}{dt}\right)+\Delta(\mu'\mathbf{u}+\mu''\dot{\mathbf{u}})+(\mu'+\lambda')\operatorname{grad}\theta'+(\mu''+\lambda'')\operatorname{grad}\theta''=\operatorname{grad}p; \tag{6}$$

здесь F — внешняя объемная сила на единицу массы, μ' и λ' — упругие постоянные по Ламе, μ'' и λ'' — аналогичные им постоянные для сил внутреннего трения, p — давление,

$$\theta'=\operatorname{div}\mathbf{u}=\frac{\partial u_x}{\partial x}+\frac{\partial u_y}{\partial y}+\frac{\partial u_z}{\partial z},\qquad \theta''=\operatorname{div}\dot{\mathbf{u}}=\frac{\partial \dot u_x}{\partial x}+\frac{\partial \dot u_y}{\partial y}+\frac{\partial \dot u_z}{\partial z},$$

$$\Delta=\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}.$$

Применим (6) к случаю колебания ненатянутой ($T=0$) однородной упруго-вязкой мембраны, положив

$$F_x=F_y=F_z=0,$$

$$u=z(x,\,y,\,t),\qquad u_x=u_y=0,\qquad u_z=z,\qquad \frac{\partial u_x}{\partial x}=\frac{\partial u_x}{\partial y}=\frac{\partial u_x}{\partial z}=0,$$

$$\frac{\partial u_y}{\partial x}=\frac{\partial u_y}{\partial y}=\frac{\partial u_y}{\partial z}=0,\qquad \frac{\partial u_z}{\partial x}=\frac{\partial z}{\partial x},\qquad \frac{\partial u_z}{\partial y}=\frac{\partial z}{\partial y},\qquad \frac{\partial u_z}{\partial z}=1,\quad p=0.$$

Легко найдем, что $\theta'=1$, $\theta''=0$, следовательно,

$$\operatorname{grad}\theta'=\operatorname{grad}\theta''=0.$$

[1] „Основания теории деформаций упруго-вязких тел". Прикл. мат. и мех., т. II, в. 3.

Далее вычисляем:

$$\Delta u_x = 0, \qquad \Delta u_y = 0, \qquad \Delta u_z = \frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2},$$

$$\Delta \dot{u}_x = 0, \qquad \Delta \dot{u}_y = 0, \qquad \Delta \dot{u}_z = \frac{\partial^2 \dot{z}}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 \dot{z}}{\partial y^2},$$

$$\frac{du_x}{dt} = 0, \qquad \frac{d\dot{u}_y}{dt} = 0,$$

$$\frac{d\dot{u}_z}{dt} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial t} + \frac{\partial \dot{z}}{\partial z}\dot{z} = \frac{\partial \dot{z}}{\partial t} + \dot{z}\frac{\partial}{\partial t}\left(\frac{\partial z}{\partial z}\right) = \frac{\partial \dot{z}}{\partial t}.$$

Из трех уравнений системы, соответствующей векторному уравнению (6), остается лишь одно последнее, принимающее вид:

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\mu'' \dot{z} + \mu' z) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\mu'' \dot{z} + \mu' z) = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}.$$

Это уравнение совпадает с (A), так как $\mu' = \mu$, а $\mu'' = \eta$ есть поперечный коэффициент трения.[1] Если бы мембрана была натянута ($T \neq 0$), то в таком случае создавалось бы давление p с градиентом $\operatorname{grad} p = -T\left(\frac{\partial^2 z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 z}{\partial y^2}\right)$, и в этом случае мы опять пришли бы к уравнению (A).

Положив

$$\eta \frac{\partial z}{\partial t} + Mz = u, \tag{7}$$

можем представить (A) в виде:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{8}$$

Пусть z есть решение уравнения (A), удовлетворяющее условиям:

$$\left.z\right|_{t=0} = 0; \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0} = 0;$$

$$\left.z\right|_C = 0 \quad \text{для всех } t; \tag{9}$$

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=T} = 0;$$

здесь C обозначает замкнутую кривую, лежащую в плоскости XOY, и T есть положительная величина, как угодно большая, но конечная и постоянная. Из условия на контуре C: $\left.z\right|_C = 0$ следует, что для любого t

$$\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_C = 0.$$

При этих предположениях относительно z, u есть решение уравнения (8), удовлетворяющее условиям:

$$\left.u\right|_{t=0} = 0, \quad \left.u\right|_C = 0 \quad \text{для всех } t \geqslant 0. \tag{10}$$

В таком случае u, $\frac{\partial z}{\partial t}$ для всех значений $t \geqslant 0$ тождественно исчезают, а следовательно, $z(x, y, t) \equiv 0$.

---

[1] „Основания теории деформаций упруго-вязких тел“, loc. cit.

Через точки контура C проведем образующие цилиндрической поверхности параллельно оси OT и рассмотрим поверхность S, состоящую из боковой поверхности цилиндра с направляющей C, из части плоскости XOY, лежащей внутри C, и из части плоскости $t=T$, ограниченной C. Обозначим D область, ограниченную поверхностью S и лежащую внутри S.

Пусть $P(x, y, t)$ непрерывна вместе со своими производными до второго порядка по x и y, а $Q(x, y, t)$ — до первого порядка по t. Тогда должно быть:[1]

$$\iiint_D \left\{\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}+\frac{\partial^2 P}{\partial y^2}-\frac{\partial Q}{\partial t}\right\} dx\,dy\,dt=\iint_S \frac{\partial P}{\partial x}\,dy\,dt+\frac{\partial P}{\partial y}\,dt\,dx-Q\,dx\,dy. \tag{11}$$

Положим здесь

$$P=\frac{1}{2}u^2, \qquad Q=\int_0^t \rho u \frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,dt. \tag{12}$$

Тогда (11) принимает вид:

$$\iiint_D \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy\,dt=$$

$$=\iint_S \left\{u\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dt+u\frac{\partial u}{\partial y}\,dt\,dx-dx\,dy\int_0^t \rho u\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,dt\right\}. \tag{13}$$

Но

$$\iint_S u\frac{\partial u}{\partial x}\,dy\,dt+u\frac{\partial u}{\partial y}\,dt\,dx=\int_0^T dt\int_C u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\,dy+\frac{\partial u}{\partial y}\,dx\right).$$

Так как, по предположению, $u|_C=0$, то этот интеграл исчезает. Далее, имеем:

$$+\iint_S dx\,dy\int_0^t \rho u\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,dt=-\iint_S dx\,dy\int_0^t \rho u\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,dt+\iint_S dx\,dy\int_0^T \rho u\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,dt.$$

Здесь первый интеграл справа исчезает, второй же преобразуется на основании (7) так:

$$\int_0^T \rho u\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,dt=\int_0^T \frac{\partial}{\partial t}\left\{\frac{\eta\rho}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+M\rho z\frac{\partial z}{\partial t}\right\}dt-\int_0^T M\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dt=$$

$$=\left[\frac{\eta\rho}{2}\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2+M\rho z\frac{\partial z}{\partial t}\right]_{t=0}^{t=T}-\int_0^T M\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dt.$$

По условию $\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=\left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=T}=0$, следовательно, вставка в правой части исчезает.

