АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ACADEMY OF SCIENCES USSR

ОТДЕЛЕНИЕ ТЕХНИЧЕСКИХ НАУК
ГРУППА ТЕХНИЧЕСКОЙ МЕХАНИКИ
ПРИКЛАДНАЯ МАТЕМАТИКА
И МЕХАНИКА

DEPARTMENT OF TECHNICAL SCIENCES
SECTION OF TECHNICAL MECHANICS
APPLIED MATHEMATICS
AND MECHANICS

Т, II. в. 4 1939 V. II, № 4

О НЕКОТОРЫХ ЗАДАЧАХ НЕЛИНЕЙНОЙ ТЕОРИИ УПРУГОСТИ

Н. В. ЗВОЛИНСКИЙ и П. М. РИЗ
(Москва)

Классическая теория упругости строится в предположении, что перемещения элементов упругого тела во время деформации суть бесконечно малые величины. В уравнениях классической теории отбрасываются квадраты и произведения производных от перемещений и сохраняются только линейные члены. Все задачи, связанные с рассмотрением больших деформаций, не укладываются уже в рамки линейной теории; более того, можно указать ряд задач, в которых рассматриваются практически малые деформации, не выходящие за пределы пропорциональности, но при решении которых необходимо различать начальное и окончательное состояние тела и как следствие этого учитывать члены второго порядка малости. Настоящая статья излагает некоторые общие вопросы, связанные с решением нелинейных задач, и говорит о задаче, связанной с рассмотрением малых деформаций, но с учетом влияния членов второго порядка. Некоторые из приводимых результатов публиковались вкратце в Докладах Академии Наук(1).

Будем определять положение точек тела декартовыми ортогональными координатами. Пусть a_i $(i=1, 2, 3)$ координаты какой-либо материальной точки в недеформированном состоянии, x_i — координаты той же точки в деформированном состоянии и

$$u_i = x_i - a_i \tag{1}$$

смещения по координатным осям.

Деформацию можно характеризовать разностью квадратов расстояний между двумя близкими материальными точками до и после деформации (ds_0^2 и ds^2).

Очевидно

$$ds^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} dx_\alpha^2 \quad \text{и} \quad ds_0^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} da_\alpha^2. \tag{2}$$

Если заданы величины u_i как функции первоначальных координат, то из соотношений

$$dx_i = da_i + \sum_{\alpha=1}^{3} \frac{\partial u_i}{\partial a_\alpha} da_\alpha \tag{3}$$

легко получить

$$ds^2 - ds_0^2 = \sum_{\alpha=1}^{3} \sum_{\beta=1}^{3} da_\alpha \, da_\beta \cdot \eta_{\alpha\beta}, \tag{4}$$

где

$$2\,\eta_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial a_j}+\frac{\partial u_j}{\partial a_i}+\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i}\cdot\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_j}\qquad (i\neq j),$$

$$\eta_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial a_i}+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial a_i}\right)^2. \tag{5}$$

Величины η_{ij} будем называть компонентами деформаций, отнесенными к недеформированному состоянию.

Если рассматривать смещения u_i как функции окончательных координат x_i, то можно, воспользовавшись соотношением

$$da_i=dx_i-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial u_i}{\partial x_\alpha}dx_\alpha, \tag{5}$$

написать

$$ds^2-ds_0^{\,2}=\sum_{\alpha=1}^{3}\sum_{\beta=1}^{3}dx_\alpha\,dx_\beta\cdot\varepsilon_{\alpha\beta}, \tag{7}$$

где

$$2\,\varepsilon_{ij}=\frac{\partial u_i}{\partial x_j}+\frac{\partial u_j}{\partial x_i}-\sum_{\alpha=1}^{3}\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\,\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_j}\qquad (i\neq j),$$

$$\varepsilon_{ii}=\frac{\partial u_i}{\partial x_i}-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{3}\left(\frac{\partial u_\alpha}{\partial x_i}\right)^2. \tag{8}$$

Величины ε_{ij} назовем компонентами деформаций, отнесенными к деформированному состоянию.

