АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS AND MECHANICS

Т. II, в. 4 1939 V. II, № 4

НЕКОТОРЫЕ ОБОБЩЕНИЯ ТЕОРИИ ТОНКИХ ОБОЛОЧЕК С ПРИМЕНЕНИЯМИ К РЕШЕНИЮ ЗАДАЧ УСТОЙЧИВОСТИ УПРУГОГО РАВНОВЕСИЯ

Х. М. МУШТАРИ
(Казань)

1. Определение элементов деформации тонкой оболочки с точностью до квадрата смещения

Для изучения равновесия тонкой оболочки при наличии изгибных смещений порядка толщины оболочки, а также для применения к ней изложенного ниже энергетического метода решения задач устойчивости необходимо определение деформации срединной поверхности оболочки с точностью до квадрата смещения. Пользуясь методом Ляв и его обозначениями [1], находим

$$\begin{aligned} \varepsilon_1 &= e_{11} + \frac{1}{2} e_{12}^2 + \frac{1}{2} e_{13}^2, \\ \varepsilon_2 &= e_{22} + \frac{1}{2} e_{21}^2 + \frac{1}{2} e_{23}^2, \\ \omega &= e_{21} + e_{12} - e_{11} e_{12} - e_{22} e_{21} + e_{13} e_{23}; \end{aligned} \tag{1.1}$$

$$p_1' = \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(-e_{13} + e_{13} e_{11}\right) + \frac{A}{R_1}\left(e_{11} e_{12} - e_{12}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e_{23} - e_{23} e_{22} - e_{21} e_{13}\right) - e_{12}\frac{\partial e_{13}}{\partial \alpha}, \tag{2.1}$$

$$p_2' = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(e_{13} - e_{13} e_{11}\right) + \frac{B}{R_2}\left(1 - \frac{1}{2} e_{12}^2 - \frac{1}{2} e_{13}^2\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \beta}\left(e_{23} - e_{23} e_{22} - e_{21} e_{13}\right) - e_{12}\frac{\partial e_{13}}{\partial \beta}, \tag{2.2}$$

$$q_1' = \frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}\left(-e_{23} + e_{23} e_{22} + e_{21} e_{13} + e_{13} e_{12}\right) - \frac{A}{R_1}\left(1 - \frac{1}{2} e_{23}^2 - \frac{1}{2} e_{12}^2\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e_{13} - e_{13} e_{11}\right) + e_{23}\frac{\partial e_{12}}{\partial \alpha}, \tag{2.3}$$

$$q_2' = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}\left(e_{23} - e_{23} e_{22} - e_{21} e_{13} - e_{12} e_{13}\right) - \frac{B}{R_2}\left(e_{12} - e_{12} e_{11} + e_{13} e_{23}\right) - \\ - \frac{\partial}{\partial \beta}\left(e_{13} - e_{13} e_{11}\right) + e_{23}\frac{\partial e_{12}}{\partial \beta}, \tag{2.4}$$

$$r_1' = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial B}\left(1 - \frac{1}{2} e_{23}^2 - \frac{1}{2} e_{13}^2\right) + \frac{A}{R_1}\left(e_{23} - e_{23} e_{22} - e_{21} e_{13}\right) + \\ + \frac{\partial}{\partial \alpha}\left(e_{12} - e_{12} e_{11}\right) + e_{23}\frac{\partial e_{13}}{\partial \alpha}, \tag{2.5}$$

$$r_2'=\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(1-\frac{1}{2}e_{23}^{\,2}-\frac{1}{2}e_{13}^{\,2}\right)+\frac{B}{R_2}(-e_{13}+e_{13}e_{11}+e_{12}e_{23})+$$
$$+\frac{\partial}{\partial\beta}(e_{12}-e_{12}e_{11})+e_{23}\frac{\partial e_{13}}{\partial\beta}, \tag{2.6}$$

где

$$e_{11}=\frac{1}{A}\frac{\partial u}{\partial\alpha}+\frac{v}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta}-\frac{w}{R_1},\qquad e_{12}=\frac{1}{A}\frac{\partial v}{\partial\alpha}-\frac{u}{AB}\frac{\partial A}{\partial\beta},\qquad e_{13}=\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}+\frac{u}{R_1},$$
$$e_{21}=\frac{1}{B}\frac{\partial u}{\partial\beta}-\frac{v}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha},\qquad e_{22}=\frac{1}{B}\frac{\partial v}{\partial\beta}+\frac{u}{AB}\frac{\partial B}{\partial\alpha}-\frac{w}{R_2},\qquad e_{23}=\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{v}{R_2}. \tag{3}$$

Правильность выражений (3) можно проверить с помощью уравнений (11) гл. XXIV Ляв, в которых, однако, в выражениях r_1' и r_2' следует добавить ошибочно пропущенные там члены соответственно

$$\left(-\frac{\varepsilon_1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\right)\quad\text{и}\quad\left(\frac{\varepsilon_2}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\right).$$

По формулам (1) величины e_{11}, e_{22}, e_{12}, e_{21} суть одного порядка с удлинениями.

Мы рассматриваем лишь случай малых деформаций срединной поверхности, причем немалые смещения получаются от изгибов и поворотов, характеризуемых направляющими косинусами, величины которых при отбрасывании ε_1, ε_2, ω по сравнению с единицей суть $N_1=e_{13}$, $N_2=e_{23}$, $L_3=-e_{13}$, $M_3=-e_{23}$. Поэтому e_{13}, e_{23} могут быть порядка $\sqrt{\varepsilon_1}$, $\sqrt{\varepsilon_2}$, $\sqrt{\omega}$. Следовательно, с точностью до квадратов этих последних имеем приближенные формулы:

$$\varepsilon_1=e_{11}+\frac{1}{2}e^2_{13},\qquad \varepsilon_2=e_{22}+\frac{1}{2}e^2_{23},\qquad \omega=e_{21}+e_{12}+e_{13}e_{23};$$

$$p_1'=-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{13}-\frac{A}{R_1}e_{12}+\frac{\partial e_{23}}{\partial\alpha},\qquad p_2'=\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{13}+\frac{B}{R_2}\left(1-\frac{1}{2}e^2_{13}\right)+\frac{\partial e_{23}}{\partial\beta},$$
$$q_1'=-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{23}-\frac{A}{R_1}\left(1-\frac{1}{2}e^2_{23}\right)-\frac{\partial e_{13}}{\partial\alpha},$$
$$q_2'=\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{23}-\frac{B}{R_2}(e_{12}+e_{13}e_{23})-\frac{\partial e_{13}}{\partial\beta}, \tag{4}$$
$$r_1'=-\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}\left(1-\frac{1}{2}e_{13}^{\,2}-\frac{1}{2}e_{23}^{\,2}\right)+\frac{A}{R_1}e_{23}+\frac{\partial e_{12}}{\partial\alpha}+e_{23}\frac{\partial e_{13}}{\partial\alpha},$$
$$r_2'=\frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}\left(1-\frac{1}{2}e_{13}^{\,2}-\frac{1}{2}e_{23}^{\,2}\right)-\frac{B}{R_2}e_{13}+\frac{\partial e_{12}}{\partial\beta}+e_{23}\frac{\partial e_{13}}{\partial\beta}.$$

Компоненты деформации элементов, расположенных на расстоянии z от срединной поверхности, в случае ортогонально анизотропной оболочки определяются по формулам:

$$e_{xx}=\varepsilon_1-zk_1+\frac{z^2}{2}\frac{a_1k_1+a_2k_2-2k_1}{R_1},\qquad e_{yy}=\varepsilon_2-zk_2+\frac{z^2}{2}\frac{a_1k_1+a_2k_2-2k_2}{R_2},$$
$$e_{xy}=\omega-2\tau z-\tau z^2\left(\frac{1}{R_1}+\frac{1}{R_2}\right),\qquad e_{zz}=a_1\varepsilon_1+a_2\varepsilon_2-(a_1k_1+a_2k_2)z, \tag{5.1}$$

$$e_{yz}=\frac{z}{B}\left(a_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\beta}+a_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\beta}\right),\qquad e_{xz}=\frac{z}{A}\left(a_1\frac{\partial\varepsilon_1}{\partial\alpha}+a_2\frac{\partial\varepsilon_2}{\partial\alpha}\right), \tag{5.2}$$

где

$$a_1=-\frac{\sigma_{13}+\sigma_{23}\sigma_{12}}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}},\qquad a_2=-\frac{\sigma_{13}\sigma_{21}+\sigma_{23}}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}}, \tag{6}$$

причем σ_{13}, например, коэффициент поперечного укорочения по направлению оси z при действии растягивающей силы по оси x. Заметим, что при выводе этих формул мы предполагали, что деформация происходит в пределах закона Гука, и, таким образом, пользовались зависимостями:

$$e_{xx} = \frac{X_x}{E_1} - \sigma_{21}\frac{Y_y}{E_2} - \sigma_{31}\frac{Z_z}{E_3}, \qquad e_{yy} = -\sigma_{12}\frac{X_x}{E_1} + \frac{Y_y}{E_2} - \sigma_{32}\frac{Z_z}{E_3},$$
$$e_{zz} = -\sigma_{13}\frac{X_x}{E_1} - \sigma_{23}\frac{Y_y}{E_2} + \frac{Z_z}{E_3}, \qquad X_y = \mu_3 e_{xy}, \quad X_z = \mu_2 e_{xz}, \quad Y_z = \mu_1 e_{yz}, \tag{7}$$

где $E_1, \ldots$; $\mu_3, \ldots$ суть соответствующие модули Юнга и модули сдвига.