Окончательно имеем:

$$\iint_S dx\,dy\int_0^t \rho u\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}\,dt=-\iint_S dx\,dy\int_0^T M\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dt,$$

---

[1] Излагаемый здесь способ доказательства единственности решения является обобщением примененного автором рассуждения для линейной задачи. См. „Проблем. упр. последейств.“, Прикл. мат. и мех., т. I, в. 4, 1938.

так что (13) принимает вид:

$$\iiint\limits_D \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy\,dt=+\iiint\limits_D M\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\,dy\,dt. \tag{14}$$

Восставим к S направленные наружу нормали равной длины ε. Место концов этих нормалей есть замкнутая поверхность Σ, содержащая S внутри себя. Назовем D_+ двухсвязную область между S и Σ.

Не нарушая общности рассуждений, можно считать, что z тождественно исчезает внутри D_+ и на Σ. Тогда применение формулы Гаусса к D_+ возможно, и мы имеем:

$$0=\iiint\limits_{D_+} \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right\} dx\,dy\,dt=-\iiint\limits_D M\rho\left(\frac{\partial z}{\partial t}\right)^2 dx\,dy\,dt. \tag{15}$$

Складывая почленно (14) и (15), получим:

$$\iiint\limits_D \left\{\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2\right\} dx\,dy\,dt=0, \tag{16}$$

откуда следует, что $\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial u}{\partial y}=0$. Значит, u может зависеть лишь от t. Однако по условию, когда точка (x, y) лежит на боковой поверхности цилиндра S имеем $u=0$. Таким образом должно быть $u\equiv 0$. Обращаясь к уравнению (8) и замечая, что $\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u}{\partial y^2}\equiv 0$, находим, что $\frac{\partial z}{\partial t}$ может быть лишь функцией координат x, y. Но при $t=0$, $\frac{\partial z}{\partial t}=0$. Отсюда $\frac{\partial z}{\partial t}\equiv 0$. Из (7) видно, что при $u\equiv 0$, $\frac{\partial z}{\partial t}\equiv 0$ необходимо следует $z\equiv 0$ в D. Наоборот из $z\equiv 0$ в D вытекает, что $z\equiv 0$ в D_+, если z удовлетворяет условиям (9) на S и исчезает вместе с $\dot z$ на Σ. Полученный результат верен при любых конечных положительных T, ε. В частности, он остается в силе и при $\varepsilon\to 0$. Заставляя затем T стремиться к $+\infty$, мы придем к выводу, что существует лишь тождественно равное нулю решение z уравнения

$$\Delta u=\rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}, \qquad u=\eta\dot z+Mz,$$

удовлетворяющее условиям

$$z|_{t=0}=0, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=0, \qquad z|_C=0, \qquad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=+\infty}=0.$$

Пусть теперь имеем неоднородное уравнение

$$\Delta(\eta\dot z+Mz)=\rho\ddot z-f(x, y, t), \tag{B}$$

причем z должно удовлетворять условиям:

$$z|_{t=0}=\Phi(x, y); \quad \dot z|_{t=0}=\varphi(x, y); \quad z|_C=0; \quad \dot z|_{t=+\infty}=0. \tag{B'}$$

Если бы уравнение (B) при условиях (B′) имело два различных решения z_1 и z_2, то их разность $z=z_2-z_1$ была бы решением однородного уравнения (A) с условиями:

$$z|_{t=0}=0, \quad \dot z|_{t=0}=0, \quad z|_C=0, \quad \dot z|_{t=+\infty}=0,$$

причем, вопреки доказанному, z не исчезало бы тождественно. Поэтому (B) может иметь не больше одного решения $z(x, y, t)$, обладающего непрерывными производными до второго порядка включительно и удовлетворяющего условиям (B′). Смысл условия $\dot{z}\big|_{t=+\infty}=0$ тот, что как бы велик ни был конечный промежуток времени, в течение которого мембрана подвергается воздействию внешней силы f, кинетическая энергия мембраны при $t=+\infty$ должна неизбежно обратиться в нуль.

Вернемся к однородному уравнению:

$$\Delta(\eta\dot{z}+Mz)=\rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}. \tag{A}$$

Было показано, что это уравнение может иметь не больше одного решения $z(x, y, t)$, удовлетворяющего условиям:

$$z\big|_{t=0}=\Phi(x, y),\qquad \frac{\partial z}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi(x, y);\qquad z\big|_C=0;\qquad \frac{}{\partial t}\bigg|_{t=+\infty}=0. \tag{A′}$$

Такое решение мы найдем, применяя способ Д. Бернулли. Для этого будем искать интеграл уравнения (A) в виде:

$$z=ZT,$$

где Z есть функция координат x, y, а T зависит только от времени. Тогда

$$\eta\frac{\partial z}{\partial t}+Mz=(\eta T'+MT)Z,$$

$$\Delta\left(\eta\frac{\partial z}{\partial t}+Mz\right)=(\eta T'+MT)\Delta Z,$$

$$\rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}=\rho ZT''.$$

Подставляя это в (A), приводим его к виду:

$$\frac{\Delta Z}{Z}=\frac{\rho T''}{\eta T'+MT}.$$

Так как между положением точки (x, y) на мембране и временем t не может быть никакой зависимости, то каждая часть предыдущего равенства должна быть постоянной. Обозначая последнюю $(-\lambda)$, получаем два независимых уравнения:

$$\Delta Z+\lambda Z=0, \tag{17}$$

$$\rho T''+\lambda\eta T'+\lambda MT=0. \tag{18}$$

Рассмотрим подробнее уравнение (17). Если $\lambda=0$, то это уравнение не удовлетворяется никаким $Z(x, y)$, исчезающим на контуре C, кроме тождественного нуля. В самом деле, гармоническая функция Z, исчезающая на границе области, тождественно равна нулю в этой области. Более того, ни при каком отрицательном λ уравнение (17) не может иметь отличного от нуля решения, обращающегося в нуль на C. Действительно, если бы такое решение $Z(x, y)$ существовало, то оно необходимо должно было бы достигать экстремума в некоторой точке $P(x_0, y_0)$ внутри C. Этот экстремум был бы положительным в случае максимума или отрицательным в случае минимума. В случае максимума должно было бы иметь место

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0} < 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0} < 0, \qquad \lambda Z < 0.$$

Наоборот, для минимума

$$\left(\frac{\partial^2 Z}{\partial x^2}\right)_{x_0, y_0} > 0, \qquad \left(\frac{\partial^2 Z}{\partial y^2}\right)_{x_0, y_0} > 0, \qquad \lambda Z > 0.$$

Очевидно, ни тот, ни другой случай несовместим с уравнением (17). Поэтому краевая задача $\Delta Z + \lambda Z = 0$, $Z|_C = 0$ может допускать не исчезающие тождественно решения лишь для существенно положительных значений λ.