Если через e_{ii} обозначить удлинения, т. е. $\frac{ds-ds_0}{ds_0}$, то легко получить, что

$$e_{ii}=\sqrt{1+2\eta_{ii}}-1=\frac{1-\sqrt{1-2\varepsilon_{ii}}}{\sqrt{1-2\varepsilon_{ii}}}, \tag{9}$$

или, разлагая в ряд и ограничиваясь членами второго порядка малости,

$$e_{ii}=\eta_{ii}-\frac{1}{2}\eta_{ii}^{\,2}=\varepsilon_{ii}+\frac{3}{2}\varepsilon_{ii}^{\,2}. \tag{10}$$

Очевидно, что деформация полностью может быть описана как величинами η_{ij}, так и величинами ε_{ij}. Но в большинстве задач более удобным бывает пользование величинами ε_{ij}.

Основным вопросом, который нам предстоит решить, будет вопрос о том, как, зная смещения и стало быть деформации, определить напряжения в деформированном теле.

Мы будем исходить из следующих предположений.

1. Напряжения в деформированном теле и энергия деформации однозначно определены и не зависят от способа перехода к окончательному состоянию.

2. Тело изотропно.

Разумеется, эти предположения сильно суживают область применения предлагаемой теории, не охватывающей анизотропных тел и необратимых процессов.

В этих условиях естественно предположить, что главные напряжения, отнесенные к первоначальной площади, суть функции главных удлинений такого вида:[1]

$$\bar{\sigma}_1 = F(e_1,\ e_2 + e_3,\ e_2 e_3).$$

В силу предположения об изотропности аргументами служат симметрические функции удлинений e_2 и e_3.

В равносильной форме можно написать

$$\bar{\sigma}_i = \Phi(e_i,\ S_1,\ S_2,\ S_3), \tag{11}$$

где

$$S_1 = e_1 + e_2 + e_3,\quad S_2 = e_1 e_2 + e_1 e_3 + e_2 e_3,\quad S_3 = e_1 e_2 e_3.$$

Предполагая возможность разложения последней функции в степенной ряд, сохраняя члены второго порядка относительно удлинений и требуя, чтобы коэффициенты при линейных членах совпадали с классическими, получаем:

$$\bar{\sigma}_1 = 2\mu e_1 + \lambda S_1 + A e_1^2 + B S_1^2 + C e_1 S_1 + D S_2, \tag{12}$$

где λ и μ — постоянные Ляме; аналогичные выражения получим для $\bar{\sigma}_2$ и $\bar{\sigma}_3$.

Поставленное выше условие, что энергия деформации зависит только от окончательного состояния, равносильно требованию, чтобы выражение

$$\bar{\sigma}_1\, de_1 + \bar{\sigma}_2\, de_2 + \bar{\sigma}_3\, de_3$$

было полным дифференциалом. Легко убедиться, что для этого необходимо и достаточно, чтобы

$$C + D = 0.$$

Тогда выражение (12) переписывается в виде:

$$\bar{\sigma}_1 = 2\mu e_1 + \lambda S_1 + A e_1^2 + B S_1^2 + C(e_1 S_1 - S_2). \tag{13}$$

Таким образом обобщенный закон Гука для простейшего случая трехстороннего растяжения при сохранении квадратичных членов содержит пять независимых констант, характеризующих упругие свойства материала.

Если предположить, что для упругого тела в некоторой области напряжений существует линейная зависимость между главными напряжениями и соответствующими удлинениями, то A, B и C для этой области равны нулю, и связь напряжений с удлинениями выражается формулой:

$$\bar{\sigma}_1 = \lambda S_1 + 2\mu e_1. \tag{14}$$

Нашей дальнейшей задачей является переход от зависимостей, установленных для трехосного растяжения, к установлению общих соотношений связывающих напряжения и компоненты деформаций относительно любых прямолинейных ортогональных осей координат. Покажем, что это можно сделать, не прибегая ни к каким добавочным допущениям.