2. Напряжение во вдвойне анизотропной оболочке

Предположим, что, кроме ортогональной анизотропии материала, оболочка обладает еще особой анизотропией, которую мы называем конструктивной анизотропией оболочки. Такая анизотропия оболочки в случае изотропного материала была впервые рассмотрена, повидимому, Флюгге[2] в применении к цилиндрическим оболочкам круглого сечения, подкрепленным сеткой шпангоутов и стрингеров. Если эта сетка достаточно густа, то крепления можно рассматривать бесконечно близкими, но слабыми и оболочку считать анизотропной. Например в задачах на устойчивость упругого равновесия такие оболочки можно считать анизотропными, если расстояния между шпангоутами и стрингерами меньше, чем ожидаемые длины волн, образующихся при потере устойчивости. Для таких оболочек усилия и моменты, отнесенные к единице длины линии кривизны „срединной" поверхности, суть:

$$T_1 = \int\limits_1 X_x\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dF_1, \qquad T_2 = \int\limits_2 Y_y\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right) dF_2,$$
$$S_1 = \int\limits_1 X_y\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dF_1, \qquad S_2 = -\int\limits_2 X_y\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right) dF_2; \tag{8.1}$$

$$H_1 = -\int\limits_1 zY_x\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dF_1, \qquad H_2 = \int\limits_2 zX_y\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right) dF_2,$$
$$G_1 = \int\limits_1 zX_x\left(1 - \frac{z}{R_2'}\right) dF_1, \qquad G_2 = \int\limits_2 zY_y\left(1 - \frac{z}{R_1'}\right) dF_2; \tag{8.2}$$

где $dF_1 = \frac{ds_1\,dz}{s_1}$, $dF_2 = \frac{ds_2\,dz}{s_2}$; ds_1, ds_2 суть элементы соответствующего сечения срединной поверхности, s_1 и s_2 — длины периодически повторяемых частей по этим сечениям, интегралы взяты по площадям, приходящимся в среднем на единицу длины этих сечений.

Полагая в первом приближении, что линейные элементы, нормальные к срединной поверхности до деформации, остаются нормальными к деформированной поверхности и не изменяют своей длины, для оболочки постоянной толщины имеем приближенные формулы:

$$e_{xx} = \frac{1}{1 - \frac{z}{R_1}}(\varepsilon_1 - zk_1), \ldots, \qquad X_x = \frac{E_1}{1 - \sigma_{21}\sigma_{12}}(e_{xx} + \sigma_{21}e_{yy}), \tag{9}$$

пользуясь которыми и в случае конструктивно анизотропной оболочки, из (8.1) и (8.2) находим:

$$T_1 = K_1(\varepsilon_1 + \sigma_{21}\varepsilon_2) + M_1\varepsilon_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) - M_1(k_1 + \sigma_{21}k_2) + D_1' k_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right), \quad (10.1)$$

$$T_2 = K_2(\varepsilon_2 + \sigma_{12}\varepsilon_1) - M_2(k_2 + \sigma_{12}k_1) + M_2\varepsilon_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + D_2' k_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right), \quad (10.2)$$

$$S_1 = K_{1,2}\,\omega - M_{1,2}\frac{\omega}{R_2} - 2M_{1,2}\tau + D_3'\tau\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right), \quad (10.3)$$

$$S_2 = -K_{2,1}\,\omega + M_{2,1}\frac{\omega}{R_1} + 2M_{2,1}\tau + D_3''\tau\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right), \quad (10.4)$$

$$G_1 = M_1(\varepsilon_1 + \sigma_{21}\varepsilon_2) - D_1'(k_1 + \sigma_{21}k_2) + D_1'\varepsilon_1\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + k_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right)L_1, \quad (11.1)$$

$$G_2 = M_2(\varepsilon_2 + \sigma_{12}\varepsilon_1) - D_2'(k_2 + \sigma_{12}k_1) + D_2'\varepsilon_2\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + k_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)L_2, \quad (11.2)$$

$$H_1 = -M_{1,2}\,\omega + D_3'\frac{\omega}{R_2} + 2D_3'\tau + \tau\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)L_{1,2}, \quad (11.3)$$

$$H_2 = M_{2,1}\,\omega - D_3''\frac{\omega}{R_1} - 2D_3''\tau + \tau\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right)L_{2,1}, \quad (11.4)$$

где

$$K_1 = \frac{E_1F_1}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}}, \qquad K_2 = \frac{E_2F_2}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}} \quad \text{(жесткости растяжения)}; \quad (12.1)$$

$$K_{1,2} = \mu_3F_1, \qquad K_{2,1} = \mu_3F_2 \quad \text{(жесткости сдвига)}; \quad (12.2)$$

$$\begin{gathered} M_1 = \frac{E_1}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}}\int\limits_1 z\,dF_1, \qquad M_2 = \frac{E_2}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}}\int\limits_2 z\,dF_2, \\ M_{1,2} = \mu_3\int\limits_1 z\,dF_1, \qquad M_{2,1} = \mu_3\int\limits_2 z\,dF_2; \end{gathered} \quad (12.3)$$

$$D_1' = \frac{E_1}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}}\int\limits_1 z^2\,dF_1 = \frac{E_1I_1}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}}, \qquad D_2' = \frac{E_2I_2}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}} \quad \text{(жесткости изгиба)}; \quad (12.4)$$

$$D_3' = \mu_3I_1, \quad D_3'' = \mu_3I_2 \quad \text{(жесткости скручивания)}; \quad (12.5)$$

$$L_1 = \frac{E_1}{1-\sigma_{12}\sigma_{21}}\int\limits_1 z^3\,dF_1, \qquad L_{1,2} = \mu_3\int\limits_1 z^3\,dF_1. \quad (12.6)$$

При применении этих формул следует учитывать, что за срединную поверхность $z=0$ принята нейтральная поверхность оболочки, т. е. такая поверхность, удлинения которой не зависят от изгибающих и скручивающих моментов. За такую поверхность при малых $\frac{z}{R_1}$, $\frac{z}{R_2}$ с достаточной точностью может быть принято геометрическое место центров тяжестей всевозможных нормальных сечений оболочки, т. е. центральная поверхность. В целях удобства решения задачи за срединную поверхность будем принимать поверхность простейшей геометрической формы. Предположим, что эта поверхность является центральной поверхностью оболочки или очень близка к ней, причем отклонения ее от центральной поверхности периодические. Тогда решение задачи упругого равновесия для такой оболочки даст в напряжениях и в смещениях картину, близкую к истинной.