Мы рассмотрим сначала уравнение

$$\Delta Z = f(x, y), \tag{19}$$

где $f(x, y)$ непрерывна внутри C. Найдем решение (19), обращающееся в нуль на C.

Пусть u, v — две функции от x, y, непрерывные в области D с их частными производными до второго порядка. Тогда должно быть:

$$\iint\limits_D \{v\,\Delta u - u\,\Delta v\}\, d\xi\, d\eta = \int\limits_{\substack{C \\ \circlearrowleft}} \left\{u\frac{\partial v}{\partial n} - v\frac{\partial u}{\partial n}\right\} ds, \tag{20}$$

где D — область, ограниченная контуром C, пробегаемым в положительном направлении; на последнее указывает стрелка под значком C. Здесь n — направление внутренней к C нормали. Положим в (20) $u = Z$, $v = G(x, y; \xi, \eta)$, причем $(x, y) \subset D$,

$$G(x, y; \xi, \eta) = \ln\frac{1}{r} + g(x, y; \xi, \eta),$$

где $r^2 = (x-\xi)^2 + (y-\eta)^2$, а g — гармоническая в D функция, принимающая на C значения, равные $-\ln\frac{1}{r}$. Тогда $G(x, y; \xi, \eta)$ — функция гармоническая в D всюду, кроме точки $\xi = x$, $\eta = y$, и обращающаяся в нуль на C. Описав вокруг точки $(x, y) \subset D$ окружность Γ радиусом ε так, чтобы Γ лежала внутри C, применим (20) к области D', ограниченной C и Γ. Так как на C имеем $u = Z = 0$, $v = G = 0$ и так как в D': $\Delta v = 0$, $\Delta Z = f(\xi, \eta)$, то (20) принимает вид:

$$\iint\limits_{D'} f(\xi, \eta)\, G(x, y; \xi, \eta)\, d\xi\, d\eta =$$

$$= -\int\limits_{\substack{\Gamma \\ \circlearrowleft}} \left\{Z\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial n} + Z\frac{\partial g}{\partial n} - \frac{\partial Z}{\partial n}\ln\frac{1}{r} - \frac{\partial Z}{\partial n} g\right\} ds. \tag{21}$$

Вследствие того, что Z и g с их производными по нормали ограничены на Γ, то второй и четвертый члены правой части при достаточно малом ε

могут быть сделаны как угодно малы по абсолютной величине. Это же относится и к третьему члену, потому что

$$\left|\int_\Gamma \frac{\partial Z}{\partial n}\ln\frac{1}{r}\,ds\right| \leqslant \max\left|\frac{\partial Z}{\partial n}\right|_\Gamma \cdot \left|\ln\frac{1}{\varepsilon}\right| \cdot \varepsilon\cdot 2\pi = \max\left|\frac{\partial Z}{\partial n}\right|_\Gamma \cdot 2\pi\frac{\ln N}{N},$$

где $N > 1$ тем больше, чем меньше ε. А так как $\frac{\ln N}{N} \to 0$, когда N возрастает, то высказанное утверждение становится очевидным.

Рассмотрим теперь первый член справа. Имеем:

$$\int_\Gamma Z\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial r}\,ds \leqslant \max(Z)_\Gamma \cdot \int_\Gamma -\frac{\partial \ln\frac{1}{r}}{\partial r}\,r\,d\varphi = \max(Z)_\Gamma\cdot 2\pi.$$

Если $\varepsilon\to 0$, то $\max(Z)_\Gamma \to Z(x, y)$. Поэтому (21) дает:

$$Z(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\iint_D f(\xi, \eta)\,G(x, y; \xi, \eta)\,d\xi\,d\eta. \tag{22}$$

В частности, если положить $f(x, y) = -\lambda Z(x, y)$, то (22) принимает вид:

$$Z(x, y) = \lambda\iint_D K(x, y; \xi, \eta)\,Z(\xi, \eta)\,d\xi\,d\eta, \tag{23}$$

где $K = \frac{1}{2\pi}G$, $\lambda > 0$. Ядро K интегрального уравнения (23) при $\xi = x$, $\eta = y$ логарифмически обращается в бесконечность. Однако это обстоятельство не является существенным, так как $K(x, y; \xi, \eta)$ обладает интегрируемым в D квадратом.[1] Также несущественно для дальнейшего и то, что оно не принад-

[1] Интегрируемость K^2 проще всего установить, если убедиться, что

$$\iint(\ln r)^2\,d\xi\,d\eta$$

остается конечным в круге радиуса R, описанном из точки (x, y), как центра. Не нарушая общности, можно принять $x = y = 0$. Тогда

$$\iint(\ln r)^2\,d\xi\,d\eta = 2\pi\int_0^R r(\ln r)^2\,dr = 2\pi\left[e^u(u^2 - 2u + 2)\right]_{-\infty}^{\ln R},$$

что представляет собой конечную величину. Аналогично убедимся в конечности интеграла

$$\iint \ln r\,d\xi\,d\eta = 2\pi\int_0^R r\ln r\,dr,$$

распространенного на ту же площадь, а следовательно, и интеграла

$$\iint_D [G(x, y; \xi, \eta)]^2\,d\xi\,d\eta = \iint_D\left[\left(\ln\frac{1}{r}\right)^2 + 2g(x, y; \xi, \eta)\ln\frac{1}{r} + \{g(x, y; \xi, \eta)\}^2\right]d\xi\,d\eta.$$

Так как функция $\iint_D G^2\,d\xi\,d\eta$ непрерывна в замкнутой области D, то она ограничена, следовательно,

$$\iint dx\,dy\iint_D [K(x, y; \xi, \eta)]^2\,d\xi\,d\eta \leqslant M,$$

где M — конечное число, что и требовалось доказать. (См. Курант-Гильберт, Методы матем. физики, ГТТИ, стр. 347, 1933.)

лежит к числу регулярных, так как после первой итеррации получается ограниченное ядро.