Прежде всего от удлинений перейдем к компонентам деформации, отнесенной к окончательному состоянию, пользуясь формулой (10); тогда выражение (13) преобразуется к следующему:

[1] Величины напряжений, деформаций и удлинений, относящиеся к главным осям, отмечаются одним индексом.

$$\bar{\sigma}_i = \lambda I_1 + 2\mu\varepsilon_i + \left(B + \frac{3}{2}\lambda\right) I_1^2 - (3\lambda + C) I_2 + C I_1 \varepsilon_i + (A + 3\mu)\varepsilon_i^2. \quad (15)$$

Здесь и в дальнейшем I_1, I_2 и I_3 инварианты тензора деформации:

$$I_1 = \varepsilon_{11} + \varepsilon_{22} + \varepsilon_{33}, \quad I_2 = \varepsilon_{11}\varepsilon_{22} + \varepsilon_{11}\varepsilon_{33} + \varepsilon_{22}\varepsilon_{33} - (\varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2 + \varepsilon_{23}^2),$$

$$I_3 = \begin{vmatrix} \varepsilon_{11} & \varepsilon_{12} & \varepsilon_{13} \\ \varepsilon_{12} & \varepsilon_{22} & \varepsilon_{23} \\ \varepsilon_{13} & \varepsilon_{23} & \varepsilon_{33} \end{vmatrix}.$$

Затем вычислим реальные напряжения в деформированном теле σ_i, относя их к измененной площади. Очевидно, что

$$\sigma_1 = \frac{\bar{\sigma}_1}{(1 + e_2)(1 + e_3)},$$

откуда с требуемой точностью

$$\sigma_i = \bar{\sigma}_i (1 + \varepsilon_i - I_1). \quad (16)$$

Рассмотрим теперь наряду с главными осями ξ_i произвольные ортогональные оси координат x_i. Пусть

$$m_{ij} = \cos(\xi_i, x_j).$$

Выпишем следующие известные соотношения:

$$\sigma_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha m_{\alpha i} m_{\alpha j}, \qquad \sigma_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{3} \sigma_\alpha m_{\alpha i}^2,$$

$$\varepsilon_{ij} = \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha m_{\alpha i} m_{\alpha j}, \qquad \varepsilon_{ii} = \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha m_{\alpha i}^2.$$

Опираясь на эти соотношения и пользуясь формулами (15) и (16), получим:

$$\sigma_{ii} = \lambda I_1 + 2\mu\varepsilon_{ii} + (C + \lambda - 2\mu) I_1 \varepsilon_{ii} + (A + 5\mu) \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha^2 m_{\alpha i}^2 +$$

$$+ \left(B + \frac{\lambda}{2}\right) I_1^2 - (C + 3\lambda) I_2 \quad (17)$$

$$\sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij} + (C + \lambda - 2\mu) I_1 \varepsilon_{ij} + (A + 5\mu) \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha^2 m_{\alpha i} m_{\alpha j}.$$

Нам остается еще выразить суммы

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha^2 m_{\alpha i}^2, \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha^2 m_{\alpha i} m_{\alpha j}$$

через компоненты деформации в координатных осях x_i. Для этого воспользуемся уравнениями, которым удовлетворяют направляющие косинусы главных осей, вида:

$$\begin{aligned} m_{i1}(\varepsilon_{11} - \varepsilon_i) + m_{i2}\varepsilon_{12} + m_{i3}\varepsilon_{13} &= 0, \\ m_{i1}\varepsilon_{12} + m_{i2}(\varepsilon_{22} - \varepsilon_i) + m_{23}\varepsilon_{23} &= 0, \qquad (i = 1, 2, 3) \\ m_{i1}\varepsilon_{13} + m_{i2}\varepsilon_{23} + m_{i3}(\varepsilon_{33} - \varepsilon_i) &= 0. \end{aligned}$$

Из этих уравнений (их всего 9) в результате составления соответствующих линейных комбинаций из левых частей и с учетом того, что

$$\sum_{\alpha=1}^{3} m_{\alpha i} m_{\alpha j} = 0,$$

если $i \neq j$, и

$$\sum_{\alpha=1}^{3} m_{\alpha i}^2 = 1,$$

можно получить

$$\sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha^2 m_{\alpha 1}^2 = \varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2, \qquad \sum_{\alpha=1}^{3} \varepsilon_\alpha^2 m_{\alpha 1} m_{\alpha 2} = \varepsilon_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}$$

и т. д., и тогда формулы (17) примут следующий окончательный вид:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \mathrm{I}_1 + [2\mu + (C + \lambda - 2\mu)\mathrm{I}_1]\varepsilon_{11} + \left(B + \frac{\lambda}{2}\right)\mathrm{I}_1^2 - (C + 3\lambda)\mathrm{I}_2 + \\ &\quad + (A + 5\mu)(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2), \\ \sigma_{12} &= [2\mu + (C + \lambda - 2\mu)\mathrm{I}_1]\varepsilon_{12} + (A + 5\mu)[\varepsilon_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}]. \end{aligned} \tag{18}$$

. . . .