В этом случае M_1, M_2, $M_{1,2}$, $M_{2,1}$ равны нулю или очень малы. Поэтому:

1. Если удлинения $\varepsilon_1, \ldots$ одного порядка с $zk_1, \ldots$, то

$$T_1 = K_1(\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2), \quad T_2 = K_2(\varepsilon_2 + \sigma_1\varepsilon_1); \quad S_1 = K_{1,2}\,\omega, \quad S_2 = -K_{2,1}\,\omega; \tag{13}$$

$$G_1 = -D_1'(k_1 + \sigma_2 k_2), \quad G_2 = -D_2'(k_2 + \sigma_1 k_1); \quad H_1 = 2D_3'\tau, \quad H_2 = -2D_3''\tau; \tag{14}$$

а в частности, для оболочки постоянной толщины $2h$ имеем:

$$T_1 = \frac{2E_1 h}{1-\sigma_1\sigma_2}(\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2), \quad T_2 = \frac{2E_2 h}{1-\sigma_1\sigma_2}(\varepsilon_2 + \sigma_1\varepsilon_1); \quad S_1 = -S_2 = 2\mu_3\,\omega h; \tag{13'}$$

$$G_1 = -D_1(k + \sigma_2 k_2), \quad G_2 = -D_2(k_2 + \sigma_1 k_1); \quad H_1 = -H_2 = 2D_3\tau; \tag{14'}$$

где

$$D_1 = \frac{2}{3}\frac{E_1 h^3}{1-\sigma_1\sigma_2}, \quad D_2 = \frac{2}{3}\frac{E_2 h^3}{1-\sigma_1\sigma_2}, \quad D_3 = \frac{2}{3}\mu_3 h^3; \quad \sigma_1 = \sigma_{12}, \quad \sigma_2 = \sigma_{21}. \tag{15}$$

2. Если удлинения малы по сравнению с изгибными деформациями, то упругие моменты попрежнему выражаются по (14) или (14′), а упругие усилия по (13) определяются недостаточно точно.

В этом случае необходимо второе приближение. Пользуясь выражениями (5) и другими, из (8) находим:

$$S_1 = K_{1,2}\,\omega + D_3'\tau\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right), \quad S_2 = -K_{2,1}\,\omega + D_3''\tau\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right); \tag{16.1}$$

$$\begin{aligned} T_1 = K_1(\varepsilon_1 + \sigma_2\varepsilon_2) + D_1'\Big\{k_1\left(\frac{1}{R_2} - \frac{1}{R_1}\right) + \frac{a_1}{R_1}(k_1 + \sigma_2 k_2) + \\ + \frac{a_1 k_1 + a_2 k_2}{2}\left(\frac{1}{R_1} + \frac{\sigma_2}{R_2}\right)\Big\} + \frac{D_2' a_1}{R_2}(k_2 + \sigma_1 k_1), \end{aligned} \tag{16.2}$$

$$\begin{aligned} T_2 = K_2(\varepsilon_2 + \sigma_1\varepsilon_1) + D_2'\Big\{k_2\left(\frac{1}{R_1} - \frac{1}{R_2}\right) + \frac{a_2}{R_2}(k_2 + \sigma_1 k_1) + \\ + \frac{a_1 k_1 + a_2 k_2}{2}\left(\frac{1}{R_2} + \frac{\sigma_1}{R_1}\right)\Big\} + \frac{D_1' a_2}{R_1}(k_1 + \sigma_2 k_2). \end{aligned} \tag{16.3}$$

Эти формулы выведены для криволинейно-анизотропной оболочки постоянной толщины. Они могут применяться и в случае конструктивной анизотропии, если срединная поверхность мало отличается от поверхности симметрии оболочки и если жесткости изгиба и скручивания малы по сравнению с жесткостями растяжения и сдвига, т. е. если оболочка „в среднем тонка". В заключение отметим, что в первом приближении потенциальная энергия деформации оболочки постоянной толщины на единицу площади срединной поверхности равна:

$$\begin{aligned} W = \frac{E_1 h}{1-\sigma_1\sigma_2}\left(\varepsilon_1^2 + 2\sigma_2\varepsilon_1\varepsilon_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}\varepsilon_2^2\right) + \mu_3\,\omega^2 h + \\ + \frac{D_1}{2}\left(k_1^2 + 2\sigma_2 k_1 k_2 + \frac{\sigma_2}{\sigma_1}k_2^2\right) + 2D_3\tau^2. \end{aligned} \tag{17}$$

3. Определение деформации срединной поверхности в случае больших изгибных смещений

Если компоненты смещения величины одного порядка с размерами оболочки, пренебрегать третьими степенями величин e_{13}, e_{23} по сравнению с компонентами удлинений нельзя.

Положим, что под действием нагрузки оболочка деформируется при малых удлинениях и конечных изгибах. Предположим, что эта окончательная форма деформированной поверхности может быть получена с помощью малых смещений из такой поверхности, переход к которой от первоначальной недеформированной поверхности может быть определен. Эту промежуточную форму будем называть первой деформированной поверхностью. Ее линейный элемент

$$ds_1 = \{A_1^2 d\alpha^2 + B_1^2 d\beta^2 + 2A_1 B_1 \omega \, d\alpha \, d\beta\}^{\frac{1}{2}}, \quad A_1 = A(1+\varepsilon_1), \; B_1 = B(1+\varepsilon_2). \tag{18}$$

Предположим далее, что ε_1, ε_2, ω тем или иным путем могут быть выражены через внешние нагрузки. При переходе от первой деформированной поверхности ко второй (т. е. к окончательной форме) имеют место дополнительные удлинения ε_1', ε_2', ω'.

Повороты вокруг подвижных осей обозначим через

$$p_1'' d\alpha + p_2'' d\beta, \quad q_1'' d\alpha + q_2'' d\beta, \quad r_1'' d\alpha + r_2'' d\beta.$$

Путем вычислений, аналогичных проведенным в § 324—326 курса Ляв, находим:

$$\varepsilon_1' = e_{11}' = \frac{1}{A_1}\left(\frac{\partial u}{\partial \alpha} + q_1' w - r_1' v\right), \qquad \varepsilon_2' = e_{22}' = \frac{1}{B_1}\left(\frac{\partial v}{\partial \beta} + r_2' u - p_2' w\right),$$
$$\omega' = e_{21}' + e_{12}', \tag{19}$$

$$p_1'' = r_1' e_{13}' + \frac{\partial e_{23}'}{\partial \alpha} + q_1' e_{12}' + p_1', \qquad p_2'' = r_2' e_{13}' + \frac{\partial e_{23}'}{\partial \beta} + q_2' e_{12}' + p_2', \tag{20.1}$$

$$q_1'' = r_1' e_{23}' - \frac{\partial e_{13}'}{\partial \alpha} + q_1' - p_1' e_{12}', \qquad q_2'' = r_2' e_{23}' - \frac{\partial e_{13}'}{\partial \beta} + q_2' - p_2' e_{12}', \tag{20.2}$$

$$r_1'' = \frac{\partial e_{12}'}{\partial \alpha} - p_1' e_{13}' + r_1' - q_1' e_{23}', \qquad r_2'' = \frac{\partial e_{12}'}{\partial \beta} - p_2' e_{13}' + r_2' - q_2' e_{23}', \tag{20.3}$$

где

$$A_1 e_{12}' = \frac{\partial v}{\partial \alpha} + r_1' u - p_1' w, \qquad A_1 e_{13}' = \frac{\partial w}{\partial \alpha} + p_1' v - q_1' u,$$
$$B_1 e_{21}' = \frac{\partial u}{\partial \beta} + q_2' w - r_2' v, \qquad B_1 e_{23}' = \frac{\partial w}{\partial \beta} + p_2' v - q_2' u. \tag{21}$$

Из формул (19), (20) и (21) при $A = B = 1$, $q_1' = p_2' = r_2' = 0$ получаются соответствующие формулы Грина [3], полученные им независимо от нас, а при

$$p_1' = q_2' = 0, \qquad p_2' = \frac{B}{R_2}, \qquad q_1' = -\frac{A}{R_1}, \qquad r_1' = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial \beta}, \qquad r_2' = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial \alpha}$$

получаются формулы Ляв.

4. Об одном применении теории конечных смещений к решению задачи устойчивости упругого равновесия тонких оболочек

В одной из своих работ Трефftц [4] дает критерий устойчивости упругого равновесия, исходя из теории конечных деформаций. Предполагая, что напряжения лежат в пределах закона Гука и что объемные и поверхностные силы даны независимо от деформаций, он показывает, что граница устойчивости может быть определена из условия минимальности функционала Q, получаемого из выражения потенциальной энергии деформации после отбрасывания величин первого порядка малости относительно компонент u, v, w добавочного смещения, появляющегося при переходе от первой формы равновесия ко второй. Обозначим через $u_0, v_0, w_0, \ldots, T_{1,0}, \ldots$ соответствующие величины для первой формы равновесия, через $u_0 + u, \ldots, T_{1,0} + T_1, \ldots$ эти же величины для второй формы равновесия. Подставляя в выражение потенциальной энергии деформации, вычисленное во втором приближении, $u_0 + u, \ldots$ вместо $u, \ldots$, находим:

$$Q = \iint (W - W_0 - \text{величины 1-го порядка})\,(1+\varepsilon_1)(1+\varepsilon_2)\,AB\,d\alpha\,d\beta,$$

где интеграл берется по всей площади срединной поверхности.