Далее, можно доказать симметричность $K(x, y, \xi, \eta)$. Возьмем внутри D две точки $A'(x', y')$ и $A''(x'' y'')$ и опишем около них как центров окружности Γ', Γ'' радиусами, соответственно равными ε' и ε'' и настолько малыми, что Γ', Γ'' целиком лежат внутри D. Применим (20) к области D', ограниченной C, Γ' и Γ'', положив:

$$v = G'(x' y'; \xi, \eta) = \ln\frac{1}{r'} + g'(x', y'; \xi, \eta) = G(x', y'; \xi, \eta),$$

$$u = G''(x'', y''; \xi; \eta) = \ln\frac{1}{r''} + g''(x'', y''; \xi, \eta) = G(x'', y''; \xi, \eta),$$

где

$$r'^2 = (x' - \xi)^2 + (y' - \eta)^2,\ r''^2 = (x'' - \xi)^2 + (y'' - \eta)^2.$$

Так как в D' имеем $\Delta G' = \Delta G'' = 0$, причем G' и G'' на C обращаются в нуль, то (20) дает:

$$-\int\limits_{\Gamma'}\left\{G''\frac{dG'}{dn} - G'\frac{dG'}{dn}\right\}ds - \int\limits_{\Gamma''}\left\{G''\frac{dG'}{dn} - G'\frac{dG''}{dn}\right\}ds = 0.$$

Мы видели уже, что первый интеграл стремится к $-2\pi G(x''y''; x', y')$ при $\varepsilon' \to 0$. Аналогично найдем, что второй стремится к $+2\pi G(x', y'; x'', y'')$ при $\varepsilon'' \to 0$. Предыдущее равенство позволяет видеть, что

$$G(x, y; \xi, \eta) = G(\xi, \eta; x, y),$$

если (x, y) и (ξ, η) лежат внутри D.

Так как ядро $K(x, y; \xi, \eta)$ обладает интегрируемым в D квадратом и симметрично, то к нему применимы общие результаты теории, развитой Гильбертом и Шмидтом.[1] В частности, если $Z(x, y)$ есть непрерывное в D вместе со своими производными первого порядка решение уравнения (23), то оно имеет непрерывные в D производные второго порядка, удовлетворяя уравнению $\Delta Z + \lambda Z = 0$, причем $Z|_C = 0$.[2] Далее, можно утверждать, что существует по крайней мере одно положительное число λ, для которого (23) имеет не равное тождественное нулю решение $Z(x, y)$. Более того, таких чисел λ_k должно быть бесконечное, именно счетное, множество, так как в противном случае разложение ядра $K(x, y; \xi, \eta)$ в билинейный ряд по фундаментальным функциям не могло бы дать требуемой особенности $K(x, y; \xi, \eta)$ в точке $\xi = x$, $\eta = y$. Итак, существует счетное множество положительных фундаментальных[3] чисел λ_k и соответствующих фундаментальных функций $Z_k(x, y)$, причем все числа λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, можно считать занумерованными в порядке их возрастания. При этом ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{1}{\lambda_k^2} \tag{24}$$

[1] См. И. И. Привалов. Интегральные уравнения, ОНТИ, стр. 166—169, 1935.

[2] Курант-Гильберт, Методы матем. физики, I, ГТТИ, стр. 343—344, 1933.

[3] Согласно принятой терминологии, фундаментальными числами рассматриваемой задачи являются не λ_k, а противоположные им числа $-\lambda_k$. См. Е. Гурса, Курс матем. анализа, III, 2, ОНТИ, стр. 189, 1934.

должен непременно сходиться, следовательно, множество чисел λ_k не может иметь предельной точки на конечном расстоянии. Действительно, в противном случае в написанном выше ряде было бы бесконечно большое количество конечных членов, как угодно мало отличающихся друг от друга. Но тогда этот ряд не мог бы сходиться. Таким образом можно указать такое конечное число Λ, $\Lambda > 0$, что для любого k имеет место неравенство:

$$\lambda_k - \lambda_{k-1} \geqslant \Lambda. \tag{25}$$

Более того, можно показать, что с возрастанием номера k фундаментальное число λ_k становится бесконечно большой величиной того же порядка, что и k, какова бы ни была конечная замкнутая область D. Для доказательства рассмотрим два квадрата Q', Q'' со сторонами α', α'', $\alpha' > \alpha''$, из которых первый заключает в себе область D, а другой содержится в этой области. Пусть λ_k' λ_k и λ_k'' фундаментальные числа номера k рассматриваемой краевой задачи, но вычисленные соответственно для Q', D, Q''. Так как частоты обертона порядка k для мембраны должны быть тем выше, чем меньше площадь мембраны, то имеем очевидное соотношение:

$$\lambda_k' \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_k''.$$

Но исследование краевой задачи $\Delta Z + \lambda' Z = 0$, $Z|_{Q'} = 0$ для квадрата $Q_{\prime}$ со стороной α' может быть выполнено путем разделения переменных. Положив $Z = XY$, где X, Y соответственно функции только x и только y, вместо $\Delta Z + \lambda' Z = 0$ получим:

$$X'' Y + X Y'' + \lambda' X Y = 0,$$

или

$$\frac{X''}{X} = -\frac{Y'' + \lambda' Y}{Y} = -\varkappa',$$

где $\varkappa'$ должна быть постоянной. Тогда необходимо имеем:

$$X = \sin \sqrt{\varkappa'}\, x, \quad Y = \sin \sqrt{\lambda' - \varkappa'}\, y$$

для того, чтобы $Z = XY$ исчезала на сторонах квадрата Q'; последний мы предполагаем расположенным так, что его вершины имеют координаты $(0, 0)$, $(\alpha', 0)$, (α', α'), $(0, \alpha')$.

Отсюда следует, что

$$\varkappa'_m = \frac{m^2 \pi^2}{\alpha'^2}, \qquad \lambda'_{mn} = \frac{n^2 + m^2}{\alpha'^2} \pi^2;$$

где m, n — любые целые положительные числа. Определим число Λ' фундаментальных чисел λ'_{mn} этой задачи, не превышающих λ'. Очевидно, оно равно числу точек (m, n) с целыми и положительными m, n, лежащих внутри квадранта:

$$m^2 + n^2 \leqslant \frac{\lambda' \alpha'^2}{\pi^2}, \quad m > 0, \quad n > 0.$$