Как мы уже указывали, в области, где существует линейная зависимость между напряжениями и удлинениями, константы A, B и C равны нулю, и мы имеем следующие уравнения, выражающие закон Гука:

$$\begin{aligned} \sigma_{11} &= \lambda \mathrm{I}_1 + [2\mu + (\lambda - 2\mu)\mathrm{I}_1]\varepsilon_{11} + \frac{\lambda}{2}\mathrm{I}_1^2 - 3\lambda \mathrm{I}_2 + 5\mu(\varepsilon_{11}^2 + \varepsilon_{12}^2 + \varepsilon_{13}^2), \\ \sigma_{12} &= [2\mu + (\lambda - 2\mu)\mathrm{I}_1[\varepsilon_{12} + 5\mu[\varepsilon_{12}(\varepsilon_{11} + \varepsilon_{22}) + \varepsilon_{13}\varepsilon_{23}]. \end{aligned} \tag{19}$$

. . . .

Укажем на некоторые следствия из выведенных соотношений.

1. Принимая линейную зависимость между главными напряжениями и удлинениями, т. е. классический закон Гука для трехосного растяжения, но различая начальное и конечное состояние или, что то же, сохраняя члены второго порядка относительно производных от смещений, мы уже не можем сохранить классический закон Гука в общем случае и вынуждены заменить его выражением (19).

2. Переход за пределы линейной зависимости между главными напряжениями и удлинениями не вызывает усложнений в структуре основных формул, в которых меняются только значения коэффициентов и увеличивается число констант, характеризующих упругие свойства тела.

3. Ни при каком выборе коэффициентов A, B и C нельзя получить, вообще говоря, закон Гука в форме:

$$\sigma_{ii} = \lambda \mathrm{I}_1 + 2\mu\varepsilon_{ii}, \qquad \sigma_{ij} = 2\mu\varepsilon_{ij},$$

если не пренебрегать членами второго порядка. В самом деле, для осуществления этих равенств необходимо положить одновременно

$$C = 2\mu - \lambda \text{ и } C = -3\lambda,$$

что невозможно. Между тем написанная выше формула закона Гука применялась некоторыми исследователями, например Seth [2], при решении задач теории упругости с сохранением нелинейных членов. Очевидно, что все результаты, основанные на пользовании этой формулой закона Гука, не верны.

Формулы, аналогичные нашим общим формулам (18), были получены ранее Murnaghan [(3)] из рассмотрения энергии деформированного тела.[1] Мы вкратце укажем основную идею этого вывода. Murnaghan постулирует, что плотность энергии есть функция от инвариантов тензора деформации, и, предполагая ее разложимость в степенной ряд, пишет:

$$E = \lambda \mathrm{I}_1^2 - 2\mu \mathrm{I}_2 + l\mathrm{I}_1^3 + m\mathrm{I}_1\mathrm{I}_2 + n\mathrm{I}_3$$

с точностью до членов третьего порядка относительно компонент деформации.

Приравнивая выражение полной накопленной энергии работе массовых и поверхностных сил, можно методами вариационного исчисления установить напряжения в деформированном теле. Получающиеся таким образом выражения совпадают, отличаясь только обозначениями, с нашими выражениями (18) Однако в приложениях своего метода к случаю гидростатического сжатия и одноосного растяжения Murnaghan постулирует, что константы $l = m = n = 0$, т. е. что выражение для плотности энергии сохраняет классическую форму.

Murnaghan полагает, что эти значения коэффициентов в выражении для энергии позволяют описать деформации любой величины, не влекущие только потери энергии и, стало быть, не связанные с изменением температуры деформируемого тела. Приняв гипотезу Murnaghan, следует считать, что уже при сколь угодно малых деформациях не существует линейной зависимости между главными напряжениями и удлинениями (A, B и C не равны нулю).

Из нашего предположения легко находятся следующие значения констант l, m и n:

$$l = 3\mu\frac{1-\nu}{1-2\nu}, \qquad m = -3\mu\frac{3-4\nu}{1-2\nu}, \qquad n = 9\mu,$$

где ν есть коэффициент Пуассона.