В выражениях деформаций для первой формы равновесия, определяемых по (4), квадраты и произведения от $u_0, \ldots, \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}, \ldots$ будем отбрасывать. Таким образом в выражении Q сохраним лишь члены:

$$u^2,\ uv, \ldots,\ u^2 u_0, \ldots,\ u\frac{\partial v}{\partial \alpha} v_0, \ldots$$

Компоненты деформации для второй формы равновесия суть:

$$\varepsilon_1 = \varepsilon_1^{\circ} + \varepsilon_1' + \varepsilon_1'', \ldots,\quad k_1 = k_1^{\circ} + k_1' + k_1'',$$

где $\varepsilon_1', \ldots$ содержат как члены порядка u, $v, \ldots$, так и произведения их на $u_0, \ldots, \frac{\partial u_0}{\partial \alpha}, \ldots$; ε_1'' содержат только квадраты и произведения возмущений.

Выражение Q в случае тонкой оболочки постоянной толщины содержит члены следующих видов:

1) $\varepsilon_1^{\circ}\varepsilon_2'',\ \varepsilon_1'\varepsilon_2',\ \varepsilon_2^{\circ}\varepsilon_1'', \ldots,$

2) величины порядка $\frac{h^2}{3}(k_1^{\circ}k_1'',\ k_1'k_2',\ k_2^{\circ}k_1'', \ldots),$

3) величины порядка $\frac{h^2}{3R_1}(k_1^{\circ}\varepsilon_2'',\ k_1'\varepsilon_2',\ k_2'\varepsilon_1',\ \varepsilon_2^{\circ}k_1'', \ldots).$

Можно показать, что члены последнего вида могут быть отброшены как малые по сравнению с членами двух первых видов. Это значит, что потенциальную энергию деформации можно определять по формуле (17).

Таким образом в этом случае

$$Q = \iint \Big(T_{1,0}\varepsilon_1'' + T_{2,0}\varepsilon_2'' + S_{1,0}\omega'' + \mu_3 h\omega'^2 + \frac{K_1}{2}\varepsilon_1'^2 + \frac{K_2}{2}\varepsilon_2'^2 + K_1\sigma_2\varepsilon_1'\varepsilon_2' + \frac{D_1}{2}k_1'^2 + \frac{D_2}{2}k_2'^2 + D_1\sigma_2 k_1'k_2' + 2D_3\tau'^2\Big)AB\,d\alpha\,d\beta, \tag{22}$$

где

$$\begin{gathered}
\varepsilon_1'' = \frac{1}{2}e_{13}^2,\quad \varepsilon_2'' = \frac{1}{2}e_{23}^2,\quad \omega'' = e_{13}e_{23};\quad k_1'' = -\frac{\varepsilon_2''}{R_1},\quad k_2'' = -\frac{\varepsilon_1''}{R_2},\\
\varepsilon_1' = e_{11} + e_{13}e_{13}^{\circ},\quad \varepsilon_2' = e_{22} + e_{23}e_{23}^{\circ},\quad \omega' = e_{21} + e_{12} + e_{13}^{\circ}e_{23} + e_{23}^{\circ}e_{13},\\
k_1' = \frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}e_{23} - \frac{e_{23}\overset{\circ}{e}_{23}}{R_1} + \frac{1}{A}\frac{\partial e_{13}}{\partial \alpha},\quad k_2' = \frac{1}{AB}\frac{\partial B}{\partial \alpha}e_{13} + \frac{1}{B}\frac{\partial e_{23}}{\partial \beta} - \frac{e_{13}\overset{\circ}{e}_{13}}{R_2},\\
\tau' = -\frac{1}{AB}\frac{\partial A}{\partial \beta}e_{13} - \frac{e_{12}}{R_1} + \frac{1}{A}\frac{\partial e_{23}}{\partial \alpha}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Решение задачи устойчивости получается из условия минимальности Q. Удобнее всего искать решение этой задачи по методу Ритца. Этот новый критерий устойчивости тонких оболочек выгодно отличается от остальных экстремальных критериев тем, что при его применении не приходится определять работу внешних сил на пути добавочного смещения, вычисление которой обычно вызывает затруднения в более или менее сложных случаях.

Кроме того, благодаря предварительному упрощению функционала Q счетная работа по составлению и развертыванию характеристического определителя уменьшена нами во много раз, что позволяет приниматься за решение по методу Ритца довольно сложных задач.

5. Уравнения нейтрального равновесия в общем случае

Подставляя в уравнения (45) и (46) Ляв вместо $T_1, \ldots, u, \ldots$ их возмущенные значения

$$\overline{T}_1 = T_{1,0} + T_1, \ldots, \quad \overline{u} = u_0 + u, \ldots \tag{24}$$

с точностью до первой степени „возмущений", находим уравнения нейтрального равновесия:

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}(AS_2) - Br'_{1,0}S_1 - Ar'_{2,0}T_2 - Ar_2T_{2,0} + Bq'_{1,0}N_1 - Br_1S_{1,0} + \\ + Bq_1N_{1,0} + Aq'_{2,0}N_2 + Aq_2N_{2,0} + X_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = 0,\end{gathered} \tag{25.1}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2) + B(r'_{1,0}T_1 + r_1T_{1,0} - p'_{1,0}N_1 - p_1N_{1,0}) - \\ - A(p'_{2,0}N_2 + p_2N_{2,0} + r'_{2,0}S_2 + r_2S_{2,0}) + Y_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = 0,\end{gathered} \tag{25.2}$$

$$\begin{gathered}\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2) + B(p'_{1,0}S_1 + p_1S_{1,0} - q'_{1,0}T_1 - q_1T_{1,0}) + \\ + A(q'_{2,0}S_2 + q_2S_{2,0} + p'_{2,0}T_2 + p_2T_{2,0}) + Z_1(\varepsilon_1+\varepsilon_2) = 0,\end{gathered} \tag{25.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BH_1) - \frac{\partial}{\partial\beta}(AG_2) - B(r'_{1,0}G_1 + r_1G_{1,0}) - A(r'_{2,0}H_2 + r_2H_{2,0}) + N_2AB = 0, \tag{25.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BG_1) + \frac{\partial}{\partial\beta}(AH_2) + B(r'_{1,0}H_1 + r_1H_{1,0}) - A(r'_{2,0}G_2 + r_2G_{2,0}) - N_1AB = 0, \tag{25.5}$$

$$\begin{gathered}B(p'_{1,0}G_1 + p_1G_{1,0} - q'_{1,0}H_1 - q_1H_{1,0}) + \\ + A(q'_{2,0}G_2 + q_2G_{2,0} + p'_{2,0}H_2 + p_2H_{2,0}) + (S_1+S_2)AB = 0,\end{gathered} \tag{25.6}$$

где $p'_{1,0}, \ldots, r'_{2,0}, \ldots$ суть повороты в первой форме равновесия, определяемые из (2) с точностью до первой степени смещения:

$$p_1 = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{13} - \frac{A}{R_1}e_{12} + \frac{\partial e_{23}}{\partial\alpha}, \qquad p_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{13} + \frac{\partial e_{23}}{\partial\beta}, \tag{26.1}$$

$$q_1 = -\frac{1}{B}\frac{\partial A}{\partial\beta}e_{23} - \frac{\partial e_{13}}{\partial\alpha}, \qquad q_2 = \frac{1}{A}\frac{\partial B}{\partial\alpha}e_{23} - \frac{B}{R_2}e_{12} - \frac{\partial e_{13}}{\partial\beta}, \tag{26.2}$$

$$r_1 = \frac{A}{R_1}e_{23} + \frac{\partial e_{12}}{\partial\alpha}, \qquad r_2 = -\frac{B}{R_2}e_{13} + \frac{\partial e_{12}}{\partial\beta}. \tag{26.3}$$

Эти уравнения можно сильно упростить так же, как это сделал Доннель (повидимому, с одобрения Кармана и Тимошенко) в частном случае [5].