По мере того как λ' растет, число Λ' все более и более приближается к площади этого квадранта, равной $\frac{\lambda' \alpha'^2}{4\pi}$. Поэтому

$$\Lambda' \approx \frac{\lambda' \alpha'^2}{4\pi},$$

и, следовательно,

$$\frac{\lambda'}{\Lambda'} \approx \frac{4\pi}{\alpha'^2}.$$

В частности, если расположить фундаментальные числа λ' в возрастающей последовательности, то

$$\frac{\lambda_k'}{k} \approx \frac{4\pi}{\alpha'^2}.$$

Аналогично, для квадрата Q'' со стороной α'' найдем:

$$\frac{\lambda_k''}{k} \approx \frac{4\pi}{\alpha''^2}.$$

Поэтому благодаря неравенству $\lambda_k' \leqslant \lambda_k \leqslant \lambda_k''$ видим, что λ_k при достаточно больших k оказывается заключенным между $k \cdot \frac{4\pi}{\alpha'^2}$ и $k \cdot \frac{4\pi}{\alpha''^2}$, так что имеет место равенство

$$\lambda_k = k \cdot \left[\frac{4\pi}{\alpha''^2} + \omega \cdot 4\pi \left(\frac{1}{\alpha''^2} - \frac{1}{\alpha'^2}\right)\right], \tag{26}$$

где

$$0 \leqslant \omega \leqslant 1.$$

Покажем теперь, что ранг каждого из чисел λ_k, $k = 1, 2, \ldots$, не больше единицы, т. е. что каждому λ_k соответствует одна и только одна фундаментальная функция $Z_k(x, y)$ данной краевой задачи $\Delta Z + \lambda_k Z = 0$, $Z|_C = 0$. Для этого достаточно показать, что два исчезающих на контуре C решения Z_k', Z_k'' уравнения $\Delta Z + \lambda_k Z = 0$ связаны между собой соотношением $Z_k'' = \alpha Z_k'$, где $\alpha = \text{const}$. Пусть Γ — произвольный замкнутый контур, целиком лежащий в D. Применим формулу Грина:

$$\iint\limits_{D'} \{Z_k'' L Z_k' - Z_k' L Z_k''\}\, dx\, dy =$$

$$= \oint\limits_{C} \left\{Z_k' \frac{\partial Z_k''}{\partial n} - Z_k'' \frac{\partial Z_k'}{\partial n}\right\} ds - \oint\limits_{\Gamma} \left\{Z_k' \frac{\partial Z_k''}{\partial n} - Z_k'' \frac{\partial Z_k'}{\partial n}\right\} ds$$

к области D', лежащей между C и Γ.

Здесь положено $LZ \equiv \Delta Z + \lambda_k Z$. Так как $LZ_k' = LZ_k'' = 0$ в D' и $Z_k' = Z_k'' = 0$ на C, то остается:

$$\oint\limits_{\Gamma} \left\{Z_k' \frac{\partial Z_k''}{\partial n} - Z_k'' \frac{\partial Z_k'}{\partial n}\right\} ds = 0.$$

Благодаря произволу в выборе Γ должно быть:

$$Z_k' \frac{\partial Z_k''}{\partial n} = Z_k'' \frac{\partial Z_k'}{\partial n},$$

где n — любое направление; следовательно,

$$\frac{\partial}{\partial n} \ln Z_k'' = \frac{\partial}{\partial n} \ln Z_k',$$

откуда

$$Z_k'' = \alpha Z_k', \quad \alpha = \text{const},$$

что и требовалось доказать.

Фундаментальные функции

$$Z_k(x, y) \quad k=1, 2, \ldots \tag{26'}$$

попарно ортогональны друг к другу, т. е.

$$\iint_D Z_i(x, y) Z_j(x, y)\, dx\, dy = 0, \quad i \neq j, \quad i, j = 1, 2, \ldots \tag{27}$$

Кроме того, благодаря произволу в выборе постоянных, подобных α, эти функции можно считать нормированными, так что

$$\iint_D [Z_k(x, y)]^2\, dx\, dy = 1, \quad k=1, 2, \ldots \tag{28}$$

Наконец, заметим, что система фундаментальных функций $Z_k(x, y)$ непременно должна быть замкнутой в классе непрерывных с частными производными 1-го порядка функций; это значит, что не существует никакой функции $\zeta(x, y)$, обладающей в D непрерывными производными 1-го порядка и ортогональной ко всем Z_k, кроме тождественного нуля. В самом деле, если $\zeta(x, y)$ ортогональна к каждой функции Z_k, то она должна быть ортогональной и к ядру $K(x, y; \xi, \eta)$, так что

$$\mathfrak{Z}(x, y) = \iint_D K(x, y; \xi, \eta)\, \zeta(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta \equiv 0.$$

С другой стороны, если $\zeta(x, y)$ непрерывна в D вместе со своими производными 1-го порядка, то $\mathfrak{Z}(x, y)$ должно иметь непрерывные вторые производные и удовлетворять условиям:

$$\Delta \mathfrak{Z}(x, y) = \zeta(x, y), \quad \mathfrak{Z}(x, y)|_C = 0.$$

Так как $\mathfrak{Z}(x, y) \equiv 0$, то первое из этих условий дает $\zeta(x, y) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Для краевой задачи штурм-лиувиллевского типа с одним переменным можно доказать ограниченность всех фундаментальных функций в их совокупности. Но для рассматриваемого случая краевой задачи с двумя переменными это положение перестает быть верным.[1] Однако можно показать, что каждая из рассматриваемых фундаментальных функций $Z_k(x, y)$ не превосходит по модулю некоторого положительного независящего от k и конечного числа, умноженного на соответствующее фундаментальное число λ_k. Это обстоятельство является простым следствием неравенства Шварца. Именно, так как

$$Z_k(x, y) = \lambda_k \iint_D K(x, y; \xi, \eta)\, Z_k(\xi, \eta)\, d\xi\, d\eta, \tag{29}$$

[1] W. Sternberg, Üb. die asymptot. Integration part. Diffgl., II, Math. Ann., 86.

то, применяя названное неравенство, имеем:

$$|Z_k(x, y)|^2 = \left|\lambda_k \iint\limits_D K(x, y; \xi, \eta) Z_k(\xi, \eta) d\xi \ \eta\right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant |\lambda_k|^2 \iint\limits_D [K(x, y; \xi, \eta)]^2 d\xi\, d\eta \cdot \iint\limits_D [Z_k(\xi, \eta)]^2 d\xi\, d\eta =$$

$$= |\lambda_k|^2 \iint\limits_D [K(x, y; \xi, \eta)]^2 d\xi\, d\eta.$$

Но функция от x и y:

$$\iint\limits_D [K(x, y; \xi, \eta)]^2 d\xi\, d\eta,$$

как мы видели, непрерывна в замкнутой области $D+C$, следовательно, ограничена там и снизу и сверху. Поэтому существует такое не зависящее от k, x и y положительное конечное число M^2, настолько большое, что для данной ограниченной области D

$$\iint\limits_D [K(x, y; \xi, \eta)]^2 d\xi\, d\eta \leqslant M^2.$$

Поэтому

$$|Z_k(x, y)|^2 \leqslant |\lambda_k|^2 \cdot M^2, \tag{30}$$

что и требовалось доказать.