Отметим еще, что уравнения равновесия в напряжениях сохраняют классическую форму, так как обычный их вывод свободен от каких-либо предположений о малости деформации. Надо только помнить, что производные входящие в них, берутся по координатам точек окончательного состояния.

Уравнения равновесия в перемещениях легко получаются заменой напряжений через деформации, а этих последних через производные от перемещений; уравнения эти, однако, чрезвычайно громоздки, и мы их здесь не приводим.

Ниже приведена задача, которая показывает, как применяются фактически изложенные общие соображения, и которая поможет, как мы надеемся, экспериментально установить значения системы коэффициентов A, B и C или эквивалентной системы l, m, n.

Переходя к разбору частной задачи, мы несколько изменяем наши обозначения: a, b и c — координаты первоначального состояния, x, y, z — координаты окончательного состояния, u, v, w — перемещения, ε_{xx}, ε_{xy}, ... и т. д. — компоненты деформации, отнесенной к окончательному состоянию.

[1] В формулах Murnaghan для σ_{ij} $(i \neq j)$ необходимо исправить ошибку, именно, коэффициент n заменить на $n/2$.

Рассмотрим кручение сильно растянутого (сжатого) призматического стержня.[1]

Пусть призматический стержень растянут (или сжат) силами, равномерно распределенными по концевым сечениям, и подвергается закручиванию.

Классическая линейная теория не дает возможности установить взаимную зависимость между кручением и растяжением. Напряженное состояние при одновременном действии крутящих и растягивающих нагрузок получается наложением двух систем напряжений. Нелинейная теория позволит нам определить влияние растяжения на деформацию кручения, которую мы будем считать малой. Мы будем пренебрегать величиной квадрата крутки τ^2.

Предположим теперь, что u, v и w определяются следующими формулами:

$$u = -\tau bc - \nu\alpha a, \qquad v = \tau ac - \nu\alpha b, \qquad w = \tau\varphi(a, b) + \alpha c, \tag{20}$$

где τ — крутка, α — некоторая постоянная величина, ν — коэффициент Пуассона, а начало координат выбрано в одном из оснований призмы.

Из уравнений вида

$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a}\frac{\partial a}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial b}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial c}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial a}\left(1 - \frac{\partial u}{\partial x}\right) - \frac{\partial u}{\partial b}\frac{\partial v}{\partial x} - \frac{\partial u}{\partial c}\frac{\partial w}{\partial x} \tag{21}$$

определяем $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}, \frac{\partial u}{\partial z}, \frac{\partial v}{\partial x}, \ldots$ в функциях от производных $\frac{\partial u}{\partial a}, \frac{\partial u}{\partial b}, \ldots$ Вставляя найденные выражения этих производных в формулы (8), получим выражения компонентов деформации ε_{ij} через координаты недеформированного состояния:

$$\begin{gathered}
\varepsilon_{xx} = -\nu\alpha, \quad \varepsilon_{yy} = -\nu\alpha, \quad \varepsilon_{zz} = \alpha, \quad \varepsilon_{xy} = 0,\\
\varepsilon_{xz} = \tau\{\varphi_a'(1 - 2\alpha + \nu\alpha) - b(1 - \alpha + 2\nu\alpha)\},\\
\varepsilon_{yz} = \tau\{\varphi_b'(1 - 2\alpha + \nu\alpha) + a(1 - \alpha + 2\nu\alpha)\}.
\end{gathered} \tag{22}$$

Напоминаем, что здесь и всюду в дальнейшем отброшены величины третьего порядка малости, а также величины порядка τ^2; кроме того, в выражениях вида $\alpha + \alpha^2$ мы отбрасывали α^2; последнее упрощение не имеет принципиального характера, и от него легко отказаться, что привело бы лишь к некоторому усложнению вида окончательных формул.