Величины $p'_{1,0}$, $q'_{2,0}$ малы, поэтому произведениями их на S_1, $T_1, \ldots$ будем пренебрегать по сравнению с последними.

Напряжения в пределах закона Гука составляют малые доли модуля Юнга и модуля сдвига. Например, согласно полученной нами формуле, критическое сдвигающее напряжение для цилиндрической оболочки круглого сечения есть величина порядка $E(h/r)^{5/4}$, где r — радиус оболочки. Поэтому величинами $S_{1,0}r_1$, $T_{2,0}r_2, \ldots$ по сравнению с $\frac{\partial}{\partial\alpha}(T_1B)$, $T_1\frac{\partial B}{\partial\alpha}, \ldots$ пренебрегаем. Что касается уравнения (25.3), то здесь аналогичные члены следует сохранить, так как они могут быть величинами одного порядка с остальными членами, содержащими множители h^2/R_1, h^2/R_2.

Таким образом вместо (25) имеем уравнения:

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BT_1)-\frac{\partial}{\partial\beta}(AS_2)+S_1\frac{\partial A}{\partial\beta}-T_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}=0, \tag{27.1}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BS_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AT_2)-T_1\frac{\partial A}{\partial\beta}-S_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}=0, \tag{27.2}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BN_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AN_2)+AB\left(\frac{T_1}{R_1}+\frac{T_2}{R_2}+k_1T_{1,0}+k_2T_{2,0}+\tau S_{1,0}-\tau S_{2,0}\right)=0, \tag{27.3}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BH_1)-\frac{\partial}{\partial\beta}(AG_2)+G_1\frac{\partial A}{\partial\beta}-H_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}+N_2AB=0, \tag{27.4}$$

$$\frac{\partial}{\partial\alpha}(BG_1)+\frac{\partial}{\partial\beta}(AH_2)-H_1\frac{\partial A}{\partial\beta}-G_2\frac{\partial B}{\partial\alpha}-N_1AB=0. \tag{27.5}$$

При этом уравнение (25.6) выполняется тождественно. Этими упрощенными уравнениями можно пользоваться вместо (25) в случае ограниченных тонких оболочек, при потере устойчивости которых срединная поверхность их превращается в волновую поверхность со столь значительным числом волн, что единица может быть отброшена по сравнению с квадратом этого числа.

Заметим, что при рассматриваемой нами точности в выражениях изменения кривизны u/R_1, v/R_2 можно отбросить по сравнению с $\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}$, $\frac{1}{B}\frac{\partial w}{\partial\beta}$, т. е. пренебречь изменением кривизны от касательных смещений и принять

$$k_1\approx\frac{1}{AB^2}\frac{\partial A}{\partial\beta}\frac{\partial w}{\partial\beta}+\frac{1}{A}\frac{\partial}{\partial\alpha}\left(\frac{1}{A}\frac{\partial w}{\partial\alpha}\right),\ldots \tag{28}$$

Определив из (27.4) и (27.5) N_1 и N_2, подставим их в (27.3) и, таким образом, получим систему трех однородных уравнений относительно u, v, w.

6. Об устойчивости длинной анизотропной цилиндрической трубки круглого сечения

Пусть на трубку действуют равномерно распределенные по концевым сечениям сжимающие и сдвигающие усилия T_0 и S_0 и равномерно распределенное по боковой поверхности внешнее давление p_0. Имеем:

$$T_{1,0}=-T_0,\quad T_{2,0}=-rp_0,\quad S_{1,0}=K_{1,2}\,\omega_0=S_0,\quad S_{2,0}=-K_{2,1}\,\omega_0, \tag{29}$$

где r — радиус окружности трубки.

Полагая в (25)

$$A = 1, \quad R_1 = \infty, \quad \alpha = x, \quad B\,d\beta = ds, \quad R_2 = r,$$

находим уравнения нейтрального равновесия, которые удовлетворяются решениями вида:

$$u = A\sin\left(\frac{mx}{r} + \frac{ns}{r}\right), \qquad v = B\sin\left(\frac{mx}{r} + \frac{ns}{r}\right), \qquad w = C\cos\left(\frac{mx}{r} + \frac{ns}{r}\right), \tag{30}$$

где n — целое число волн по окружности трубки.

Учитывая, что m^2 мало по сравнению с n^2 (как это видно из решения задачи для изотропной трубки и подтвердится нашим решением), членами порядка $m^2 D_1'/K_1 r^2, \ldots$ будем пренебрегать так же, как и квадратами малых величин D_1'/K_1, S_0/K_1, rp_0/K_1. Таким образом находим приближенное характеристическое уравнение:

$$\frac{K_1 K_{1,2}}{K_{2,1}}(1 - \sigma_1\sigma_2)m^4 + \frac{D_2'}{r^2}n^4(n^2-1)^2 =$$
$$= T_0 m^2 n^2(n^2+1) + rp_0 n^4(n^2-1) - (S_{1,0} - S_{2,0})mn^3(n^2-1). \tag{31}$$

Рассмотрим частные случаи.

1. Устойчивость при продольном сжатии и нормальном давлении

Полагая $S_{1,0} = S_{2,0} = 0$, из (31) находим:

$$n_{\text{кр}} = 2, \qquad m_{\text{кр}}^4 = \frac{48K_{2,1}}{K_1 K_{1,2}(1-\sigma_1\sigma_2)}\left(\frac{3D_2'}{r^2} - rp_0\right), \tag{32.1}$$

$$T_{0,\text{кр}}^2 = \frac{12}{25}\,\frac{K_1 K_{1,2}(1-\sigma_1\sigma_2)}{K_{2,1}}\left(\frac{3D_2'}{r^2} - rp_0\right). \tag{32.2}$$

В частности, при $p_0 = 0$ или $T_0 = 0$ отсюда получаются формулы, определяющие критические усилия при действии одного продольного сжатия или внешнего давления.

Для очень длинных трубок

$$n_{\text{кр}} = 1, \qquad T_0 = \frac{1}{2}\,\frac{K_1 K_{1,2}}{K_{2,1}}(1 - \sigma_1\sigma_2)\frac{\pi^2 r^2}{l^2},$$

откуда в частности получается известная формула Эйлера.

2. Устойчивость трубки при кручении и нормальном давлении

Пусть

$$T_0 = 0, \quad \omega_0 \neq 0, \quad p_0 \neq 0,$$

когда

$$S_{1,0}\left(1 + \frac{K_{2,1}}{K_{1,2}}\right) = \frac{4}{3}\left(\frac{3D_2'}{r^2} - rp_0\right)^{\frac{3}{4}}\sqrt[4]{\frac{K_1 K_{1,2}(1-\sigma_1\sigma_2)}{K_{2,1}}},$$
$$n_{\text{кр}} = 2, \qquad m_{\text{кр}}^4 = \frac{16K_{2,1}}{K_1 K_{1,2}(1-\sigma_1\sigma_2)}\left(\frac{3D_2'}{r^2} - rp_0\right). \tag{33}$$

Как видно из этих формул, нормальное внешнее давление понижает, а внутреннее давление повышает устойчивость трубки при сжатии или кручении.

Из формул этого и следующего пункта, в частности, получаются соответствующие решения Саусвелла, Лоренца, Шверина, Тимошенко, Ямана и других авторов, полученные ими для изотропной оболочки [6].