Отсюда вытекает важное следствие. Рассмотрим ряд Фурье:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k Z_k(x, y), \tag{31}$$

расположенный по функциям $Z_k(x, y)$ рассматриваемой нормированной и ортогональной системы. Если порядок малости его коэффициентов ζ_k при возрастании k делается не ниже, чем k^{-3}, то ряд (31) сходится абсолютно и равномерно.

Пусть ζ_k при $k \to \infty$ имеет порядок малости не ниже, чем k^{-4}. Тогда по отношению к ряду (31) возможно почленное применение операции Δ. В самом деле, так как

$$\Delta Z_k(x, y) = -\lambda_k Z_k(x, y),$$

то ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \Delta Z_k(x), y) = -\sum_{k=1}^{\infty} \zeta_k \lambda_k Z_k(x, y) \tag{32}$$

сходится равномерно и абсолютно, если только его коэффициенты $\zeta_k \lambda_k$ имеют порядок малости не ниже, чем k^{-3}. А так как λ_k при $k \to \infty$ растет так же, как k, то для указанной сходимости ряда (32) достаточно, чтобы порядок ζ_k был по крайней мере равен k^{-4}.

Обратимся теперь к уравнению (18), положив в нем $\lambda = \lambda_k$:

$$\rho T'' + \lambda_k \eta T' + \lambda_k M T = 0. \tag{33}$$

Подстановка $T = e^{q_k t}$ приводит к характеристическому уравнению:

$$\rho q_k^2 + \eta \lambda_k q_k + M \lambda_k = 0, \tag{34}$$

откуда

$$q_k', \, q_k'' = \frac{-\lambda_k'' \pm \sqrt{\lambda_k^2 \eta^2 - 4M\rho\lambda_k}}{2\rho}, \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{35}$$

Следовательно, общий интеграл уравнения (18) есть:

$$T_k = C_k' e^{q_k' t} + C_k'' e^{q_k''}, \qquad k = 1, 2, \ldots, \tag{36}$$

где C_k', C_k'' — постоянные, значения которых пока не определены.

Из (26) и (36) можно построить решение $z = \Sigma Z_k T_k$ уравнения (A), обращающееся в нуль на контуре C. Для этого достаточно положить:

$$z(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{C_k' e^{q_k' t} + C_k'' e^{q_k'' t}\} Z_k(x, y), \tag{37}$$

разумеется, в предположении, что ряд (37) сходится.

Легко видеть, что (37) удовлетворяет условию:

$$\left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=+\infty} = 0,$$

так как при $t \to +\infty$ производная по t от каждого члена суммы (37) вследствие свойства q_k', q_k'' стремится к нулю независимо от (x, y).

Чтобы соблюсти первые два условия (A′), нужно только выбрать надлежащим образом коэффициенты C_k', C_k''.

Пусть

$$\Phi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} A_k Z_k(x, y), \qquad \varphi(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} B_k Z_k(x, y) \tag{38}$$

определяют разложение данных функций Φ, φ по фундаментальным функциям $Z_k(x, y)$ ядра $K(x, y; \xi, \eta)$. Чтобы удовлетворить, по крайней мере формально, условиям

$$z|_{t=0} = \Phi(x, y), \qquad \left. \frac{\partial z}{\partial t} \right|_{t=0} = \varphi(x, y),$$

достаточно положить

$$\begin{aligned} C_k' + C_k'' &= A_k, \\ q_k' C_k' + q_k'' C_k'' &= B_k. \end{aligned} \qquad k = 1, 2, \ldots \tag{39}$$

При выбранных таким образом C_k', C_k'' выражение (37) с формальной стороны удовлетворит всем условиям задачи, и нужно только показать, что ряд (37), а также те ряды, которые получаются из него дифференцированием столько раз, сколько нужно для составления уравнения (A), равномерно и абсолютно сходятся для рассматриваемых значений (x, y) и для всех $t \geqslant 0$.

Пусть коэффициенты A_k, B_k разложений (38) функций Φ, φ в ряды Фурье имеют при $k \to \infty$ порядок малости не ниже, чем k^{-4}. Так как q_k', q_k'' при $k \to \infty$ растут по модулю так же, как и k, то для этого достаточно предположить, что $|C_k'|$ и $|C_k''|$ убывают при $k \to \infty$ так же, как и k^{-5}. Мы видели уже, что в таком случае ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k Z_k(x, y), \qquad \sum_{k=1}^{\infty} B_k Z_k(x, y)$$

равномерно и абсолютно сходятся к функциям $\Phi(x, y)$, $\varphi(x, y)$. Более того, по отношению к этим рядам допустимо почленное применение операции Δ, причем получающиеся от этого ряды сходятся равномерно и абсолютно к функциям:

$$\Delta\Phi(x, y), \quad \Delta\varphi(x, y).$$

Так как умножение чисел C_k', C_k'', $C_k' q_k'$, $C_k'' q_k''$ на величины $e^{q_k' t}$, $e^{q_k'' t}$ $(t \geqslant 0)$ не увеличивает модуля этих чисел, то ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{C_k' e^{q_k' t} + C_k'' e^{q_k'' t}\} Z_k(x, y),$$

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{C_k' q_k' e^{q_k' t} + C_k'' q_k'' e^{q_k'' t}\} Z_k(x, y),$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \{C_k' e^{q_k' t} + C_k'' e^{q_k'' t}\} \lambda_k Z_k(x, y),$$

$$-\sum_{k=1}^{\infty} \{C_k' q_k' e^{q_k' t} + C_k'' q_k'' e^{q_k'' t}\} \lambda_k Z_k(x, y)$$

равномерно и абсолютно сходятся к функциям, соответственно равным

$$z(x, y); \qquad \frac{\partial z}{\partial t}; \qquad \Delta z(x, y); \qquad \Delta \frac{\partial z}{\partial t}.$$

Кроме того, из сходимости последнего из четырех написанных выше рядов благодаря совпадению порядков q_k' и q_k'' с порядком λ_k при $k \to \infty$ получается, что и ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \{C_k' q_k'^2 e^{q_k' t} + C_k'' q_k'' e^{q_k'' t}\} Z_k(x, y)$$

сходится равномерно и абсолютно. Но последний ряд получается путем почленного двукратного дифференцирования по t ряда для $z(x, y, t)$; следовательно, его сумма равна $\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}$.

Из этих соображений следует, что если порядок малости коэффициентов A_k, B_k в разложениях для Φ, φ не ниже, чем k^{-4}, то все необходимые действия, формально выполняемые над найденным решением $z(x, y, t)$ для составления уравнения (A), вполне законны, и (37) действительно есть решение задачи о свободных колебаниях упруго-вязкой мембраны, закрепленной в точках контура C, на котором она натянута. Мы видели уже, что другого решения этой задачи быть не может.