Воспользуемся теперь основными формулами (19); получим:

$$\begin{gathered}
\sigma_{xx} = \sigma_{yy} = \sigma_{xy} = 0, \qquad \sigma_{zz} = 2\mu\alpha(1 + \nu),\\
\sigma_{xz} = \mu\tau\left(1 + \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\nu\right)\{\varphi_a'(1 - 2\alpha + \alpha\nu) - b(1 - \alpha + 2\alpha\nu)\},\\
\sigma_{yz} = \mu\tau\left(1 + \frac{3}{2}\alpha + \frac{1}{2}\alpha\nu\right)\{\varphi_b'(1 - 2\alpha + \alpha\nu) + a(1 - \alpha + 2\alpha\nu)\}.
\end{gathered} \tag{23}$$

Из условий равновесия два выполняются тождественно, а третье ведет к требованию:

$$\frac{\partial\sigma_{xz}}{\partial x} + \frac{\partial\sigma_{yz}}{\partial y} = 0,$$

[1] Задача эта была выдвинута В. П. Ветчинкиным в связи с расчетом воздушного винта.

что сводится к условию:

$$\frac{\partial^2 \varphi}{\partial a^2}+\frac{\partial^2 \varphi}{\partial b^2}=0.$$

Условия отсутствия напряжений на боковой поверхности приводят к требованию:

$$\frac{\partial \varphi}{\partial a}\frac{db}{ds}-\frac{\partial \varphi}{\partial b}\frac{da}{ds}=(1-\alpha-\alpha\nu)\frac{d}{ds}\left(\frac{a^2+b^2}{2}\right)$$

на контуре, ограничивающем сечение.

Отсюда видно, что функция φ отличается от функции $\bar{\varphi}$ для классической задачи чистого кручения лишь множителем

$$1-\alpha-\alpha\nu.$$

Если начало координат выбрано в центре тяжести одного из оснований призмы (случай, когда ось кручения проходит через центры тяжести сечений), то легко показать, что напряжения на концевых сечениях дают чистую пару, т. е.

$$\iint \sigma_{xz}\,dx\,dy=\iint \sigma_{yz}\,dx\,dy=0.$$

В противном случае результирующие напряжения на концевых сечениях не равны нулю и создают некоторый изгибающий момент, уравновешивающийся моментом от равнодействующих растягивающих сил, отличным от нуля в том случае, когда ось кручения не проходит через линию центров тяжести. Крутящий момент определяем по формуле:

$$M=\iint \{x\sigma_{yz}-y\sigma_{xz}\}\,dx\,dy=$$

$$=\iint \{(a+u)\,\sigma_{yz}-(b+v)\,\sigma_{xz}\}\left[\frac{D(x,y)}{D(a,b)}\right]da\,db \qquad (z=\text{const}). \tag{24}$$

Проводя выкладки согласно формулам (23) и (24), находим:

$$M=GT_0\tau\left\{1+\frac{p}{G}\left(\frac{J_p}{T_0}-\frac{3+5\nu}{4(1+\nu)}\right)\right\}, \tag{25}$$

где T_0 — геометрическая жесткость на кручение не растянутого стержня, J_p — полярный момент инерции сечения относительно оси кручения, а $p=2G\alpha(1+\nu)$ — напряжение от растягивающих сил. Отсюда получаем основной результат.

Геометрическая жесткость на кручение растянутого (сжатого) стержня определяется формулой:

$$T=T_0\left\{1+\frac{p}{G}\left(\frac{J_p}{T_0}-\frac{3+5\nu}{4(1+\nu)}\right)\right\}. \tag{26}$$

Из этой формулы можно сделать следующие выводы.

1. При растяжении жесткость на кручение увеличивается и отношение дополнительной жесткости к первоначальной велико для стержней, у которых $J_p \gg T_0$, например для стержней узкого прямоугольного сечения, и минимально для круглого цилиндра.[1]

---

[1] Как известно из классической теории кручения,

$$\frac{J_p}{T_0}\geqslant 1.$$

2. Дополнительная жесткость уменьшается, если ось кручения приближается к центру тяжести.

3. При сжатии жесткость на кручение уменьшается, и при критическом напряжении

$$p_{\text{кр}} = -\frac{G}{\frac{J_p}{T_0} - \frac{3+5\nu}{4(1+\nu)}} \tag{27}$$

наступает потеря устойчивости относительно деформации кручения.

Все выкладки были проведены исходя из формул (19), предполагающих линейную зависимость между главными напряжениями и удлинениями; можно провести их исходя из более общих формул (18) и получить выражения напряжений и жесткости в функциях от параметров A, B и C (или l, m, n).