7. Об устойчивости недлинной анизотропной цилиндрической оболочки

В случае недлинной тонкой оболочки, полагая

$$\alpha = x, \qquad B\,d\beta = ds, \qquad w_1 = \frac{w}{R_2}, \tag{34}$$

из (27) находим уравнения:

$$\frac{\partial T_1}{\partial x} - \frac{\partial S_2}{\partial s} = 0, \tag{35.1}$$

$$\frac{\partial S_1}{\partial x} + \frac{\partial T_2}{\partial s} = 0, \tag{35.2}$$

$$\frac{\partial^2 G_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 G_2}{\partial s^2} - \frac{\partial^2 H_1}{\partial x\,\partial s} + \frac{\partial^2 H_2}{\partial x\,\partial s} + \frac{T_2}{R_2} + k_1 T_{1,0} + k_2 T_{2,0} + \tau S_{1,0} - \tau S_{2,0} = 0. \tag{35.3}$$

Исключая из (35.1) и (35.2) u и v, находим соответственно следующие зависимости:

$$\nabla^4 u = \sigma_2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^3} - \lambda_2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial x\,\partial s^2}, \qquad \nabla^4 v = (\lambda_1 + \sigma_1 \lambda_2) \frac{\partial^3 w_1}{\partial x^2\,\partial s} + \lambda_2 \frac{\partial^3 w_1}{\partial s^3}, \tag{36}$$

где

$$\lambda_1 = \frac{1 - \sigma_1 \sigma_2}{K_{1,2}} K_2 - \sigma_1 \frac{K_{2,1} K_2}{K_1 K_{1,2}} - \sigma_2, \qquad \lambda_2 = \frac{K_2 K_{2,1}}{K_1 K_{1,2}}, \tag{37}$$

$$\nabla^4 = \frac{\partial^4}{\partial x^4} + \lambda_1 \frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial s^2} + \lambda_2 \frac{\partial^4}{\partial s^4}. \tag{38}$$

Исключая из (35.3) с помощью (36) и (37) u и v, решение задачи приводим к интегрированию одного уравнения восьмого порядка:

$$\begin{gathered}\nabla^4 \left\{ R_2 \left[\nabla_1^4 w - T_{1,0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_{2,0} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - (S_{1,0} - S_{2,0}) \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial s} \right] \right\} + \\ + \frac{K_2}{R_2} (1 - \sigma_1 \sigma_2) \frac{\partial^4 w}{\partial x^4} = 0,\end{gathered} \tag{39}$$

где

$$\nabla_1^4 = D_1' \frac{\partial^4}{\partial x^4} + 2D' \frac{\partial^4}{\partial x^2\,\partial s^2} + D_2' \frac{\partial^4}{\partial s^4}, \qquad 2D' = D_1' \sigma_2 + D_2' \sigma_1 + 2D_3' + 2D_3''. \tag{40}$$

Полагая

$$T_1 = \frac{\partial^2 f}{\partial s^2}, \qquad S_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x\,\partial s}, \qquad T_2 = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} \frac{K_{1,2}}{K_{2,1}}, \tag{41}$$

решение задачи можно привести также к интегрированию системы уравнений

$$\nabla^4 f + (1 - \sigma_1 \sigma_2) \frac{K_2 K_{2,1}}{K_{1,2}} \frac{\partial^2 w_1}{\partial x^2} = 0, \tag{42.1}$$

$$\nabla_1^4 w - \frac{K_{1,2}}{K_{2,1} R_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - T_{1,0} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} - T_{2,0} \frac{\partial^2 w}{\partial s^2} - (S_{1,0} - S_{2,0}) \frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial s} = 0. \tag{42.2}$$

При действии равномерно распределенных по концевым сечениям сжимающих сил в случае круглого сечения

$$T_{1,0} = -T_0, \quad T_{2,0} = \ldots = H_{2,0} = 0$$

и уравнения (36) и (39) удовлетворяются решениями:

$$u = A \sin \frac{mx}{r} \sin \frac{ns}{r}, \qquad v = B \cos \frac{mx}{r} \cos \frac{ns}{r}, \qquad w = C \cos \frac{mx}{r} \sin \frac{ns}{r}. \tag{43}$$

При этом если положить

$$m=\frac{k\pi r}{2l}, \tag{44}$$

где k есть целое нечетное число, то в случае опертых концов выполняются точно концевые условия:

$$w=0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad v=0, \qquad T_1=0,$$

а силовое условие $S_1=0$ выполняется приближенно, так как минимум T_0 достигается при значениях m и n порядка $\sqrt{\frac{rK_2}{D_1'}}$.

Критическое усилие определяется из уравнения:

$$T_0=\frac{D_1' m^4+2D' m^2 n^2+D_2' n^4}{r^2 m^2}+\frac{K_2(1-\sigma_1\sigma_2) m^2}{m^4+\lambda_1 m^2 n^2+\lambda_2 n^4}. \tag{45}$$

Если имеет место симметричная форма потери устойчивости, то $n=0$, все граничные условия выполняются точно и

$$T_{0,\,\text{кр}}=2\sqrt{\frac{D_1' K_2(1-\sigma_1\sigma_2)}{r^2}}. \tag{46}$$

Если устойчивость теряется по несимметричной форме

$$T_0=2\sqrt{\frac{D_1' K_2}{r^2}(1-\sigma_1\sigma_2)}\sqrt{\frac{1+\alpha_1\nu+\beta\nu^2}{1+\alpha_2\nu+\nu^2}}, \tag{47}$$

где

$$\alpha_1=\frac{2D'}{D_1'\sqrt{\lambda_2}}, \qquad \alpha_2=\frac{\lambda_1}{\sqrt{\lambda_2}}, \qquad \beta=\frac{D_2'}{D_1'\lambda_2}, \tag{48}$$

$$\nu=\frac{n^2}{m^2}\sqrt{\lambda_2}=\frac{1}{\alpha_2\beta-\alpha_1}\left\{1-\beta+\sqrt{(1-\beta)^2+(\alpha_2-\alpha_1)(\alpha_2\beta-\alpha_1)}\right\}, \tag{49.1}$$

$$m^2=\sqrt{\frac{K_2(1-\sigma_1\sigma_2)r^2}{D_1'}}:\sqrt{(1+\alpha_1\nu+\beta\nu^2)(1+\alpha_2\nu+\nu^2)}. \tag{49.2}$$

В частности, для анизотропной оболочки постоянной толщины

$$T_{0,\,\text{кр}}=\frac{2\sqrt{6}}{hr}\sqrt{D_3(1+\sqrt{\sigma_1\sigma_2})\sqrt{D_1 D_2}} \tag{50}$$

и выпучивание происходит по несимметричной форме, если

$$\sqrt{E_1 E_2}<2\mu_3(1+\sqrt{\sigma_1\sigma_2}). \tag{51}$$

Если значение m, вычисленное по (49.2), окажется меньше, чем $\frac{\pi r}{2l}$, за критическое значение m принимаем это наименьшее допустимое значение, подставляя которое в уравнение $\frac{\partial T_0}{\partial \nu}=0$, находим соответствующее значение $n_{\text{кр}}$.

В случае цилиндрической пластины с центральным углом α в наших формулах следует n заменить через $\varkappa\frac{\pi}{\alpha}$, где $\varkappa$ есть целое число.

В частности, для узкой пластины постоянной толщины $\varkappa=1$ и

$$T_0=\frac{2\pi^2}{r^2\alpha^2}(\sqrt{D_1 D_2}+D_1\sigma_2+2D_3)+\frac{3\alpha^2 D_3}{\pi^2 h^2}\,\frac{\sqrt{D_1 D_2}+D_1\sigma_2}{2D_3+\sqrt{D_1 D_2}+D_1\sigma_2}. \tag{52}$$

В случае кручения равномерно распределенными по концам сдвигающими силами

$$f = F \cos\left(\frac{mx}{r} + \frac{ns}{r}\right), \qquad w = C \cos\left(\frac{mx}{r} + \frac{ns}{r}\right), \tag{53}$$

и критическое усилие определяется из уравнения:

$$-\left(1 + \frac{K_{2,1}}{K_{1,2}}\right) S_{1,0}\, mn = \frac{1}{r^2}(D_1' m^4 + 2D' m^2 n^2 + D_2' n^4) + \frac{K_2 (1 - \sigma_1 \sigma_2) m^4}{m^4 + \lambda_1 m^2 n^2 + \lambda_2 n^4}. \tag{54}$$

Характеристическое уравнение восьмой степени относительно m, поэтому удовлетворение всех граничных условий принципиально возможно. Однако алгебраические трудности этой задачи даже в случае изотропной оболочки не преодолены. Соответствующее решение Доннеля [5], данное им в предположении малости m^2 по сравнению с n^2, не может считаться удовлетворительным, так как несложный анализ показывает, что из восьми корней уравнения (54) четыре корня по модулю больше n. Мы ограничиваемся здесь обобщением на анизотропную оболочку ранее данного нами [7] приближенного решения, основанного на выполнении лишь главного геометрического условия $w = 0$, причем условия $T_1 = 0$ и $S_1 = 0$ выполняются приближенно. Таким образом находим:

$$\left(1 + \frac{K_{2,1}}{K_{1,2}}\right) S_{1,0} = \frac{3}{\sqrt[4]{1.5}} \sqrt{\frac{\pi r}{l}}\, D_2'^{5/8}\, \frac{K_1^{3/8}}{r^{5/4}} (1 - \sigma_1 \sigma_2)^{3/8} \left(\frac{K_{1,2}}{K_{2,1}}\right)^{3/8}, \tag{55}$$

$$n^4 = 1.5 \frac{\pi^2 r^3}{l^2} \sqrt{\frac{K_1 (1 - \sigma_1 \sigma_2) K_{1,2}}{D_2' K_{2,1}}}, \qquad \operatorname{tg} \theta = \frac{\pi r}{l} \frac{1}{n}, \tag{56}$$

где θ есть угол наклона гребня волны к образующей цилиндра.