Рассмотрим теперь вопрос о вынужденных колебаниях упруго-вязкой мембраны, закрепленной в точках замкнутого контура C. С математической точки зрения этот вопрос сводится к изысканию решения z неоднородного уравнения

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}(\eta \dot{z} + Mz) + \frac{\partial^2}{\partial y^2}(\eta \dot{z} + Mz) = \rho \frac{\partial^2 z}{\partial t^2} - f(x, y, t), \tag{B}$$

которое удовлетворяло бы условиям:

$$z|_{t=0}=\Phi(x,\ y);\qquad \dot{z}|_{t=0}=\varphi(x,\ y);\qquad z|_{C}=0;\qquad \dot{z}|_{t=+\infty}=0. \tag{B'}$$

Мы уже видели, что если такое решение существует, то оно единственное. А так как решение однородного уравнения (A) уже найдено, то остается показать способ определения частного решения уравнения (B). Положим

$$f(x,\ y,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\,Z_k(x,\ y), \tag{40}$$

где $Z_k(x,\ y)$, $k=1,\ 2,\ldots,$ — функции, принадлежащие нормальной ортогональной системе ядра $K(x,\ y;\ \xi,\ \eta)$, рассмотренные выше.

Решение задачи (B), (B') будем искать в виде:

$$z(x,\ y,\ t)=\sum_{k=1}^{\infty}\{C_k' e^{q_k' t}+C_k'' e^{q_k'' t}+a_k(t)\}\,Z_k(x,\ y) \tag{41}$$

с определенными раньше значениями C_k', C_k'', q_k', q_k''. Здесь $a_k(t)$ являются пока неопределенными функциями.

Подставляя (41) в (B), найдем:

$$\sum_{k=1}^{\infty}\{-[\rho q_k'^2+\eta\lambda_k q_k'+M\lambda_k]\,C_k' e^{q_k' t}-[\rho q_k''^2+\eta\lambda_k q_k''+M\lambda_k]\,C_k'' e^{q_k'' t}-$$

$$-[\rho\ddot{a}_k+\eta\lambda_k\dot{a}_k+M\lambda_k a_k]\}\,Z_k(x,\ y)=-\sum_{k=1}^{\infty} w_k(t)\,Z_k(x,\ y).$$

По определению чисел $q_k'\,q_k''$ выражения в квадратных скобках под знаком суммы в левой части исчезают; следовательно, написанное тождество будет удовлетворено, если выбрать a_k согласно уравнениям:

$$\rho a_k''(t)+\eta\lambda_k a_k'(t)+M\lambda_k a_k(t)=w_k(t)\qquad (k=1,\ 2,\ldots). \tag{42}$$

Уравнение (42) может быть представлено в виде:

$$(\rho D^2+\eta\lambda_k D+M\lambda_k E)\,a_k(t)=w_k(t),$$

где $D=\dfrac{d}{dt}$ и E — оператор тождественного преобразования. Отсюда, наоборот,

$$a_k(t)=(\rho D^2+\eta\lambda_k D+M\lambda_k E)^{-1}\,w_k(t).$$

Рассмотрим случай, когда $q_k'\neq q_k''$. Тогда можно написать:

$$a_k(t)=\frac{1}{\rho(q_k'-q_k'')}(D-q_k' E)^{-1}\,w_k''(t)+\frac{1}{\rho(q_k''-q_k')}(D-q_k'' E)^{-1}\,w_k(t)=$$

$$=a_{1k}(t)+a_{2k}(t),$$

где положено:

$$a_{1k}(t)=\frac{1}{\rho(q_k'-q_k'')}(D-q_k' E)^{-1}\,w_k(t),\qquad a_{2k}(t)=\frac{1}{\rho(q_k''-q_k')}(D-q_k'' E)^{-1}\,w_k(t).$$

Отсюда легко найти, что исчезающее при $t=0$ значение функции $a_k(t)$ должно быть таково:

$$a_k(t)=\frac{1}{\rho(q_k'-q_k'')}\int_0^t w_k(\theta)e^{q_k'(t-\theta)}d\theta+\frac{1}{\rho(q_k''-q_k')}\int_0^t w_k(\theta)e^{q_k''(t-\theta)}d\theta, \tag{43}$$

$$k=1,\ 2,\ldots,\quad q_k''\neq q_k'.$$

Если бы оказалось, что для некоторого $k=k_0$

$$\lambda_{k_0}=\frac{4M\rho}{\eta}, \tag{44}$$

то $q_{k_0}'=q_{k_0}''=q_{k_0}$. Изложенный выше способ неприменим в этом случае. Но тогда

$$\rho D^2+\eta\lambda_{k_0}D+M\lambda_{k_0}=\rho(D-q_{k_0}E)^2,$$

следовательно,

$$a_{k_0}(t)=\frac{1}{\rho}(D-q_{k_0}E)^{-1}(D-q_{k_0}E)^{-1}w_{k_0}(t)=$$

$$=\frac{1}{\rho}(D-q_{k_0}E)^{-1}\int_0^\theta w_{k_0}(\vartheta)e^{q_{k_0}(\theta-\vartheta)}d\vartheta=\frac{1}{\rho}\int_0^t e^{q_{k_0}(t-\theta)}d\theta\int_0^\theta w_{k_0}(\vartheta)e^{q_{k_0}(\theta-\vartheta)}d\vartheta=$$

$$=\frac{1}{\rho}\int_0^t d\theta\int_0^\theta w_{k_0}(\vartheta)e^{q_{k_0}(\theta-\vartheta)}d\vartheta. \tag{45}$$

Таким образом для этого случая соответствующий коэффициент $a_{k_0}(t)$ представится в виде одного двойного интеграла. Как видно, таких коэффициентов не может быть больше одного.

Итак, мы получили решение уравнения (B):

$$\Delta u=\rho\frac{\partial^2 z}{\partial t^2}-f(x,\ y,\ t),\qquad u=\eta\frac{\partial z}{\partial t}+Mz$$

при условиях (B′):

$$z|_{t=0}=\Phi(x,\ y);\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi(x,\ y);\qquad z|_C=0;\qquad \left.\frac{\partial z}{\partial t}\right|_{t=+\infty}=0$$

в виде:

$$z=z_0+\zeta, \tag{46}$$

где

$$z_0=\sum_{k=1}^{\infty}\{C_k'e^{q_k't}+C_k''e^{q_k''t}\}Z_k(x,\ y) \tag{47}$$

есть решение соответствующего однородного уравнения (A) с надлежащим способом выбранными коэффициентами C_k', C_k'', а

$$\zeta=\frac{1}{\rho}\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{1}{q_k'-q_k''}\int_0^t w_k(\theta)e^{q_k'(t-\theta)}d\theta+\frac{1}{q_k''-q_k'}\int_0^t w_k(\theta)e^{q_k''(t-\theta)}d\theta\right\}Z_k(x,y). \tag{48}$$

Здесь $Z_k(x,\ y)$, $k=1,\ 2,\ldots$, есть замкнутая система нормированных ортогональных друг к другу линейно независимых функций, каждая из которых, являясь решением краевой задачи

$$\Delta Z+\lambda Z=0,\qquad Z|_C=0,$$

соответствует одному и только одному определенному положительному числу λ_k. Каждая из функций $Z_k(x, y)$ непрерывна в D и обладает непрерывными производными 1-го и 2-го порядка.