Это открывает некоторые возможности для экспериментального определения наших констант. В частности, если принять гипотезу Murnaghan, положив $l = m = n = 0$, то формула для жесткости примет вид:

$$T = T_0 \left\{1 + \frac{p}{G}\left(\frac{J_p}{T_0} - \frac{3-\nu}{1+\nu}\right)\right\}.$$

По этой формуле для круглого цилиндра, для которого $\frac{J_p}{T_0} = 1$, должно было бы наблюдаться уменьшение жесткости на кручение при растяжении, что неправдоподобно. Нам представляется, что приведенного соображения будет достаточно для того, чтобы поставить под сомнение гипотезу Murnaghan.

Поступило в редакцию 27 VI 1938.

ЛИТЕРАТУРА

1. ДАН, т. XX, вып. 2—3, 1938. Кручение растянутого призматического бруска.
2. Seth. Finite Strain in Elastic Problem. Phil. Trans. Roy. Soc. A. 234, p. 231, 1935.
3. Murnaghan. Finite Deformations of an Elastic Solid. Amer. Journ. of Math., vol. LIX, № 2, 1937.

ABOUT A FEW PROBLEMS OF NON-LINEAR THEORY OF ELASTICITY

P. M. RIZ and N. V. SVOLINSKY

Moscow

(Summary)

In the present work are treated a few questions of the theory of elasticity in cases when it is essential to keep the terms of the second order in the formulae which connect the components of deformation and the derivatives of the displacements.

In connection with this, it is necessary in some other expressions to retain the terms of the second order relatively to the above-mentioned derivatives. In keeping the terms of the second order is created the necessity to distinguish the initial state of the elastic body and the state occurring after deformation; then as in the linear theory of elasticity both of these states are considered as identical (the displacements are supposed infinitesimal).

The change of the linear element of the elastic body can be characterized by six values η_{ij} which are attributed to the initial state [see formulae (4) and (5)] or by six values ε_{ij} attributed to the state after deformation [see formulae (7) and (8)].

For the basis of further reasoning we use two hypotheses:

1. The tension in the deforming body and the energy of the deformation are determined as mono-values and are independent from the method of converting to the final state.

2. The body is supposed to be isotropic. The first question which is being solved in the present work is the following: — establish the general character of the relations which connect the components of deformation with stresses when the above-mentioned terms of the second order are taken into consideration.

At first this question is analysed for the case when the coordinate axes coincide with the main axes of deformation. Then it is ascertained that the Hooke's law can be written with the aid of the five constants [formula (13)]. Therefore, in considering the terms of the second order, it is necessary to introduce five constants instead of the two classical elastic constants of the isotropic body. As a result of a series of calculations the authors obtained the Hooke's law (i. e. the relation between the components of deformation and the stresses) for any orthogonal rectilinear systems of coordinates [formulae (19)].

The given formulae (19) were previously obtained by Murnaghan from estimates of energy.

Further, as an example, when it is necessary to safeguard the terms of the second order, the authors study the problem of the influence of the longitudinal stretch (or compression) on the stiffness of torsion of the prismatic bar.

In the linear theory of elasticity both of these states of tension are superimposed without any influence one upon the other.

By keeping the members of the second order permits one to establish this reciprocal influence and in particular to calculate the change of the stiffness of the torsion due to the stretching forces.

For the solution the authors have taken the displacements given by formulae (20) and have proven with the aid of the above-given Hooke's law (in some particular supposition about the values of the new elastic constants) that to these displacements correspond the system of stresses (23), which can, with desirable degree of accuracy, satisfy the equations of the equilibrium and at the same time also the required conditions on the surface.

By writing the moment of the stresses on the cross-section, in respect of the longitudinal axis, the authors received the expressions (26) for the geometrical stiffness of stretched bar.

Formulae (26) give the possibility to conclude: —

a) Due to stretching, the stiffness of torsion increases and this increase depends upon the ratio between the stiffness of torsion for the non-stretched bar and the polar moment of the cross-section relatively to the axis of torsion.

b) The increment of the stiffness of torsion decreases if the axis of torsion approaches the centre of gravity.

c) Due to compression, the stiffness of torsion decreases and for the compressing stresses (27) the stiffness of torsion vanishes, and for this corresponds a special form of loss of stability.