8. Об устойчивости при продольном сжатии цилиндрической оболочки произвольного сечения

Ограничиваясь рассмотрением случая изотропной оболочки постоянной толщины, опертой по краям, из (42) получаем уравнения:

$$\nabla^4 f = -\frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}, \qquad \eta^2 \nabla^4 w - \frac{1}{R_2} \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} - t_0 \frac{\partial^2 w}{\partial x^2} = 0, \tag{57}$$

где

$$\eta^2 = \frac{h^2}{3(1 - \sigma^2)}, \qquad t_0 = \frac{T_0}{2Eh} = -\frac{T_{1,0}}{2Eh}. \tag{58}$$

Полагая здесь

$$f = F \cos \mu x, \quad w = W \cos \mu x,$$

задачу приводим к интегрированию системы следующих уравнений в полных производных:

$$\mu^4 F - 2\mu^2 \frac{d^2 F}{ds^2} + \frac{d^4 F}{ds^4} = \frac{\mu^2}{R_2} W, \tag{59.1}$$

$$\eta^2 \left(\mu^4 W - 2\mu^2 \frac{d^2 W}{ds^2} + \frac{d^4 W}{ds^4}\right) + \frac{\mu^2}{R_2} F - t_0 \mu^2 W = 0. \tag{59.2}$$

При

$$\mu = (2m + 1) \frac{\pi}{2l} \qquad (m = 0, 1, \ldots),$$

удовлетворяются краевые условия

$$w=0, \qquad \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}=0, \qquad T_1=0,$$

а условие $S_1=0$ удовлетворяется приближенно.

Если сечение оболочки имеет ось симметрии

$$\frac{1}{R_2}=\sum_{r=0}^{\infty}\alpha_r \cos rks \qquad k=\frac{\pi n_1}{L}, \tag{60}$$

где $2L$ — длина контура сечения, n_1 — целое число.

Полагая

$$F=\sum_{p=-\infty}^{\infty} B_p \cos(\nu+kp)s, \qquad W=\sum_{p=-\infty}^{\infty} C_p \cos(\nu+kp)s, \tag{61}$$

где p — целые числа, $\nu=\frac{\pi n}{L}$, находим рекуррентные соотношения:

$$B_p=\xi_p \sum_{r=0}^{\infty}\frac{\alpha_r}{2}(C_{p-r}+C_{p+r}), \quad \xi_p=\mu^2:[\mu^2+(\nu+kp)^2]^2, \tag{62.1}$$

$$\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_{p,p-q}C_{p-q}+\lambda_{p,p}C_p+\sum_{q=1}^{\infty}\lambda_{p,p+q}C_{p+q}=t_0 C_p \qquad (-\infty<p<+\infty). \tag{62.2}$$

Здесь положено:

$$\lambda_{p,p}=\frac{\eta^2}{\xi_p}+\alpha_0^2\xi_p+\sum_{\rho=1}^{\infty}\frac{\alpha_\rho^2}{4}(\xi_{p-\rho}+\xi_{p+\rho}), \tag{63.1}$$

$$\lambda_{p,p-q}=\sum_{\rho=0}^{q}\frac{\alpha_{q-\rho}\alpha_\rho}{4}\xi_{p-\rho}+\sum_{q=\rho}^{\infty}\frac{\alpha_{\rho-q}\alpha_\rho}{4}\xi_{p-\rho}+\sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{\alpha_{\rho+q}\alpha_\rho}{4}\xi_{p+\rho} \tag{63.2}$$

$$(q=1,\ 2,\ \ldots),$$

$$\lambda_{p,p+q}=\sum_{\rho=0}^{q}\frac{\alpha_{q-\rho}\alpha_\rho}{4}\xi_{p+\rho}+\sum_{\rho=0}^{\infty}\frac{\alpha_{\rho+q}\alpha_\rho}{4}\xi_{p-\rho}+\sum_{\rho=q}^{\infty}\frac{\alpha_\rho\alpha_{\rho-q}}{4}\xi_{p+\rho} \tag{63.3}$$

$$(q=1,\ 2,\ \ldots).$$

Применение метода, указанного в пункте 4, приводит к этим же уравнениям (62). Условие их совместности получаем, приравнивая нулю определитель D бесконечного порядка, p-я строка которого состоит из элементов:

$$\ldots,\ \lambda_{p,p-2},\ \lambda_{p,p-1},\ \lambda_{p,p}-t_0,\ \lambda_{p,p+1},\ \lambda_{p,p+2},\ \ldots$$

Неизвестное t_0, минимум которого ищется и которое является характеристическим числом рассматриваемой краевой задачи, содержится лишь в диагональных членах.

Кроме того,

$$\lambda_{p-q,p}=\lambda_{p,p-q},$$

т. е. D есть симметричный определитель. Следовательно, характеристическое уравнение есть вековое уравнение, поэтому все его корни реальны. Можно показать, что определитель D сходится так же, как и ряды (61).

Нам удалось найти удобные для применения приближенные решения в двух частных случаях: 1) для оболочки кругового гофрированного сечения; 2) для эллипсообразного сечения. Ниже приводим вкратце первое.

Пусть поперечное сечение срединной поверхности оболочки задано уравнением:

$$R = R_0(1 + \lambda \cos n_1 \varphi), \quad \lambda = \delta / R_0, \tag{64}$$

где 2δ есть высота волны гофра.

Такое сечение можно приближенно заменить сечением (60) так, чтобы кривизны в точках s

$$2q\frac{\pi}{k}, \qquad (2q+1)\frac{\pi}{k}$$

сечения (60) были соответственно равны кривизнам в точках φ

$$2q\frac{\pi}{n_1}, \qquad (2q+1)\frac{\pi}{n_1}$$

сечения (64). Тогда

$$\alpha_0 = \frac{1 - \lambda^2 - 2\lambda^2 n_1^2}{R_0(1-\lambda^2)^2}, \quad \alpha_1 = \frac{\lambda(n_1^2 - 1) + \lambda^3(n_1^2 + 1)}{R_0(1-\lambda^2)^2}, \quad \alpha_2 = \ldots = 0. \tag{65}$$

В случае гофрированной оболочки α_1 и k суть величины порядка единицы

$$\alpha_1^2 \gg \alpha_0^2, \quad \alpha_1^2 \gg \alpha_2^2.$$

Как видно из теории устойчивости анизотропной оболочки и данного решения, устойчивость такой оболочки теряется при образовании одной полуволны по длине оболочки, т. е. μ^2 — малая величина. Кроме того, каждая волна, появляющаяся при потере устойчивости, захватывает несколько волн гофра так, что

$$(k+\nu)^4 \gg \nu^4, \quad (k-\nu)^4 \gg \nu^4.$$

Поэтому t_0 с большой точностью определяется из уравнения, представляющего собой условие совместности уравнений (62.2) относительно C_{-1}, C_0, C_1. Это уравнение после упрощений, основанных на указанных соображениях, представляется в виде:

$$t_0^3 - at_0^2 + bt_0 - c = 0, \tag{66}$$

где

$$a = \eta^2\left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_{-1}}\right) + \frac{\alpha_1^2}{2}\xi_0, \qquad b = \frac{\eta^4}{\xi_1 \xi_{-1}} + \frac{\eta^2}{4}\alpha_1^2 \xi_0\left(\frac{1}{\xi_1} + \frac{1}{\xi_{-1}}\right),$$

$$c = \frac{\eta^2 \xi_0}{\xi_1 \xi_{-1}}\left[\frac{\eta^2}{\xi_0} + \frac{\alpha_1^2}{4}(\xi_1 + \xi_{-1})\right]^2 + \frac{\eta^4 \alpha_0^2 \xi_0}{\xi_1 \xi_{-1}}.$$

Меньший положительный корень этого уравнения будет:

$$t_0 = \frac{c}{b}\left(1 + \frac{ac}{b^2}\right), \tag{67}$$

или в первом приближении:

$$t_0 \approx \frac{c}{b} = \frac{\eta^2}{\xi_0} + \frac{\alpha_1^2}{4}(\xi_1 + \xi_{-1}) + \frac{\eta^2 \alpha_0^2}{\frac{\eta^2}{\xi_0} + \frac{\alpha_1^2}{4}(\xi_1 + \xi_{-1})}. \tag{68}$$

Абсолютный минимум этого выражения для допустимых значений μ и ν не достигается, поэтому в (68) следует положить:

$$\mu_{\text{кр}} = \frac{\pi}{2l}. \tag{69}$$

При этом t_0 монотонно возрастает вместе с ν. При $n=2$ граничное условие $S_1=0$ не удовлетворяется. Но уже при $n=5$ оно выполняется с достаточной точностью, поэтому критическое значение t_0 можно определять из (68) и (69), положив $n=5$.