Докажем, что ряд (48) может быть почленно дифференцирован столько раз, сколько требуется для составления уравнения (B). При этом является существенным следующее предположение. Пусть w_k есть максимум функции $|w_k(\theta)|$, $k=1, 2, \ldots$, когда θ меняется от 0 до $+\infty$. В таком случае легко получить, что

$$\left|\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k'(t-\theta)}\, d\theta\right| \leqslant \frac{w_k}{|q_k'|},$$

$$\left|\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k''(t-\theta)}\, d\theta\right| \leqslant \frac{w_k}{|q_k''|}.$$

Высказанное выше утверждение имеет место, если w_k при возрастании k представляет малую величину порядка не ниже, чем k^{-3}. Действительно, так как при возрастании k числа $|q_k'|$, $|q_k''|$, $|q_k'-q_k''|$, λ_k являются большими того же порядка, что и k, и так как отношения

$$\frac{Z_k(x, y)}{q'-q_k''}$$

при $k \to \infty$ равномерно ограничены, то суммы

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left\{\frac{Z_k(x, y)}{\rho(q_k'-q_k'')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k'(t-\theta)}\, d\theta + \frac{Z_k(x, y)}{\rho(q_k''-q_k')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k''(t-\theta)}\, d\theta\right\}\right|,$$

$$\left|M\sum_{k=n+1}^{n+p}\left\{\frac{-\lambda_k Z_k(x, y)}{\rho(q_k'-q_k'')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k'(t-\theta)}\, d\theta + \frac{-\lambda_k Z_k(x, y)}{\rho(q_k''-q_k')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k''(t-\theta)}\, d\theta\right\}\right|,$$

$$\left|n\sum_{k=n+1}^{n+p}\left\{\frac{-\lambda_k q_k' Z_k(x, y)}{\rho(q_k'-q_k'')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k'(t-\theta)}\, d\theta + \frac{-\lambda_k q_k'' Z_k(x, y)}{\rho(q_k''-q_k')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k''(t-\theta)}\, d\theta\right\}\right|,$$

$$\left|\sum_{k=n+1}^{n+p}\left\{w_k(t)\, Z_k(x, y) + \frac{q_k'^2 Z_k(x, y)}{q_k'-q_k''}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k'(t-\theta)}\, d\theta + \right.\right.$$
$$\left.\left. + \frac{q_k''^2 Z_k(x, y)}{q_k''-q_k'}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k''(t-\theta)}\, d\theta\right\}\right|$$

при достаточно большом n и каком угодно конечном $p \geqslant 1$ представляют собой малые порядков, соответственно равных

$$n^{-4},\quad n^{-3},\quad n^{-2},\quad n^{-2}.$$

Это значит, что ряды

$$\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{Z_k(x, y)}{\rho(q_k'-q_k'')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k'(t-\theta)}\, d\theta + \frac{Z_k(x, y)}{\rho(q_k''-q_k')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k''(t-\theta)}\, d\theta\right\},$$

$$M\sum_{k=1}^{\infty}\left\{\frac{\Delta Z_k(x, y)}{\rho(q_k'-q_k'')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k'(t-\theta)}\, d\theta + \frac{\Delta Z_k(x, y)}{\rho(q_k''-q_k')}\int_0^t w_k(\theta)\, e^{q_k''(t-\theta)}\, d\theta\right\},$$

$$\eta \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{q_k' \, \Delta Z_k(x, y)}{\rho(q_k' - q_k'')} \int_0^t w_k(\theta) e^{q_k'(t-\theta)} d\theta + \frac{q_k'' \, \Delta Z_k(x, y)}{\rho(q_k'' - q_k')} \int_0^t w_k(\theta) e^{q_k''(t-\theta)} d\theta \right\},$$

$$\rho \sum_{k=1}^{\infty} \left\{ \frac{w_k(t) Z_k(x, y)}{\rho} + \frac{q_k'^2 Z_k(x, y)}{\rho(q_k' - q_k'')} \int_0^t w_k(\theta) e^{q_k'(t-\theta)} d\theta + \right.$$

$$\left. + \frac{q_k''^2 Z_k(x, y)}{\rho(q_k'' - q_k')} \int_0^t w_k(\theta) e^{q_k''(t-\theta)} d\theta \right\}$$

равномерно и абсолютно сходятся к функциям, соответственно равным

$$\zeta(x, y, t), \quad \Delta(M\zeta), \quad \Delta\left(\eta \frac{\partial \zeta}{\partial t}\right), \quad \rho \frac{\partial^2 \zeta}{\partial t^2},$$

что и утверждалось.

Итак, определяемая рядом (48) функция $\zeta(x, y, t)$ допускает почленное дифференцирование, необходимое для составления уравнения (B).

Что касается решения однородного уравнения

$$z_0(x, y, t) = \sum_{k=1}^{\infty} \{C_k' e^{q_k' t} + C_k'' e^{q_k'' t}\} Z_k(x, y), \tag{49}$$

ты мы видели еще раньше, что только что полученный вывод для $\zeta(x, y, t)$ применим и к $z_0(x, y, t)$.

Таким образом путем почленного дифференцирования суммы рядов (47) и (48) могут быть составлены все производные, входящие в уравнение (A).

Наконец, заметим, что как в случае колебания упруго-вязких нитей, так и здесь имеет место явление, названное нами элевтерозом и состоящее в последовательном затухании обертонов, начиная с наиболее высоких. Это обстоятельство позволяет в найденном решении ограничиваться лишь конечным числом членов. В частности, можно было бы применить акустический метод к практическому определению модуля сдвига μ и коэффициента внутреннего трения η. А знание последнего могло бы послужить для определения продолжительности релаксации на основании максвелловских уравнений.

Поступило в редакцию 5 VI 1937.

SUR LA QUESTION DES PETITES VIBRATIONS DE MEMBRANES ÉLASTO-VISQUEUSES

A. N. GUÉRASSIMOV

(Résumé)

Le mémoire contient une application de la théorie générale donnée par l'auteur dans son travail: „Principes de la théorie de la déformation des corps élasto-visqueux“ (Прикл. мат. и мех., т. II, вып. 3, 1938)