Так как вначале при увеличении n величина t_0 увеличивается очень медленно, разница между значениями t_0 при $n=2$ и $n=5$ будет невелика, поэтому для определенности можно принять за t_0 наименьшее из допустимых значений, т. е. его значение по (68) при $n=2$. Критическое же значение n остается неопределенным.

Мы определили также значение $T_{0,\text{кр}}$ для гофрированной оболочки, рассматривая последнюю как конструктивно-анизотропную и применяя формулу (45) пункта 7. Результаты, найденные обоими методами для частных примеров, дают хорошее совпадение.

Пример:

$$R_0 = l = 20 \text{ см}; \quad 2\delta = 0.915 \text{ см}; \quad 2h = 3.9 \times 10^{-2} \text{ см}, \quad n_1 = 42,$$

$$E = 7.2 \times 10^5, \quad \sigma = 0.3.$$

$$L : \pi R_0 = 1.20, \quad k = 1.75, \quad \alpha_0 = -0.85 : 20, \quad \alpha_1^2 : 4 = 1.02.$$

Имеем:

по формуле (68): $T_0 \approx 44.0$ кг/см при $n=2$,
по формуле (67): $T_0 \approx 45.0$ кг/см при $n=2$,
по формуле (45): $T \approx 45.6$ кг/см при $n=8$—9.

Для гладкой оболочки того же радиуса $T_0 \approx 32.6$ кг/см.

§ 9. Об устойчивости при продольном сжатии оболочки эллипсообразного сечения

При $n_1=2$, $k=2\pi/L$ уравнение (64) представляет эллипсообразное сечение, которое заменяется нами сечением (60), причем параметры обоих сечений связаны формулами (65). Предположим, что α_1/α_0 не настолько мало чтобы можно было с достаточной для практических целей точностью пренебрегать квадратом этой величины по сравнению с единицей. Тогда устойчивость теряется, как это видно из последующего, при $r=0$, т. е. по форме, которую можно назвать почти симметрической.

Рассмотрим решение системы (59) в виде:

$$\begin{aligned} F &= \sum_{p=0}^{\infty} B_p \cos pks + \sum_{p=1}^{\infty} B_p' \sin pks, \\ W &= \sum_{p=0}^{\infty} C_p \cos pks + \sum_{p=1}^{\infty} C_p' \sin pks. \end{aligned} \tag{70}$$

При этом для определения C_p и C_p' получаем две независимых друг от друга системы уравнений, условия совместности которых выражаются уравнениями:

$$D=0 \qquad (p=0,1,\ldots),$$
$$D=0 \qquad (p=0.1,\ldots),$$

где D — определитель, указанного выше вида.

Несложные рассуждения показывают, что меньшее значение t_0 дает первое из этих уравнений. Ограничиваясь при этом определителем третьего порядка и считая, что

$$\zeta_0=\frac{2k^2}{\mu^2+\nu^2}\approx\frac{2k^2}{\mu^2} \quad \text{и} \quad \frac{\alpha_1^3}{\alpha_0^3}$$

малы по сравнению с единицей, находим:

$$t_0\approx\frac{\eta^2}{\zeta_0}+\left(\alpha_0^2-\alpha_0\alpha_1\sqrt{2}+\frac{9}{16}\alpha_1^2\right)\zeta_0.$$

Откуда

$$t_{0,\,\text{кр}}=2\eta\sqrt{\alpha_0^2-\alpha_0\alpha_1\sqrt{2}+\frac{9}{16}\alpha_1^2} \tag{71}$$

при

$$\xi_0=\frac{1}{\mu^2}=\eta:\sqrt{\alpha_0^2-\alpha_0\alpha_1\sqrt{2}+\frac{9}{16}\alpha_1^2}.$$

Пользуясь же решением (61), т. е. в случае несимметрической формы потери устойчивости, находим с той же точностью:

$$t_{0,\,\text{кр}}=2\eta\sqrt{\alpha_0^2-\alpha_0 a_1\sqrt{2}+\frac{5}{8}\alpha_1^2}, \tag{72}$$

т. е. несколько меньшее значение, чем по формуле (71).

Следовательно, для определения критического напряжения цилиндрической оболочки эллипсообразного сечения малого эксцентриситета получаем следующую приближенную формулу:

$$\frac{T_0}{2h}=\frac{2Eh}{\sqrt{3(1-\sigma^2)}}\alpha_0\sqrt{1-\frac{\alpha_1}{\alpha_0}\sqrt{2}+\frac{9}{16}\frac{\alpha_1^2}{\alpha_0^2}}. \tag{73}$$

Отсюда, в случае круглого сечения, получается известная формула Лоренца-Тимошенко.

Поступило в редакцию 10 X 1937.

Работа выполнена в НИИМИ при Казанском Гос. унив., где докладывалась в 1935—1936 гг. на семинарах по механике; 7/I 1937 г. была представлена в НИИ механики при МГУ для защиты диссертации.

ЛИТЕРАТУРА

1. Ляв. Математическая теория упругости, гл. XXIV.
2. Flügge W. Die Stabilität der Kreiszylinderschale, Ing.-Archiv, H. V., Bd. III, 1932.
3. Green. A. E. The Equilibrium and Elastic Stability of a Thin Twisted Strip. Proc. Roy. Soc., Ser. A, vol. 154, London, 1936.
4. Trefftz. Über die Ableitung der Stabilitätskriterien des elastischen Gleichgewichts aus der Theorie endlicher Deformationen. Internat. Kongress für Techn. Mechanik, Teil III, 1930.
5. Donnell L. Stability of Thin-Walled Tubes under Torsion. Nat. Adv. Comm. for Aeronautics, Rep. 478.

6. Обзорная статья Heck, Ebner. Formulae and Methods of Calculation of the Strength of Plate and Shell Structures in Aeroplane Construction, The Journal of the R. Aeronautical Soc., 310, 1936.
7. Муштари Х. М. Об устойчивости тонкой цилиндрической оболочки при кручении. Труды Казанского авиационного института, 2, 1933.

A FEW GENERALISATIONS ABOUT THE THEORY OF THIN SHELLS WITH APPLICATIONS FOR SOLVING THE PROBLEMS OF THE STABILITY OF THE ELASTIC EQUILIBRIUM

H. M. MOUSHTARI

(Summary)

The present article gives a short content of the author's work which was read at the State University of Kazan, in 1935—1936.

By Love's method and notations the author gives in § 1 the expressions for the elements of deformation of thin shell with the accuracy up to the square of displacements, supposing that the Hooke's law can be applied [formulae (4) and (5)].

In § 2 is determined the stress in the shell which is anisotropic by its material and is reinforced by an orthogonal net of elastic ribs for the stiffness (such shell is called double-anisotropic).

In § 3 is given the determination of deformation for the middle surface in the case of large bending displacements. Formulae (20) and (21) are obtained from which, if $A=B=1$, we have the Green's formulae [(3)].

In § 4 with the aid of the theory of the finite displacements, the problem of the stability of thin shells is reduced by the author to the minimization of the functional expression (22).

In § 5 is given in a general case the equation (25) for the neutral equilibrium. In case of limited thin shells these equations can be written in the form (27).

In §§ 6—7 the known solutions of Lorentz, Timoshenko, Southwell, Shverin and others, for the problem of the stability of the cylindrical shells are extended to the case of double-anisotropic shells [formulae (32), (33), (46), 47), (55)].

In §§ 7—8 is considered the stability of the arbitrary cylindrical shells and for the case of corrugated shells with the circular cross-section the solution is given in finite formula (68).